



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

- + *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.
- + *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.
- + *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.
- + *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse <http://books.google.com>











56

See 1991 d. 89
1779

Map catalogued -

HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

ANNÉE M. DCCLXXIX.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique,
pour la même Année,
Tirés des Registres de cette Académie.



A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCLXXXII





TABLE POUR L'HISTOIRE.

PHYSIQUE GÉNÉRALE.

Sur un moyen de connoître la finesse des Laines.. Page 1

ANATOMIE.

Sur l'organe de la Voix..... 5.

Sur un étranglement des Intestins..... 8.

MINÉRALOGIE.

Sur la Terre jaune du Berri..... 10

OBSERVATION D'HISTOIRE NATURELLE.. 12

CHIMIE.

Sur la Platine..... 13

Sur les Sels des cendres de Tamaris..... 18

Sur le Vitriol de Mercure..... 19

*Sur la décomposition des Sels vitrioliques & nitreux , par
l'Acide marin.....* 20

Sur l'Huile de Vitriol glaciale..... 21

1779.

* ij

T A B L E.

ARITHMÉTIQUE POLITIQUE.

| | |
|--|-----------|
| <i>Sur la Population de la France.....</i> | <i>23</i> |
|--|-----------|

A N A L Y S E.

| | |
|---------------------------------------|-----------|
| <i>Sur la Théorie des Suites.....</i> | <i>28</i> |
|---------------------------------------|-----------|

A S T R O N O M I E.

| | |
|--|--------------|
| <i>'Suite des Méthodes analytiques pour résoudre les Problèmes Astronomiques.....</i> | <i>30</i> |
| <i>'Sur la Planète de M. Herschel.....</i> | <i>31</i> |
| <i>Sur l'Inclinaison du troisième Satellite de Jupiter, & sur les Éléments de l'Orbite de Vénus.....</i> | <i>33</i> |
| <i>'Sur la Constellation des Pléiades, & sur l'Opposition de Jupiter, du 12 Mars 1779.....</i> | <i>34</i> |
| <i>'Sur la Comète de 1779.....</i> | <i>35</i> |
| <i>Sur la Longitude de la nouvelle Zemble.....</i> | <i>Ibid.</i> |
| <i>Sur une nouvelle espèce de Lunette.....</i> | <i>36</i> |
| <i>Sur un Astéréomètre.....</i> | <i>37</i> |
| <hr/> | |
| <i>Ouvrages présentés à l'Académie.....</i> | <i>38</i> |
| <i>Prix.....</i> | <i>Ibid.</i> |
| <i>Ouvrage de M. Bezout.....</i> | <i>Ibid.</i> |
| <i>Éloge de M. de Jussieu.....</i> | <i>44</i> |
| <i>Éloge de M. le Comte d'Arci.....</i> | <i>54</i> |



T A B L E

POUR LES MÉMOIRES.

| | |
|---|--------|
| <i>MÉMOIRE sur les Laines de France , comparées aux Laines étrangères. Par M. DAUBENTON.....</i> | Page 1 |
| <i>Second Mémoire sur le Cap de la Circoncision: Par M. LE MONNIER.....</i> | 12 |
| <i>Additions aux découvertes déjà publiées sur le Cap de la Circoncision. Par le même.....</i> | 15 |
| <i>Observations des Éclipses des Satellites de Jupiter, faites en 1779. Par M. MARALDI.....</i> | 19 |
| <i>Mémoire sur les Lunettes Diplantidiennes ou à double image, & sur les Objectifs & les Oculaires achromatiques. Par M. JEAURAT.....</i> | 23 |
| <i>Nouvelles Méthodes analytiques pour résoudre différentes Questions astronomiques. Quatorzième Mémoire. Par M. DIONIS DU SÉJOUR.....</i> | 51 |
| <i>Observation de l'Éclipse de Lune, faite à l'Observatoire de la Marine, la nuit du 29 au 30 Mai 1779. Par M. MESSIER.....</i> | 169 |
| <i>Observations de l'Éclipse de Soleil, du 14 Juin 1779, observée à Paris, de l'Observatoire de la Marine. Par le même.</i> | 172 |
| <i>Observation de l'Éclipse totale de Lune, le 23 Novembre au soir, faite à Paris, à l'Observatoire de la Marine. Par le même.....</i> | 175 |
| <i>Premier Mémoire sur la Voix. Par M. VICQ-D'AZYR..</i> | 178 |
| <i>Mémoire sur les Suites. Par M. DE LA PLACE.....</i> | 207 |
| <i>Analyse de la Terre Bolaire jaune du Berry. Par M. SAGE.</i> | 310 |

T A B L E.

| | |
|---|-----|
| <i>Observation sur un étranglement d'Intestin. Par M. BORDENAVE.</i> | 314 |
| <i>Mémoire contenant les observations de la dix-septième Comète. Par M. MESSIER,</i> | 318 |
| <i>Mémoire sur le moyen de dissoudre la Platine par l'Acide nitreux. Par M. TILLET.</i> | 373 |
| <i>Réflexions sur des Observations de l'Aiguille aimantée, faites à la mer. Par M. LE MONNIER.</i> | 378 |
| <i>Mémoire sur la Longitude de la nouvelle Zemble. Par le même.</i> | 381 |
| <i>Second Mémoire sur le moyen de dissoudre la Platine par l'Acide nitreux. Par M. TILLET.</i> | 385 |
| <i>Mémoire sur l'Inclinaison du troisième Satellite de Jupiter. Par M. DE LA LANDE.</i> | 438 |
| <i>Mémoire sur la Théorie de Vénus, ou sur les Elémens de l'Orbite de cette Planète. Par le même.</i> | 447 |
| <i>Mémoire sur la Population de Paris, & sur celle des provinces de la France, depuis le commencement du siècle. Par M. MORAND.</i> | 459 |
| <i>Observation sur un Acide glacial, obtenu par la distillation d'un mélange d'Acide nitreux fumant & de Charbon embrasé & réduit en poudre. Par M. CORNETTE.</i> | 479 |
| <i>Observation sur le Vitriol de Mercure. Par le même.</i> | 485 |
| <i>Mémoire sur la décomposition, par l'acide marin, de plusieurs Sels vitrioliques & nitreux, à base métallique. Par le même.</i> | 487 |
| <i>Observation sur les différens Sels que l'on retire par la lixiviation des cendres du Tamaris, pris & coupé en différens lieux. Par le même.</i> | 497 |
| <i>Description d'un Astéromètre ou Instrument destiné à trouver graphiquement l'heure du lever & du coucher d'un Astre dont</i> | |

T A B L E.

| | |
|---|-----|
| <i>on connoît la déclinaison & l'instant du passage par le Méridien.</i> Par M. JEAURAT..... | 502 |
| <i>Détermination de la position de soixante-quatre Étoiles des Pléiades, & Observation de l'Opposition de Jupiter, du 12 Mars 1779.</i> Par M. JEAURAT..... | 505 |
| <i>Mémoire sur la Planète de Herschel.</i> Par M. DE LA LANDE. | 526 |
| <i>Observation relative au second Mémoire, page 385, sur le moyen de dissoudre la Platine, &c.</i> Par M. TILLET. | 545 |
| <i>Observations Botanico-météorologiques, faites au château de Denainvilliers, proche Pithiviers en Gâtinois, pendant l'année 1778.</i> Par M. DU HAMEL..... | 550 |
| <i>Description du petit Volcan éteint, dont le sommet est couvert par le village & le château de Montferrier, à une lieue de Montpellier.</i> Par M. DE JOUBERT, de la Société royale de Montpellier..... | 575 |

ERRATA pour les Mémoires de l'année 1776.

Page 48, art. 9, ligne 24, le 30 Octobre on ressentit à Paris, &c. lisez le 30 Décembre.

Page 131, ligne 24, l'île aux Centres; lisez l'île aux Cèdres.

FAUTE à corriger dans ce Volume.

Histoire. Page 21, ligne 27, dissolution; lisez distillation.





HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Année M. DCCCLXXIX.

PHYSIQUE GÉNÉRALE.

*SUR UN
MOYEN DE CONNOÎTRE LA FINESSE
DES LAINES.*



N doit compter pour un des premiers bienfaits des V. les Mém.
Sciences, l'avantage qu'elles ont de porter dans page 1.
les Arts & dans le Commerce la précision qui
les caractérisent, de changer en méthodes les
outines des Arts, & de transformer en caractères précis &

Hist. 1779.

A

faciles à saisir, les indications vagues, d'après lesquelles le Négociant reconnoît les objets de son commerce & leurs différens degrés de bonté. Quelque sûr que puisse paroître le jugement de l'intérêt & l'habitude, il n'est jamais que le supplément imparfait des véritables connoissances: à la vérité cette utilité des Sciences n'est sensible qu'après que leurs différentes parties ont acquis une certaine étendue, & que leurs méthodes se sont perfectionnées: les premières méthodes sont rarement assez faciles pour devenir d'un usage commun, & il n'est pas moins rare qu'une méthode-pratique n'exige point le concours de connoissances dans différens genres.

M. Daubenton s'est occupé depuis long-temps des moyens de perfectionner les Laines de France, & d'en augmenter les récoltes, & il a embrassé cet objet dans toute son étendue, la nourriture, le logement, le régime, les maladies des moutons, la manière de recueillir leurs laines, les effets des mélanges avec les races étrangères.

Pour apprécier l'influence des différentes méthodes de nourrir, de traiter les moutons, & celle des mélanges des races sur les laines, il falloit avoir un moyen précis de juger du degré de leur finesse: elles sont classées dans le Commerce, mais ces classes, d'ailleurs trop peu nombreuses, ne sont point distinguées par des caractères certains: des laines très-différentes sont souvent placées dans la même classe par différens Manufacturiers, & quelquefois par le même, suivant son intérêt ou son caprice.

M. Daubenton a cherché un moyen plus sûr, & il l'a trouvé en faisant un examen suivi des différentes laines qu'il a pu observer; il a remarqué d'abord, que dans tous les flocons de laines il se trouve des fils de la plus grande finesse, & qu'ainsi, ce n'est point d'après les fils les plus fins d'une laine, mais d'après l'épaisseur des plus gros qu'il faut en déterminer la finesse.

Ensuite il a fait construire un micromètre qui mesure la cent quarantième partie d'une ligne, c'est-là le terme de la finesse des fils les plus gros d'un flocon de laine de la première

qualité; ce terme une fois connu, M. Daubenton se borne à diviser les laines en cinq classes; les superfines, dont le diamètre s'étend depuis $\frac{1}{140}^e$ de ligne jusqu'à $\frac{1}{70}^e$, les fines depuis $\frac{1}{70}^e$ jusqu'à $\frac{3}{140}^e$ & ainsi de suite: la différence de diamètre d'une classe à l'autre étant ainsi de $\frac{1}{140}^e$ de ligne, elle est assez sensible pour que dans chaque classe on puisse distinguer des laines de première & deuxième qualité.

L'usage de cet instrument a été très-utile à M. Daubenton, il lui a servi à s'assurer, avec exactitude, de l'effet que les différens moyens qu'il a employés peuvent produire sur les laines; par exemple, il a trouvé que les métis des béliers à laine très-fine, & des brebis à laine de l'Auxois, peuvent, dès la première génération (grâce à la manière dont il les élève) acquérir une laine supérieure à celle du bélier, qui a été la tige de leur race.

Ce même instrument peut être utile dans de grandes Manufactures en laine, où il est important d'en connoître exactement la qualité, & où de légères erreurs entre des laines très-fines peuvent faire perdre à un ouvrage une partie de son prix. Mais on sent que ni les Bergers, ni les Fermiers, ni même la plupart des Propriétaires & des Manufacturiers, ne se fourniront point de micromètre: M. Daubenton a donc cherché pour eux une méthode plus simple; il propose d'attacher sur un fond noir des échantillons de laines de chaque classe, de les placer à des distances égales; on mettra entre deux l'échantillon de la laine qu'on veut leur comparer, & en observant avec une loupe, on connoîtra, d'une manière plus précise que le tâtonnement ordinaire, à quelle classe on doit rapporter la laine que l'on examine.

Cette méthode est susceptible d'une exactitude très-grande, parce qu'il s'agit seulement de comparer l'objet qu'on veut classer avec des échantillons déterminés, par une méthode très-précise, & dont les différences sont très-sensibles à la loupe. Non-seulement cette seconde méthode proposée par M. Daubenton, peut être utile aux Manufacturiers qui sont intéressés à bien connoître leurs laines, mais elle le sera

4 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

beaucoup en général à cette partie du Commerce , en mettant les hommes les plus simples en état de se défendre contre les ruses de ceux qui ont plus de connoissances & plus d'adresse; c'est-là un des plus grands avantages des bonnes méthodes, si elles augmentent l'inégalité entre les hommes dans les objets de spéculation, elles la font presque disparaître dans tout ce qui tient à l'usage commun, c'est-à-dire dans toutes les circonstances où cette inégalité peut être un mal.





ANATOMIE.

SUR L'ORGANE DE LA VOIX.

M. VICQ-D'AZIR a inséré dans le volume précédent V. les Mém. p. 178. un Mémoire sur l'Ouïe, où d'après un examen comparé des parties qui constituent cet organe dans les différentes classes d'animaux pourvues de ce sens, il a distingué celles qui sont essentielles, des parties qui n'ont qu'une utilité secondaire, & dont quelques-unes même, semblent plutôt nuire à la perfection de l'ouïe. En effet il paroît avoir le plus de finesse & de justesse dans les espèces d'oiseaux qui apprennent si facilement à moduler des airs, & dans ces espèces l'organe est très-simple.

Le Mémoire que M. Vicq-d'Azir donne ici sur l'Organe de la voix, a précisément le même objet, & l'Auteur suit la même marche. Il décrit cet organe dans l'homme, dans un grand nombre de singes, dans les quadrupèdes des différents genres, dans les oiseaux, dans quelques reptiles, & il lui présente une foule de variétés.

On voit dans plusieurs espèces de singes, des poches membraneuses qui communiquent avec le larynx, & qui se remplissant & se vidant d'air alte nativement, servent à former les cris de ces animaux. Le singe-hurleur, à qui la force de la voix a fait donner ce nom, a une poche osseuse; l'appareil singulier de cet organe est ici décrit pour la première fois. Les quadrupèdes digités approchent beaucoup plus de l'homme que la plupart des singes; car cet animal, qui au premier coup-

6 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

d'œil paroît si près de nous, s'en éloigne à mesure qu'un examen plus approfondi apprend à le mieux connoître. On distingue dans le larynx du chat deux membranes qui forment des vibrations lorsque l'on souffle dans la trachée-artère, & produisent alors un ronflement semblable à celui que les chats font entendre. Ainsi des membranes particulières au chat, deviennent l'organe de ce son aussi particulier à son espèce.

Dans le cochon, les ventricules de la glotte sont remplacées par plusieurs cavités recouvertes par un muscle. Dans l'âne & dans le mulet, le cartilage thyroïde a une cavité recouverte par une membrane. L'air qui est alternativement poussé dans ces cavités, & forcé d'en sortir, augmente la voix de ces animaux, & sert à la production des sons qui les caractérisent.

L'organe de la voix du phoque ressemble à celui des animaux à quatre pieds; à cet égard la chauve-souris, au contraire, semble se rapprocher des oiseaux; observation singulière, parce que le reste de sa conformation place cet animal dans la classe des quadrupèdes.

L'organe de la voix des oiseaux a une construction différente de celle du même organe dans les quadrupèdes: les oiseaux n'ont point d'épiglotte, mais leur glotte a la faculté de s'ouvrir & de se fermer. C'est la seule partie de l'organe qui soit à la partie supérieure du cou, le reste se trouve à la partie inférieure, au-dessus de la bifurcation des bronches; la pièce qui les divise, leurs membranes sont susceptibles de vibrations, & tiennent lieu des membranes auxquelles dans l'homme on a donné le nom de *cordes vocales*. Dans quelques espèces, la trachée-artère s'enfonce dans le sternum; dans d'autres elle s'étend en-dehors des deux côtés de cette partie. Cette disposition semble être analogue à celle des poches osseuses, des grandes cavités qu'on observe dans certains quadrupèdes, & elle est vraisemblablement destinée aussi à donner plus de force à la voix de ces oiseaux. Mais ceux dont le chant est varié, agréable, ont un organe très-simple, tout cet appareil n'existe point chez eux. Il sert à la

force de l'organe, mais non à sa variété ou à son agrément. Il est utile aux espèces, qui par leur manière de vivre, ont besoin de s'avertir de loin, & dont la langue se borne à un petit nombre de cris. En général, l'organe de la voix, comme celui de l'ouïe, est d'autant plus parfait qu'il est plus simple.

On retrouve les cordes vocales dans la grenouille & les animaux de ce genre, mais ils n'ont pas d'épiglotte.

La glotte dans les reptiles paroît être la seule partie de l'organe sonore qu'ils aient conservée, & leur voix se borne à un sifflement sourd,

M. Vicq-d'Azir conclut de cette longue suite d'observations :

- 1.^o Que la glotte paroît inutile à la formation des sons :
- 2.^o Que ce sont les membranes inférieures du larynx dans l'homme & dans les quadrupèdes, remplacées dans les oiseaux par les membranes élastiques des bronches, qui sont le véritable organe de la voix, puisqu'elles sont les seules parties susceptibles de vibration :

3.^o Enfin, que les poches osseuses, les cavités, les sinuosités monstrueuses de la trachée-artère, observées dans un si grand nombre d'espèces, ne servent qu'à donner au son une intensité plus grande encore, sans influencer sur l'intonation.

Cependant il ne donne ces conclusions que comme de simples vues, & il se propose de les vérifier par une suite d'expériences sur les organes de la voix de différentes espèces d'animaux.

En effet, il a ici un avantage qui manque à ses recherches sur l'ouïe, celui de pouvoir s'assurer, par l'expérience, de l'usage de chaque partie, & il n'est jamais permis dans les Sciences physiques de s'en rapporter à l'analogie, que lorsqu'on ne peut constater les faits par des observations directes, comme on ne doit employer le calcul des probabilités, & chercher la vraisemblance de ce qui peut être que dans les cas où il ne nous est pas donné de savoir ce qui est.

L'analogie est utile pour nous indiquer les faits qu'il faut chercher à vérifier, pour abréger les recherches, pour marquer la route qui doit nous conduire avec plus de vraisemblance ;

elle nous éclaire sur le choix des méthodes ; mais si on la prend pour la méthode même, si on veut la regarder comme une preuve, lorsqu'elle ne doit servir qu'à indiquer les vérités qui restent à prouver, on risque de s'égarer, de substituer des songes aux véritables loix de la Nature, & de créer un monde imaginaire, au lieu de perfectionner la connoissance de celui qui existe.

C'est ce que M. Vicq-d'Azir a senti, & ce qui le rend si réservé dans ses conclusions, lors même que l'analogie la plus forte semble ne pas permettre le doute ; & cette réserve est, dans les Sciences naturelles, le caractère le plus certain du véritable talent.

S U R U N

ÉTRANGLEMENT DES INTESTINS.

V. les Mém.
P. 314.

P A R M I cette foule de maux sans nombre, à laquelle notre organisation nous expose, il en est qui, inaccessibles aux secours ou même aux observations de l'Art, nous condamnent à une mort lente, dont il n'est possible ni de retarder l'époque, ni de prévoir la cause. Telle est une maladie singulière, dont M. Bordenave rend compte dans ce Mémoire : le malade mourut après dix-huit jours de coliques continues & douloureuses. L'ouverture du cadavre fit voir l'épiploon roulé, resserré sur lui-même, adhérent au péritoine ; au-dessus de l'os pubis l'ileon adhéroit à une poche qui s'étoit formée dans le péritoine ; il s'y étoit introduit, & il étoit étranglé à son entrée dans cette poche. M. Bordenave conjecture que quelque effort, auxquels les travaux habituels du malade l'exposaient, ou quelque coup qu'il avoit reçu, avoit distendu le péritoine, & causé la formation de cette poche ; cette formation pouvoit être ancienne, & le malade éprouvoit depuis long-temps des douleurs lorsqu'il se couchoit sur le côté gauche : une cause d'inflammation aura produit l'étranglement que la disposition particulière des intestins favorisoit, &

& les accidens qui ont terminé la vie du malade en ont été les suites nécessaires.

De telles observations sont utiles, quoiqu'elles n'apprennent ni les moyens de remédier au mal, ni même ceux d'en reconnoître la nature : c'est en rassemblant ces faits isolés, que présente l'histoire des ouvertures de cadavres, que l'on peut seulement espérer de connoître un jour les symptômes extérieurs de ces vices accidentels de l'intérieur. Eh, qui peut répondre que l'on ne trouvera pas même, ou le moyen de réparer ces désordres, ou ceux de prévenir les suites funestes qu'ils peuvent produire ? Ceux qui cultivent les Sciences d'observations, ceux sur-tout qui veulent les juger, ne doivent jamais perdre de vue, que si nos connoissances sont encore peu étendues, un siècle & demi, seul espace des temps connu, où les Sciences ont été cultivées de suite & dans un grand espace, n'est aussi qu'un instant par rapport à la durée de notre espèce ; qu'ainsi, tout ce que nous savons, n'est rien en comparaison de ce que l'esprit humain peut embrasser, & que les choses qui nous paroissent aujourd'hui possibles, ne sont qu'une foible partie de ce que le temps & le génie peuvent nous mettre en état de tenter un jour avec succès.





MINÉRALOGIE.

SUR LA TERRE JAUNE DU BERRI.

v. les Mém.
 P. 310.

LA Terre bolaire jaune du Berri se trouve principalement dans la paroisse de Saint-George ; les couches de cette terre, leur disposition, la nature de celles qui les recouvrent, ont été décrites par M. le Monnier. M. Sage l'a soumise à l'Analyse chimique ; & il a trouvé qu'elle contenoit par quintal dix livres d'eau acidule, quarante de chaux de fer, & cinquante de terre argileuse non colorée.

C'est de cette terre jaune que l'on tire le rouge connu dans le Commerce, sous le nom de *rouge de Prusse* ou d'*Angleterre*, & que l'on emploie principalement à mettre en couleur les carreaux des appartemens, à polir les verres, à peindre des papiers. Les Hollandois achettent cette terre en Berri trente-huit à quarante sous le quintal, & après qu'ils lui ont fait prendre la couleur rouge, ils la mettent dans le Commerce où elle vaut, suivant l'intensité du rouge qu'elle donne, de vingt-cinq à quarante-huit livres. On connoissoit depuis long-temps le profit que les Hollandois font sur cette terre, mais on ignoroit la préparation qu'ils lui faisoient subir ; M. Sage n'a pas eu de peine à la deviner, & l'expérience lui a confirmé qu'il suffisoit de la calciner. Il entre dans son Mémoire, dans le détail des moyens de faire cette opération d'une manière sûre & assez simple pour être employée dans un travail en grand par des Ouvriers ordinaires.

Il faut espérer que d'après la publication de ce Mémoire,

on établira quelques Manufactures de ce genre , qui diminueront le prix de cette terre , & qui éviteront la dépense absolument en pure perte de son transport en Hollande & de son retour en France.

L'ignorance du commun des hommes a été depuis long-temps, pour ceux qui ne la partageoient qu'en partie, une mine plus féconde que celles du Pérou & de Golconde; elle est encore, elle sera long-temps bien riche; mais ceux dont les vues & les sentimens embrassent toute l'espèce humaine, voient avec consolation que plusieurs branches de cette mine, qui, peut-être, n'étoient pas les moins abondantes, commencent à s'épuiser.



OBSERVATION D'HISTOIRE NATURELLE.

ON a observé dans plusieurs parties de la France, comme à Saint-Maur en Touraine, à Fleuri-la-rivière, & à Courtagnon en Champagne, à Chaumont dans le Vexin françois, à Stors près l'île Adam, de vastes amas de coquilles; ceux de Touraine sont les plus anciennement connus, on les nomme *falunières*, & les coquilles étant devenues très-friables, sont employées comme la marne, & à peu-près dans les mêmes vues. Il ne faut pas confondre ces amas de coquilles avec les moules, les empreintes de coquillages qu'on rencontre dans les pierres calcaires, & dont elles paroissent quelquefois composées presque en entier.

Dans les pierres calcaires les coquilles ont été détruites, & il ne reste d'autres vestiges de leur existence, qu'une terre qui s'est moulée dans leur intérieur, & qui en a conservé l'empreinte: ici au contraire, la coquille même est plus ou moins conservée, ce qui semble indiquer que ces dépôts sont moins anciens, ou qu'ils n'ont pas éprouvé la même action de la part des eaux. Il est important de multiplier les observations de ce genre; ce n'est que par une connoissance exacte & détaillée du Globe, qu'on peut parvenir à se former une idée des révolutions qu'il a éprouvées, des causes des changemens qu'on y observe, & des loix suivant lesquelles ces causes ont agi.

M. Morand a découvert, il y a quelques années, un de ces bancs au-dessus de Louvres en Paris, à droite du grand chemin de Paris à Compiègne, près d'une Commanderie de Saint-Lazare, nommée *Guépel*: ce banc forme une butte qui a été coupée pour aplanir le grand chemin: les coquilles y sont très-abondantes, & des mêmes familles que celles qui forment la montagne de Courtagnon. Il n'est peut-être pas inutile de remarquer que ces deux endroits sont également placés dans le bassin de la Seine.





CHIMIE.

SUR LA PLATINE

LE succès avec lequel M. le comte de Sickingen est parvenu à rendre la Platine ductile, & à en former des lingots, a rappelé vers cette substance métallique les regards des Chimistes, qui sembloient l'avoir négligée depuis quelque temps.

V. les Mém.
pages 337,
385 & 545.

M. Tillet, qui s'est occupé de l'art des Essais, avec plus de suite & de succès qu'aucun des Chimistes dont il a été précédé ou suivi dans cette carrière, a voulu considérer cette substance sous ce même point de vue. Comme la coupellation qui sépare les autres métaux de l'or & de l'argent laisse la platine mêlée avec eux, il y avoit trois espèces d'alliages à examiner, celui d'or & de platine, celui d'argent & de platine, celui des trois métaux réunis.

On favoit séparer l'or de la platine, & ce sont par conséquent les deux autres alliages qui sont devenus l'objet des travaux de M. Tillet.

Si on soumet à l'opération du départ un cornet d'une partie de platine, de 11 parties d'or, & de 36 grains d'argent, elle se fait précisément comme s'il n'y avoit point de platine, c'est-à-dire que l'on trouve un cornet d'or pur, que la liqueur du matras est transparente, & qu'ainsi, l'acide nitreux tient en même temps en dissolution l'argent & la platine: on observe seulement presque toujours une petite surcharge dans le cornet d'or, surcharge qui cependant n'équivaut pas à beaucoup.

près à la quantité de platine employée. M. Tillet a observé que cette surcharge étoit dûe non à ce qu'une partie de la platine combinée avec l'or, échappoit à l'action de l'acide, mais seulement à ce que quelques portions de platine, au lieu de s'unir avec l'or dans la fusion, étoient demeurées intactes, & parce que l'acide nitreux n'a point d'action sur la platine seule: une seconde opération débarrasseroit complètement l'or de cette surcharge.

Si la platine est alliée avec de l'argent seulement, alors elle n'est plus dissoluble dans l'acide nitreux, du moins la liqueur prend une couleur brune, opaque, & il se précipite, mais avec une grande lenteur, une poudre noire très-fine & très-légère; la dissolution même après ce dépôt, est encore trouble, & contient une petite quantité de platine, plutôt suspendue que dissoute.

Lorsqu'en exposant à l'action de l'acide nitreux, un cornet d'or, d'argent & de platine, on s'est procuré cette dissolution dans un état de limpidité parfaite, si on emploie, pour en précipiter l'argent & la platine, une plaque de cuivre, comme dans les travaux en grand des Affinages, cette plaque de cuivre se couvre alors d'une cristallisation feuilletée & brillante: ces feuillets triangulaires sont d'une extrême finesse & d'une grande légèreté; peu-à-peu il se dépose une poudre brune qui les ternit & qui les affaisse: en formant de tout ce précipité un lingot par la fusion, & cherchant à le dissoudre dans l'acide nitreux, il reste un précipité beaucoup plus petit qu'il le devoit être, si l'on supposoit que toute la platine de la dissolution qu'on a précipitée eût existé dans le lingot. En effet, M. Tillet, en dissolvant dans de l'acide nitreux le précipité, tel qu'il l'avoit obtenu, chargé d'une poudre brune a eu un résidu beaucoup plus fort: cette poudre brune, qui doit son origine à la platine, a donc disparu par la fusion, ce n'étoit donc point de la platine pure, mais une substance qui devoit son origine à ce métal. L'acide nitreux peut donc en quelque sorte décomposer, altérer ce métal, sur lequel il n'a aucune action quand ces

deux substances sont présentées l'une à l'autre sans mélange, tandis que le cuivre sur lequel l'acide nitreux a une action si vive, peut reprendre, presque tout entier, sa forme métallique.

La cristallisation du précipité d'argent, lorsque l'acide nitreux contient en même-temps de la platine en dissolution, est un phénomène bien remarquable, & il n'a pas lieu seulement dans ce cas; M. Tillet a observé encore que les boutons, les lingots d'argent, alliés d'un dixième de platine, ont, en se refroidissant, à leur surface, des espèces d'herborisations formées par des cristaux pyramidaux, qui ont beaucoup de rapport avec les cristaux d'argent qu'il a obtenus par la méthode employée par M. Rouelle, pour avoir des cristaux de soufre. Mais cette même cristallisation n'est sensible ni sur les lingots ni sur les boutons d'argent pur: comment ce mélange d'une petite quantité de platine produit-il cet effet? C'est une de ces questions sur lesquelles il n'est point même permis encore de former des conjectures.

Il étoit possible que ces précipités d'une poudre noire & légère, séparés de la platine, & réunis avec ce qui pouvoit être resté dans les scories, restituassent la quantité de platine qui étoit perdue, & qu'il ne restât plus rien de remarquable que l'existence d'un précipité si léger, produit par un métal si pesant. M. Tillet a tenté cette expérience, & il n'a pu retirer des scories que cette même poudre noire, & point de platine.

Toute la platine dissoute par l'acide nitreux n'est pas détruite; si on précipite l'argent par l'acide marin, qu'on ait par ce moyen une dissolution de platine par l'eau régale, & qu'on retire cette platine du résidu de cette dissolution, en l'alliant avec du cuivre, le culot de cuivre, soumis à l'action de l'eau-forte, laisse de la platine dans l'état métallique; mais dans cette opération, l'eau-forte en dissout encore une partie, qui ne se retrouve plus que sous la forme de poudre noire.

Cette même opération présente encore un phénomène bien singulier; si on soumet à l'action de l'acide nitreux une

petite lame de cuivre & de platine, où ces métaux soient dans la proportion de 1 à 28, il reste une petite lame de platine semblable à la lame de cuivre & de platine, mais seulement diminuée dans les deux dimensions, & cette petite lame ne prend aucune retraite par le recuit. On sait qu'au contraire, les cornets d'or, dans l'opération du départ, ne subsistent entiers qu'avec une proportion d'argent beaucoup moindre que ne l'est celle de cuivre dans ces expériences, ne diminuent pas de grandeur pendant cette opération, ce qui est vraisemblablement la raison pour laquelle ils ne peuvent subsister lorsque la proportion d'argent est trop foible; qu'enfin ils prennent au contraire de la consistance, & éprouvent une retraite considérable par le recuit. Ce phénomène étoit donc éloigné de ceux que présentent toutes les opérations semblables, connues jusqu'ici, qu'il méritoit d'être constaté par de expériences très-précises, & c'est ce qu'a fait M. Tillet; il trouva qu'une lame de quatre-vingt-douze parties de longueur sur quarante-cinq de largeur, en avoit perdu cinquante-deux sur la longueur, & dix-huit sur la largeur, & il s'est assuré par l'inspection de la petite lame, que ses bords avoient conservé les mêmes tranchans, les mêmes bavures que la lame de cuivre coupée avec des ciseaux; c'est donc à la retraite de la platine, lorsque le cuivre l'abandonne, & non à la destruction d'une partie de la lame, qu'il faut attribuer ce phénomène.

Il résulte de ces expériences de M. Tillet, faites sur la platine déjà purifiée & rendue ductile, que ce métal, comparé par sa pesanteur spécifique, son inaltérabilité, à quelques égards, approche beaucoup de l'or, est bien éloigné cependant de pouvoir être regardé comme un métal parfait puisque l'acide nitreux en sépare une poudre noire, qui aucune propriété métallique, & qui paroît irréductible qu'ici. La platine, dont on a séparé cette poudre noire, fournit encore, & à peu-près dans la même proportion on lui fait subir une seconde fois les mêmes épreuves: donc une véritable décomposition du métal même.

expéri

[The text in this block is extremely faint and illegible due to heavy noise and poor scan quality. It appears to be a list or a series of entries.]

tém.
5.

Quelques Chimistes célèbres ont avancé que, dans ces expériences, un seul des acides étoit vraiment dissolvant, que celui qu'on mêloit avec le premier, ne servoit qu'à donner à ce premier le degré de pureté & de force nécessaire à son action; cependant, le sel formé par la combinaison de l'eau régale & de l'or, contient les deux acides intimement unis tous deux avec l'or, & cette observation est une objection très-forte contre cette opinion qui n'est fondée jusqu'ici, que sur une théorie très-bien combinée, mais qui ne peut être prouvée que par des expériences directes.

S U R L E S
SELS DES CENDRES DE TAMARIS.

V. les Mém.
P. 497.

ON a observé, il y a long-temps, que les cendres de Tamaris ne donnent point d'alkali fixe développé, & seulement des sels vitrioliques; mais ce qu'on n'avoit pas encore remarqué, c'est que ce sel vitriolique est presque entièrement du sel de Glauber, si la plante a crû sur le bord de la mer, qu'en s'éloignant de ses bords, la quantité de sel de tartre vitriolé devient de plus en plus grande, que si enfin le tamaris a été pris dans un terrain éloigné de la mer, il ne présente plus aucun vestige de sel de Glauber.

Cette observation de M. Cornette est analogue à celle qu'a faite M. Cadet, sur les cendres du kali recueilli à Denainvilliers, qui, après quelques années, n'ont plus donné que de l'alkali végétal.

Nous croyons devoir annoncer ici, que ce résultat est absolument conforme à ce qu'a observé M. Deslandes, Directeur de la manufacture des Glaces de Saint-Gobin, qui, depuis plusieurs années, a suivi ces expériences avec beaucoup de soin, & les a faites très en grand.

Ce phénomène est sans doute bien digne de remarque, & il seroit intéressant d'examiner, si c'est à l'air des bords de la mer, ou aux parties de sel marin, répandues dans

les terres voisines, que l'on doit l'existence de l'alkali minéral dans les cendres des plantes. jusqu'ici il paroîtroit que l'air devoit en être l'origine; en effet, la terre des pays éloignés de la mer, ne paroît pas contenir d'alkali; les cendres des plantes venues dans l'eau, en contiennent, du moins n'a-t-on pas observé le contraire, & l'eau ne renferme point d'alkali: ce sel se forme donc dans la végétation. Mais, si c'est à la différence de l'air, qu'est dûe celle des alkalis, quelle est l'espèce de fluide aërisforme, qui distingue l'air des bords de la mer, de celui de l'intérieur des terres, & qui produit ce changement d'alkali végétal, en alkali marin?

Il est facile de s'assurer de ce fait, par des expériences directes; mais si le végétal, produit par des graines recueillies sur les bords de la mer, donne encore de l'alkali marin, quoique semé dans l'intérieur des terres, s'il faut plusieurs générations de plantes, pour produire cette métamorphose, combien le phénomène devient-il plus difficile à analyser? Les changemens produits par la végétation, dans les élémens des corps, doivent sans doute devenir un jour, une branche de l'analyse chimique, & ce ne sera point une des moins utiles, ni des moins propres à nous faire pénétrer un peu plus avant, dans les secrets de la Nature.

On emploie les cendres de tamaris, pour décomposer l'eau-mère du salpêtre, & en retirer du nitre. Il est aisé de voir que le choix du lieu où croît cette plante, n'est pas indifférent. Le tamaris des bords de la mer, donneroit beaucoup plus de nitre quadrangulaire, celui des terres ne donneroit au contraire que du véritable salpêtre.

SUR LE VITRIOL DE MERCURE.

QUELQUES Chimistes avoient annoncé que le vitriol de Mercure se décomposoit, au lieu de se sublimer, & que le métal passoit dans la distillation, séparé de l'acide, & sous

V. les Mém.
P. 485.

la forme de mercure coulant : M. Cornette a trouvé, en répétant cette expérience, un résultat différent ; il s'est sublimé une grande quantité du vitriol mercuriel, & très-peu de mercure séparé de l'acide.

Ce mercure étoit sous la forme d'une poudre grise, & l'acide qui s'en étoit séparé, étoit décomposé de manière qu'il passoit séparément de l'air acide sulfureux, & une certaine quantité d'air vital : le premier de ces airs est miscible à l'eau & produit alors avec l'alkali fixe, le sel sulfureux de Stalh. Il faut remarquer que, lorsqu'on emploie pour faire le vitriol de mercure, non le mercure coulant, mais une chaux de mercure qui, comme on sait, contient elle-même une certaine quantité d'air vital ; alors le vitriol de mercure se sublime en entier : cette différence paroît donc tenir à la présence de cet air, qui peut empêcher la décomposition de l'acide vitriolique, soit pendant la distillation, soit dans la formation du vitriol de mercure.

Ainsi, les phénomènes que présente la sublimation du vitriol de mercure, paroissent dépendre de l'action des substances aëriiformes qui sont devenues un des élémens les plus importans des Analyses chimiques, & ont ajouté à cette Science un si grand degré de précision & d'étendue.

SUR LA DÉCOMPOSITION
DES SELS VITRIOLIQUES ET NITREUX,
PAR L'ACIDE MARIN.

V. les Mém.
P. 487. **L'**OBJET de ce Mémoire est d'examiner l'action de l'acide marin sur les sels vitrioliques & nitreux, à base métallique : M. Cornette a déjà montré dans d'autres Mémoires (*année 1778*) que cet acide décompose les Sels vitrioliques & nitreux à base d'alkali fixe & volatil, & il prouve ici qu'il a la même action sur ces sels, lorsque leur base est métallique.

Cette propriété étoit déjà connue pour les métaux blancs, tels que l'argent, le plomb, le mercure, le régule d'antimoine,

M. Cornette l'étend ici au cuivre, au fer, au zinc, au cobalt. Ces expériences deviennent très-difficiles, lorsque l'on opère sur des substances, dont l'eau régale est le dissolvant, parce qu'alors il est beaucoup plus difficile de séparer l'acide nitreux du métal, & qu'il en reste une partie qui se mêle à l'acide marin.

L'acide marin dans ce cas semble non-seulement décomposer tout le sel nitreux, mais s'unir même avec une partie de l'esprit de nitre, & attaquer le métal dans cet état de combinaison; car, en général, dans cette circonstance, les cristaux que l'on obtient paroissent homogènes, & renfermer dans chacun de leurs élémens les deux acides & leurs bases, & non être formés par l'agrégation des cristaux de deux sels, l'un nitreux & l'autre marin. Cependant, même dans ce cas, M. Cornette est parvenu à retirer du nitre de cobalt des cristaux, où l'acide marin se trouvoit seul; & il est en droit d'en conclure que l'acide marin décompose ces sels nitreux. D'ailleurs, un grand nombre d'expériences semblent indiquer que dans l'action de l'eau régale, c'est l'acide marin qui est vraiment le principe actif; ainsi, quand même on ne pourroit séparer l'acide nitreux en entier de sa base, la supériorité de l'action de l'acide marin paroîtroit encore avoir en sa faveur une très-grande probabilité.

S U R

L'HUILE DE VITRIOL GLACIALE.

SI l'on distille sur du charbon un mélange d'acide vitriolique & d'acide nitreux, il monte à la fin de la dissolution un sel concret qui est l'acide vitriolique sous forme solide, l'huile de vitriol glaciale. L'acide vitriolique pur distillé sur du charbon, ne produit point le même effet, non plus que la distillation d'un mélange d'acide nitreux & d'acide vitriolique.

Ce phénomène observé par M. Cornette, a une grande analogie avec plusieurs faits découverts par les Chimistes

V. les Mém.
P. 479.

modernes, on fait que c'est en distillant de l'acide nitreux sur du sucre, sur des gommés, sur de la soie, qu'on parvient à séparer de ces substances un acide concret. Toutes ces matières contiennent du phlogistique comme le charbon, toutes agissent sur l'acide nitreux & le décomposent en partie; ainsi le fait que contient ce Mémoire, n'est pas un fait isolé: il se lie avec ceux qu'ont observés les autres Chimistes, & on doit le regarder comme une observation bien propre à nous éclairer sur la formation de ces acides concrets, inconnus il y a quelques années; mais qui placés dans un très-grand nombre de substances végétales & animales, deviennent un des objets les plus importants de l'analyse chimique. En effet, l'observation de M. Cornette semble indiquer que ces acides concrets n'existent point tout formés dans les substances qui les produisent, mais qu'ils doivent leur formation, ou du moins leur forme concrète, à la décomposition de l'acide nitreux & d'une partie du phlogistique de ces substances.





ARITHMÉTIQUE POLITIQUE.

SUR LA POPULATION DE LA FRANCE.

L'EUROPE est-elle plus peuplée aujourd'hui qu'elle ne l'étoit du temps de la République Romaine, ou sous les Empereurs? Sa population est-elle augmentée ou diminuée depuis un demi-siècle? Ces deux questions ont été agitées de nos jours par des Philosophes, par des Politiques, par des Calculateurs.

V. les Mém.
P. 459.

Montesquieu & Wallace ont soutenu que l'espèce humaine avoit diminué depuis les temps que nous nommons *anciens*. Hume & Voltaire ont soutenu le contraire; & l'on trouve, pour ou contre l'augmentation de la population en Europe, depuis le commencement de ce siècle, des autorités presque égales en poids & en nombre. L'objet qu'embrasse M. Morand, n'est pas si vaste; il n'examine que la population de la France, & en cela il a raison; tout ce qui dépend des connoissances de détail ne peut être ni bien exact ni bien certain, que lorsqu'il est l'ouvrage d'un habitant du pays même qu'on cherche à faire connoître; & il échappe souvent des erreurs grossières aux hommes les plus éclairés, lorsqu'ils parlent d'un autre pays que le leur.

M. Morand, d'après un examen critique des différens Auteurs qui se sont occupés de la population de la France, croit pouvoir conclure qu'elle a considérablement augmenté depuis quarante ans, qu'en général la fécondité y est plus grande & la mortalité moindre; & après avoir lu son ouvrage il est difficile de ne point avoir la même opinion.

Mais, dira-t-on, comment ce résultat peut-il s'accorder

avec les progrès du luxe, la corruption des mœurs dans la capitale, l'augmentation de la misère dans les provinces?

On pourroit répondre que la population s'accroît ou diminue en même temps que la quantité des subsistances; qu'il est plus aisé de comparer avec quelque précision l'état de la culture d'un pays, ou la population dans deux époques, que le plus ou le moins d'aisance de ses habitans. Or, on ne peut nier que l'agriculture n'ait fait des progrès, les prairies artificielles se sont multipliées, la culture des pommes de terre s'est répandue de nos jours dans plusieurs provinces, ainsi le raisonnement est ici d'accord avec l'observation; & l'on voit que la population s'est accrue & qu'elle a dû s'accroître. D'ailleurs, la classe du peuple qui vit de son travail, a plus d'aisance; il suffit, pour s'en assurer, d'observer l'augmentation de la consommation de viande dans les bourgs & dans les villages, de comparer les logemens des habitans des campagnes, leurs habillemens, avec ce qu'ils étoient il y a un demi-siècle; on peut observer aussi, que le commerce & l'industrie ont fait de grands progrès, qu'ils jouissent en général d'une plus grande liberté; que les loix fiscales sont exécutées avec moins de rigueur, quoique les revenus du fisc soient augmentés. Tous ces changemens n'auroient pu se faire si la misère n'étoit pas diminuée, & la diminution de la misère en est à la fois la cause & l'effet.

Il est difficile d'avoir une mesure bien juste de la corruption des mœurs dans chaque siècle, & particulièrement de celle dont il s'agit ici, de la débauche, qui n'est point, peut-être, la corruption de mœurs la plus nuisible; mais celle qui a un effet le plus direct sur la population. Si cependant on veut comparer ce que nous connoissons de nos mœurs, avec ce que les Mémoires particuliers, les Lettres, la tradition nous apprennent des mœurs des générations qui nous ont précédés, cette comparaison fera à notre avantage. On observera sur-tout deux points, dont la réunion nous paroît décisive; 1.^o que les mauvaises mœurs sont moins grossières & moins scandaleuses; 2.^o que l'hypocrisie de mœurs est plus rare. Or, si nous montrons moins de corruption,

& si

& si nous cachons moins celle que nous avons, comment pourra-t-elle être augmentée? cette franchise dans nos mœurs, qui a souvent déterminé à prononcer contre nous, devoit au contraire être une raison en notre faveur; on affichoit jadis des principes plus austères & on ne les suivoit pas; nous en annonçons de plus faciles, mais nous nous en écartons moins; notre indulgence tient plus à l'humanité qu'à la corruption.

Le seul fait qui semble prouver quelque chose contre nous, est l'augmentation du nombre des Enfans-trouvés; mais qu'on daigne examiner si cette augmentation n'est pas l'effet des vues d'humanité, de sagesse, qui ont facilité l'accès de ces asiles, supprimé toutes les recherches, tous les obstacles qui en écartoient autrefois; qui les ont ouverts aux victimes de la misère comme à celles de la honte; qui ont procuré à des cantons éloignés les moyens de profiter de ces secours. Le temps où plus de foiblesses sont dévoilées, ne vaut-il pas mieux que celui où l'austérité, en effrayant les coupables, multiplioit les crimes secrets.

On a cité aussi comme une preuve des progrès de la misère & de ceux de la débauche, la diminution de la taille des hommes, diminution très-réelle, du moins dans quelques cantons; mais cette diminution n'a-t-elle pas une autre cause? l'énorme perte d'hommes d'une grande taille, que la guerre enlève, perte qui loin de se réparer, s'accroît même pendant la paix, parce que les Soldats sont presque tous célibataires. Leur nombre n'est pas assez grand pour nuire à la population générale, pour l'empêcher de se proportionner à la quantité des subsistances, ou pour diminuer cette quantité; mais le rapport de leur nombre à celui des hommes d'une taille élevée, est assez grand pour avoir une influence très-sensible. Les Soldats mariés cependant déserteroient moins, seroient plus sages, plus honnêtes, & moins livrés à l'ivrognerie, à la débauche, à l'oisiveté, mais il faut avouer aussi qu'ils seroient moins lestes.

L'augmentation du luxe ne peut être regardée comme nuisible à la population, que dans le cas où elle diminueroit

le nombre des mariages, ou seroit un obstacle à leur fécondité; en effet, le luxe en général est la suite nécessaire de l'inégalité des fortunes, celui de nos jours, plus utile à l'industrie, est moins funeste que le faste auquel il a succédé, & l'inégalité des fortunes a sûrement diminué. Or il est assez difficile de savoir si le nombre des hommes que la crainte d'avoir à diminuer leur dépense, retient dans le célibat, ou empêche d'augmenter leur famille, est plus grand qu'il ne l'a été; mais cette différence, sûrement beaucoup plus petite qu'on ne le croit, ne peut regarder que des classes très-peu nombreuses, & n'est qu'un objet insensible dans la population d'un grand État; l'effet en disparoit nécessairement, en comparaison de l'augmentation de population que celui de la culture & des subsistances a dû produire.

C'est dans des vues sans doute très-respectables, qu'on cherche à nous faire croire que nos mœurs sont dégénérées de celles de nos pères, afin de nous inspirer une plus grande envie de nous corriger; qu'on déclame contre les progrès du luxe, dans l'espérance d'effrayer par la crainte de ses suites funestes; qu'on exagère la misère des peuples, pour empêcher tout ce qui pourroit l'augmenter; mais nous osons croire que la vérité seroit plus respectable encore & plus utile. Nous sommes si loin de cette égalité de fortune qui peut détruire le luxe, de cette bonté de mœurs qui fait régner dans les familles de tous les états, la paix, la confiance, l'amour des devoirs; la misère présente encore dans la capitale & dans les campagnes, un tableau trop déchirant pour que personne puisse croire qu'il n'y a rien à corriger: mais celui qui nous dit que nous avons déjà fait des progrès, que nous en ferons encore, n'est-il pas plus encourageant que le moraliste, qui en nous présentant nos maux comme aggravés sans cesse par le temps, semble nous ôter tout espoir? Nous sommes dans la décadence, voilà ce qu'un zèle outré nous répète. Nous devons faire nos efforts pour n'y point tomber, & malgré nos progrès, peut-être en sommes-nous menacés, si nous ne sommes attentifs à la

prévenir, voilà ce qu'il semble qu'un zèle plus éclairé doive nous faire entendre.

Les observations sur la population de Paris en particulier, paroissent prouver que le nombre des naissances y surpasse constamment celui des morts; mais il n'en faudroit pas conclure une augmentation de population. On ne trouve point dans le nombre de ces morts, les enfans envoyés en nourrice & sevrés dans les provinces, & le nombre est très-grand. D'un autre côté, plus de personnes viennent des provinces s'établir à Paris, qu'il ne retourne de Parisiens dans les provinces; & par conséquent la population pourroit être croissante quand même le nombre des morts surpasseroit celui des naissances. Pour bien juger cette question, pour savoir si dans un lieu la mortalité augmente ou diminue, il faudroit ne faire les observations que sur des Tables qui contiendroient les individus nés & morts dans le même lieu; cette précaution est nécessaire toutes les fois qu'on veut tirer des Tables de mortalité, des conséquences relatives à la salubrité de l'air, à la vie moyenne des habitans d'un pays, aux effets que la nourriture, les habitudes, la manière de vivre, les progrès de l'art de la Médecine, peuvent produire sur la durée de la vie.





A N A L Y S E.

SUR LA THÉORIE DES SUITES.

V. les Mém.
p. 207.

LES Géomètres ne considérèrent d'abord la théorie des Suites, que comme un moyen d'obtenir une valeur approchée des quantités dont la valeur exacte, ou ne peut être assignée par les méthodes connues, ou se présente sous une forme trop compliquée : mais ils aperçurent bientôt, en examinant ces séries, que la considération de leur forme, celle de la loi que suivent leurs coefficients successifs, conduisoient à un grand nombre de vérités nouvelles, souvent utiles, ou du moins piquantes, par les espèces de paradoxes qu'elles sembloient offrir; en sorte que, depuis le siècle dernier, cette théorie est devenue une des branches les plus cultivées & les plus fécondes de l'analyse.

On sait qu'il existe nécessairement un rapport entre la somme d'une série, c'est-à-dire la fonction dont le développement a produit cette série, & son terme général, c'est-à-dire le coefficient d'un terme qu'on suppose occuper dans la série, un rang quelconque : souvent il est difficile de trouver la somme d'une série dont on connoît le terme général, quelquefois il l'est même de trouver le terme général lorsque la somme de la série est connue, & sur-tout d'avoir l'expression de ce même terme, en supposant le rang qu'on lui suppose dans la série exprimée par un nombre quelconque, qui puisse n'être pas un entier. On a donné à cette dernière recherche le nom d'*interpolation*.

Si on considère plusieurs séries, & qu'il y ait une équation entre leurs termes généraux, il en existe une autre

entre leurs sommes, & réciproquement; il est aisé de voir que ces équations ne sont pas du même genre, que les unes peuvent être faciles à résoudre, tandis que les autres offriront des difficultés insurmontables, & qu'ainsi, par exemple, on peut réduire la solution d'une équation entre les termes généraux de plusieurs séries, à celle de l'équation entre les sommes, & à la détermination du terme général d'une série dont on connoît la somme; ce qui peut rendre le Problème beaucoup plus simple, ou donner, pour la solution, des méthodes qu'une analyse plus directe eût difficilement fait découvrir.

L'objet du Mémoire de M. de la Place, est de considérer les rapports de ces deux équations, l'une entre les termes généraux de différentes séries, l'autre entre les sommes de ces mêmes séries, & de considérer les différens cas où la solution d'une de ces équations, donnant celle de l'autre, la fait dépendre de méthodes qu'il n'eût point été possible d'y employer immédiatement.

Il applique cette méthode générale à l'interpolation des suites, dans plusieurs cas qui n'avoient point encore été considérés, à leur transformation, à l'examen de certains rapports singuliers entre différentes opérations de l'analyse, comme entre la différentiation, l'extraction des racines, l'intégration & l'élevation aux puissances, à la théorie des différences partielles, pour plusieurs desquelles il trouve, par cette méthode, les intégrales exprimées par des fonctions qui renferment des intégrales définies, à l'examen de la loi de continuité, à laquelle les fonctions arbitraires de ces intégrales sont assujetties, enfin à des équations singulières qui renferment des différences partielles, finies pour une variable, & infiniment petites pour l'autre.

Nous sommes obligés de renvoyer au Mémoire même, pour le détail de ces diverses recherches; il nous suffit d'avoir montré le principe de cette méthode, dont cette grande variété d'applications fait voir, en même temps, la fécondité & l'étendue.





ASTRONOMIE.

SUITE DES MÉTHODES ANALYTIQUES

Pour résoudre les Problèmes Astronomiques.

V. les Mém. **U**NE méthode analytique de calculer le mouvement des
P. 51. Comètes, devoit faire partie du grand travail de M. du Séjour, sur l'application de l'analyse à l'Astronomie, travail dont il s'occupe depuis long-temps, & dont les volumes de nos Mémoires, depuis 1764, ont tous renfermé quelque partie importante.

M. du Séjour a senti combien la méthode deviendroit plus simple, s'il pouvoit séparer les équations qui servent à déterminer le plan de l'orbite de celles qui donnent la trajectoire, & il y est parvenu. Les trois distances de la Terre à la Comète, qu'on emploie alors, & dont on suppose que l'on connoît le rapport, doivent être prises à la vérité pour des points peu éloignés, ce qui est un désavantage; mais, pourvu que l'on ait une suite d'observations voisines entr'elles, l'auteur trouve le moyen d'avoir la position de l'orbite qui satisfait à trois observations, telles qu'on voudra les choisir dans le nombre de celles qu'on peut employer.

Le plan de l'orbite une fois connu, la détermination de la trajectoire, soit parabolique, soit elliptique, si les observations obligent ou plutôt permettent de la supposer telle, devient beaucoup plus facile.

Enfin, si la première méthode n'a point donné la position

de l'orbite avec assez de précision, M. du Séjour donne le moyen de réparer cette inexactitude, en même temps que l'on cherche à déterminer la trajectoire.

SUR LA PLANÈTE DE M. HERSCHEL.

DEPUIS la découverte des deux satellites de Saturne, V. les Mém. par Dominique Cassini, en 1684, l'Astronomie avoit cessé p. 526. d'enrichir notre Ciel de nouveaux astres; car les Comètes, visibles seulement dans une petite partie de leur cours, & cessant d'avoir par leur distance, aucune influence sensible sur notre système, semblent bien moins nous appartenir que les Planètes; ainsi les astres éclairés par le Soleil, & circulant autour de lui dans des ellipses, étoient partagés en deux classes très-distinctes, l'une où la distance du foyer au centre est très-petite, l'autre où cette même distance est fort grande, par rapport à la distance du foyer, à l'extrémité de l'axe; c'est-à-dire à celle du Soleil à l'astre dans le périhélie.

Le 13 Mars 1781, M. Herschel, en observant à Bath avec un Télescope de sept pieds construit par lui-même, les étoiles des pieds des Gémeaux, en distingua une, que ses apparences lui firent regarder comme une Comète; il mit à son télescope un oculaire qui augmentoit le grossissement, & le diamètre de l'étoile parut augmenté; il ne douta plus que sa conjecture ne fût fondée, il eut soin de déterminer, avec précision, le lieu du nouvel astre, & deux jours après, il eut le plaisir de voir qu'il avoit changé de place. On regarda d'abord cet astre comme une Comète; mais bientôt, M. Lexell, célèbre Astronome de Pétersbourg, qui a ors étoit à Londres, annonça qu'il avoit trouvé moyen de satisfaire à toutes les observations de cet astre, en supposant que son orbite est un cercle dont le rayon est dix-huit fois plus grand que celui de l'orbite terrestre; ce qui donne par conséquent à cet astre, une révolution d'environ quatre-vingt-deux ans: alors, des paraboles qui avoient depuis

quatorze jusqu'à quinze fois cette distance, pour distance de leur foyer au sommet de l'axe; représentoient également bien les observations.

M. de la Lande, en cherchant à déterminer par trois observations cette orbite supposée circulaire, a trouvé un résultat très-approchant de celui de M. Lexell. M.^{rs} Prosperin & Klinkenberg ont eu des résultats à peu-près semblables. Le temps qu'on a pu observer cette Planète, ne suffit point encore pour oser décider si son orbite est réellement à très-peu-près circulaire: dans l'espace qu'elle a parcouru, & qui ne peut être que d'environ 6 degrés, on a découvert déjà quelques irrégularités. M. de la Lande, en comparant sa théorie avec l'observation, a dressé une table des différences qui s'y trouvent; les différences sont très-petites en elles-mêmes, mais elles sont dans le même sens. Nous devons donc nous borner à croire que l'hypothèse circulaire doit représenter assez exactement, pendant quelque temps encore, le cours de cet astre, que son orbite a une excentricité sensible, & qu'il est encore impossible de la déterminer.

Nous n'avions jusqu'ici aucune Planète de notre système, aussi peu visible, qui pût être confondue avec une Étoile de la septième grandeur, & celle-ci n'est pas sans doute la seule; il existe peut-être un grand nombre de corps célestes que nous découvrirons successivement, à mesure que des observations, faites avec des instrumens plus parfaits, se multiplieront davantage.

Combien M. Herchel, en portant les yeux des Astronomes vers les observations de ce genre, en leur montrant, par un examen assidu & scrupuleux du Ciel, un moyen de multiplier les découvertes, ne contribuera-t-il point à nous faire voir de nouveaux phénomènes, qu'il nous est impossible de prévoir? L'observation des petites Étoiles, que les Astronomes n'avoient jusqu'ici presque jamais examinées, que relativement à l'utilité dont elles peuvent être, pour déterminer la position des Planètes, va devenir une des branches les plus curieuses de l'Astronomie; & il est impossible que
les

les travaux nécessaires, pour nous assurer du nombre des petites Planètes visibles aux télescopes, & comparables en grandeur aux petites Étoiles, ou pour en déterminer le cours, ne nous conduisent pas à des connoissances sur une foule de phénomènes célestes, à peine soupçonnés, ou encore absolument inconnus.

SUR L'INCLINAISON
DU TROISIÈME SATELLITE DE JUPITER,
ET SUR
LES ÉLÉMENTS DE L'ORBITE DE VÉNUS.

DANS les temps où les Sciences sont peu cultivées, elles s'arrêtent long-temps au même point, & un Traité complet sur une Science particulière, peut servir pendant plusieurs siècles, & devenir un dépôt où tous ceux qui veulent s'instruire, trouveront toutes les connoissances réunies. Il n'en est pas de même parmi nous, quelques années suffisent pour qu'il soit nécessaire d'ajouter de nouvelles théories à l'ouvrage le plus complet, pour qu'on soit obligé d'en perfectionner, d'en corriger quelques parties.

V. les Mém.
pages 438
& 447.

M. de la Lande a publié en 1771, la seconde édition de son Traité d'Astronomie, & les deux Mémoires qu'il donne dans ce volume, ont pour objet d'ajouter à l'exactitude de son Ouvrage, en déterminant des élémens de la théorie de Vénus & du troisième satellite de Jupiter, qu'il n'étoit pas possible de donner alors avec la même précision.

On savoit que l'inclinaison du troisième satellite de Jupiter, n'est pas constante, mais on ignoroit si l'augmentation observée dans cette inclinaison, devoit produire une équation séculaire, ou si elle étoit renfermée entre certaines limites.

L'opinion de M. de la Lande en 1771, étoit que cette inclinaison avoit été dans son *maximum* en 1763, où elle étoit de 3^d 26', tandis qu'elle n'avoit été que de 3^d en

Hist. 1779.

E

1697, & qu'elle se retrouveroit à ce point de *minimum* en 1729.

De nouvelles observations des satellites de Jupiter, l'ont mis en état d'appuyer cette opinion sur des fondemens plus solides, il ne reste plus aucun doute que l'inclinaison du troisième Satellite n'ait commencé à diminuer. Ces mêmes observations lui ont montré que les équations empiriques de M. Wargentin, ne donnoient pas les variations de l'inclinaison du troisième Satellite, avec la même exactitude que l'hypothèse de M. Maraldi, qui consiste à supposer que la révolution des nœuds de l'orbite du troisième Satellite, rapportée à celle du second, est de cent trente-deux ans.

Dans le second Mémoire, M. de la Lande corrige les élémens de la théorie de Vénus, d'après de nouvelles observations des conjonctions inférieures de cette Planète, qu'il regarde comme les plus propres à donner des résultats certains & précis.

*SUR LA CONSTELLATION DES PLÉIADES,
ET SUR L'OPPOSITION DE JUPITER,
du 12 Mars 1779.*

V. les Mém. p. 505. **M.** Jaurat donne ici, d'après des observations faites en 1779, la position de soixante-quatre Étoiles des Pléiades. Il compare avec les positions déterminées par M. Cassini, & M. l'abbé de la Caille, celles de six des sept principales Étoiles de cette Constellation, car la septième, connue sous le nom de *Pléione*, paroît avoir un mouvement propre qui n'est point encore bien connu. Cette comparaison lui donne 24' 25" pour le mouvement des Étoiles en longitude en vingt-neuf ans, ce qui fait environ 5" de plus en trente ans qu'on ne le suppose communément.

L'observation de l'opposition de Jupiter en 1779, a été faite dans des circonstances favorables, & avec beaucoup

d'exactitude. En la comparant aux Tables, M. Jeurat trouve que celles de M. Cassini s'accordent le mieux avec l'observation, ensuite celles de M. Wargentin & de M. Jeurat lui-même, qui à peine diffèrent entr'elles; celles de Halley sont les plus éloignées. Mais une observation isolée ne suffit pas pour juger du degré d'exactitude des différentes Tables, & M. Jeurat remarque que pour d'autres observations de l'opposition de Jupiter, ses Tables & celles de M. Wargentin ont été plus conformes aux observations que celles de M. Cassini.

SUR LA COMÈTE de 1779.

CETTE Comète a été observée par M. Messier, depuis V. les Mém. le 18 Janvier qu'il l'a découverte, jusqu'au 17 Mai; c'est p. 318. la vingt-deuxième dont il ait suivi le cours, & la soixante-quatrième dont l'orbite ait été calculée.

Les élémens de l'orbite de celle-ci ont été déterminés séparément par M.^r de Saron, d'Angos, Méchain & Reggio; d'après des observations différentes, ils s'accordent entr'eux avec beaucoup de précision, & l'orbite calculée diffère très-peu des observations.

M. Messier joint à son Mémoire la détermination de deux cents soixante-onze Étoiles, auxquelles il a rapporté les positions de la Comète, & il le termine par un compte détaillé des observations de la même Comète, faites dans différentes parties de l'Europe.

SUR LA

LONGITUDE DE LA NOUVELLE ZEMBLE.

LES Hollandois ont déterminé en 1597, la longitude de V. les Mém. la nouvelle Zemble, d'après une conjonction de la Lune & p. 381. de Jupiter, observée le 24 Janvier. L'exactitude de cette

détermination peut être affectée, soit par l'erreur des Tables astronomiques, soit par celle de l'heure à laquelle les Hollandois ont fait l'observation. M. le Monnier prouve ici, que si on suit les Tables des Institutions astronomiques, il n'y a point une erreur sensible dans la détermination des Hollandois, qu'en prenant celles de Mayer, l'erreur peut être d'un degré tout au plus; mais que l'incertitude de l'heure en produit une d'environ cinq degrés sur la longitude de cette partie de la nouvelle Zemble.

SUR UNE

NOUVELLE ESPÈCE DE LUNETTE.

V. les Mém. P. 23. LA Lunette que M. Jeurat présente ici aux Astronomes, donne deux images du même objet, l'une droite, & l'autre renversée; pour y parvenir, il emploie un objectif percé d'un trou, l'objet est vu renversé par cet objectif, tandis qu'un second, qui répond à la partie vide du premier, sert, au moyen d'un appareil convenable, à donner l'image directe. Ces deux verres doivent être formés de manière à offrir deux images égales; par ce moyen, les deux images de l'astre qu'on observe semblent parcourir en sens contraire le champ de la lunette, & s'éloigner avec une vitesse relative, double de celle avec laquelle une seule image paroîtroit parcourir le champ de la même lunette: dans le passage du centre de l'astre par le centre de la lunette, les deux images coïncident, ce qui donne un moyen d'observer exactement le passage du centre, quel que soit le diamètre de l'astre.

M. Jeurat donne ici les formules générales pour déterminer les dimensions des verres qui doivent entrer dans la construction de ces lunettes, & en déduit les constructions les plus avantageuses.

Il y a joint de nouvelles dimensions pour les objectifs

achromatiques, propres à détruire en partie l'aberration de sphéricité, en détruisant celle de réfrangibilité, la seule à laquelle M. Jeurat avoit cru devoir s'arrêter, dans le Mémoire qu'il a donné en 1770 sur la même matière.

SUR UN ASTÉRÉOMÈTRE.

CET Instrument, inventé par M. Jeurat, sert à trouver V. les Mém. promptement & sans calcul l'heure du lever & du coucher P. 502. des Étoiles, il suffit pour cela d'orienter l'instrument par rapport au passage de l'astre au méridien, & à sa déclinaison connue : une alidade marque sur le champ l'heure du lever, & celle du coucher

Il a été exécuté par M. de Courtenvaux, Honoraire de l'Académie, qui y grava de sa main, *Jeurat invenit, Courtenvaux fecit.*

NOUS renvoyons aux Mémoires :

Les nouvelles Recherches de M. le Monnier, sur le cap de la Circoncision, & sur l'Aiguille aimantée. V. les Mém. pages 12 & 15.

Les Observations des satellites de Jupiter, faites à Péri-naldo en 1779 : Par M. Maraldi. Page 19.

Les Observations de l'éclipse de Soleil du 14 Juin, & de celles de Lune du 30 Mai, & du 25 Novembre : Par M. Messier. Pages 169, 172 & 175.





O U V R A G E S
P R É S E N T É S À L' A C A D É M I E.

P R I X.

L'ACADÉMIE avoit proposé pour sujet du Prix de 1779:

La Théorie des Machines simples, en ayant égard aux effets du frottement & de la roideur des cordages.

Aucune des Pièces du Concours ne lui ayant paru remplir les vues qui l'avoient déterminée à choisir ce Sujet, elle a remis le Prix, & proposé de nouveau la même question pour 1781, avec un Prix double.

M. BEZOUT a publié cette année un Ouvrage intitulé, *Théorie générale des équations algébriques.*

L'élimination des équations qui fait l'objet principal de ce Traité, est en général l'art de tirer d'un système d'équations, qui renferment un certain nombre d'inconnues, une équation qui ne contienne plus que le moindre nombre d'inconnues possible: si, par exemple, le nombre des inconnues surpasse d'une, de deux unités, celui des équations, l'élimination consiste à chercher l'équation qui a lieu entre deux, entre trois des inconnues seulement; si le nombre des équations au contraire surpasse celui des inconnues, l'art de l'élimination consiste à trouver les conditions qui doivent avoir

lieu entre les coefficients des équations, pour qu'elles puissent exister en même temps : si le nombre des équations est égal à celui des inconnues, on cherche alors l'équation déterminée qui donne la valeur d'une de ces inconnues. Ce dernier cas est le plus commun, & celui qui a été le plus souvent l'objet de la recherche des Géomètres.

La théorie de l'élimination est une des plus importantes de l'Analyse ; c'est de la perfection de cette théorie, de la simplification des méthodes d'éliminer, que dépend le grand problème de la solution générale des équations déterminées. Il semble d'abord que l'élimination ne doive présenter d'autres difficultés que celle de la longueur des calculs ; mais d'abord ces calculs sont tellement compliqués, qu'ils deviennent impraticables même pour des systèmes d'équations en petit nombre & peu élevées. Ensuite, on s'est aperçu que l'équation résultante, à laquelle on parvient par des éliminations successives, est d'un degré plus élevé qu'elle ne devoit être, qu'elle a dans ce cas des facteurs inutiles à la solution du problème proposé, des racines qui ne satisfont point au système d'équations que l'on considère.

Il est donc très-important d'avoir d'abord un moyen de connoître, par l'inspection du système d'équations, quel doit être le degré de l'équation résultante, & ensuite d'obtenir cette équation débarrassée de ces facteurs inutiles.

Cette recherche est d'autant plus intéressante, que son utilité ne se borne point, comme on pourroit l'imaginer, à faciliter, à rendre plus sûre la solution des problèmes particuliers que l'on peut se proposer. Il y a un grand nombre de questions d'Analyse, pour lesquelles il suffit de connoître, *a priori*, le véritable degré d'une équation résultante, & dont la solution a pour objet de connoître non la valeur des inconnues, mais certaines propriétés dépendantes de la forme des équations qui les déterminent ; c'est pour cela qu'il ne suffit pas de connoître le degré de l'équation résultante d'un système d'équations, dont chacune renferme tous les termes, mais qu'il peut être très-utile de connoître ce degré pour un

système d'équations, où certains termes manquent suivant un ordre systématique qu'on peut supposer.

Telle est la première question que M. Bezout se propose, & il prouve rigoureusement, par une méthode nouvelle, qui lui appartient, que l'équation résultante ne doit monter jamais au-dessus d'un degré égal au produit des degrés de toutes les équations du système: il applique cette méthode à plusieurs systèmes d'équations assujettis à certaines conditions, il fait voir pourquoi, dans les différentes hypothèses qu'il considère, l'équation résultante doit toujours s'abaisser, & il fixe les limites de cet abaissement.

Il s'occupe ensuite de la recherche des moyens les plus simples pour trouver cette équation résultante; on connoît le degré qu'elle doit avoir, il ne s'agit donc plus que d'en déterminer les coefficients. Il réduit cette recherche à l'élimination d'un certain nombre d'inconnues renfermées dans un système d'équations du premier degré. On avoit, il y a déjà long-temps, des formules générales pour ce cas, mais ces formules avoient l'inconvénient d'être beaucoup trop compliquées, & de présenter même quelques difficultés dans leur application aux systèmes, où les équations n'avoient pas une forme symétrique: M. Bezout a donc été obligé de chercher une autre méthode; celle qu'il propose, est aussi simple & aussi commode, que la nature du problème le permet.

Cette méthode a un avantage important, sur lequel nous croyons devoir insister, elle réduit à des opérations qui ont une forme régulière, la plus grande partie des calculs qui exigent la solution des problèmes particuliers; il suffiroit donc de se familiariser avec ces opérations, de chercher des moyens de les abrégier, ou d'apprendre par l'habitude à les faire avec rapidité, pour se mettre en état de résoudre complètement une foule de problèmes que la longueur excessive des calculs a obligé de résoudre par des méthodes indirectes.

Nous ne suivrons pas M. Bezout dans tous les détails d'une théorie qu'il a portée beaucoup plus loin qu'aucun
des

des Analistes qui l'ont précédé, nous nous bornerons à observer qu'elle est aussi simple que générale; l'idée très-ingénieuse de produire l'équation résultante, en ajoutant entr'elles toutes les équations du système, multipliées par des facteurs indéterminés, & l'application heureuse à l'art des éliminations de quelques Théorèmes nouveaux sur le calcul des différences finies, tels ont été les fondemens de tout l'édifice, dont les détails offroient d'ailleurs à chaque pas, des difficultés qui ne pouvoient être levées que par une main très-habile.

Il ne nous reste qu'à répondre à ceux qui demanderoient à quoi sert un Traité sur l'élimination; nous avouerons sans peine qu'il n'a point une utilité immédiate, mais presque aucune théorie dans les Sciences n'a cet avantage. Un Sauvage, en voyant une maison qui n'est pas encore au premier étage, pourroit regarder comme un amusement inutile, la peine que l'on prend pour élever perpendiculairement cette masse de pierres, il ne comprendroit point quel peut être l'objet de ces fondations creusées si avant, & avec tant de peine; l'utilité de chaque partie n'existe que par son rapport avec le but général de tout l'édifice, qu'il ne peut saisir d'avance dans ces premiers élémens qui frappent ses regards; mais le même homme verra au premier coup-d'œil, l'utilité d'un meuble de peu d'importance; dira-t-on que l'art de former ce meuble, est au-dessus de l'art d'un Architecte? Il en est de même de toutes les Sciences. Ce ne sont pas les travaux immédiatement applicables à la pratique, qui ont l'utilité la plus réelle, la plus grande, la plus durable, qui exigent le plus d'efforts, & qui méritent une plus grande reconnaissance; car ce n'est pas seulement sur l'utilité actuelle qu'elle doit se mesurer, mais sur l'utilité de tous les temps, sur les efforts que ces grandes théories ont dû coûter, sur le petit nombre d'hommes dont on peut espérer de tels efforts & de tels services. Il faut songer, non à l'utilité particulière qui peut résulter de telle découverte, de tel traité, mais à celle qui

Hist. 1779.

F.

42 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE

résultera un jour des progrès de la Science dont ce traité, cette déconverte sont des élémens nécessaires, & compter parmi nos Bienfaiteurs, ceux qui ont fourni ou arrangé quelques matériaux de cet édifice immense qui s'élève pour d'autres générations.

LES Mémoires présentés à l'Académie en 1779, & qu'on a jugés dignes d'être imprimés dans le Recueil des Savans Étrangers, sont au nombre de vingt-deux :

Sur les Apocins : Par M. Desfontaines.

Sur le Phosphore tiré des os : Par M. Nicolas.

Sur les Orties de mer : Par M. Vastel.

Sur l'Éclipse de Soleil du 24 Juin 1778 : Par M. Méchain.

Sur l'opposition de Jupiter : Par le même.

Sur le *Periploca* : Par M. Descemet.

Sur les Apocins : Par le même.

Sur la famille des Plantes à fleurs composées : Par M. Desfontaines.

Sur le genre des *Cedrus* & des *Juniperus* : Par M. Descemet.

Sur la *Tremollia* : Par le même.

Sur le *Berberis* : Par le même.

Sur l'analyse du Seigle ergoté, & sur ses effets : Par M. l'abbé Teflier.

Sur les *Protea*, ou Arbres-d'argent : Par M. Desfontaines.

Sur quelques nouveaux genres de Plantes : Par le même.

Sur le mouvement des étamines du Seigle : Par M. l'abbé Teflier.

Sur les maladies du Blé : Par le même.

Sur la Comète de 1779 : Par M. Méchain.

Sur la liquation du Cuivre : Par M. Duhamel, Correspondant de l'Académie.

Observations Astronomiques : Par M. Garipuy, Correspondant de l'Académie.

Sur la rotation du Soleil : Par M. Charles.

Observations d'Éclipses de Soleil & de Lune : Par M. d'Agelet.

Sur le Calcul Intégral : Par M. Charles.

Sur un accident occasionné par des vapeurs méphitiques ; Par M. Marcorèlle, Correspondant de l'Académie.

Sur les Éclipses de Lune : Par M. Wallot, Correspondant de l'Académie.

Nous avons oublié de faire mention, dans la liste des Mémoires approuvés en 1777, d'un Mémoire de M. Marcorèlle, sur des Météores extraordinaires.





ÉLOGE

DE M. DE JUSSIEU.

JOSEPH DE JUSSIEU, Associé de l'Académie des Sciences, Docteur en Médecine de la Faculté de Paris, naquit à Lyon, le 3 Septembre 1704; il étoit frère de M.^r Antoine & Bernard de Jussieu, & le dernier de seize Enfans. Cette famille nombreuse a donné dans le même temps trois Botanistes à l'Académie, illustration unique jusqu'à présent dans l'histoire des Sciences.

Formé par ses frères plus âgés que lui, & qui étoient déjà célèbres dans la Botanique, lorsqu'il ne faisoit que sortir de l'enfance, son premier penchant le portoit à suivre la même carrière; cependant il étoit né avec une de ces imaginations vives qui, lorsqu'elles sont jointes à un esprit juste, & à un cœur droit, peuvent rendre inconstant dans la jeunesse, mais ne laissent plus dans l'âge mûr qu'une activité utile: abandonnant bientôt son premier projet, il quitta l'étude de la Botanique pour celle des Mathématiques, & la profession de Médecin pour l'état d'Ingénieur. Il acquit alors des connoissances que souvent dans la suite, il eut occasion d'employer, & que peut-être on devroit regarder comme un préliminaire essentiel dans toutes les Sciences naturelles, soit parce que dans chacune il se présente des questions où l'application de ces connoissances est nécessaire, soit parce que ces mêmes connoissances donnent à ceux qui les cultivent, l'habitude d'être plus difficiles sur les définitions & sur les preuves. A mesure que les Sciences se sont étendues, leur distinction a été plus absolue, & leur limites plus marquées; mais il seroit peut-être aussi nuisible à

leurs progrès, de trop les isoler, que de trop les confondre. Après cette diversion qui fut très-courte, M. de Jussieu revint à des occupations vers lesquelles il se sentoit rappelé, parce qu'elles lui étoient communes avec des frères qu'il chérissoit.

En 1735, il fut choisi, comme Botaniste, pour accompagner au Pérou les Astronomes de l'Académie; il les suivit dans ce voyage célèbre, profitant des relâches les moins longues pour envoyer à ses frères les plantes & les graines qu'il recueilloit. Arrêté plus d'une fois par des maladies courtes & violentes, il s'en relevoit pour se livrer avec une ardeur plus grande aux fatigues qui les lui avoient causées; il n'avoit qu'une seule crainte, & ne voyoit qu'un danger, celui de quitter un pays sans l'avoir observé.

A la vérité l'amour des Sciences n'étoit pas la seule passion qui l'animât; on voit par ses Lettres, que l'idée du plaisir qu'il préparoit à ses frères, par chacun de ses envois, eût suffi pour lui faire tout risquer & tout supporter.

Les Astronomes virent avec quelque surprise, que le Botaniste qu'on leur avoit associé, étoit en même temps un Mathématicien éclairé, capable de concourir avec eux aux opérations astronomiques. M. Bouguer a dit, après son retour, qu'aucun de ses Coopérateurs ne lui avoit été plus utile que M. de Jussieu; M. Bouguer alloit même plus loin, mais il avoit eu à combattre, dans ses Confrères, quelques prétentions très-excusable sans doute, si on songe qu'il étoit bien naturel d'être jaloux d'une gloire qui avoit tant coûté; & il n'avoit trouvé dans M. de Jussieu que de la docilité & du zèle.

Pendant le temps employé aux travaux astronomiques, M. de Jussieu observa les différentes espèces d'arbres qui donnent le quinquina, les caractères botaniques qui distinguent chaque espèce, le degré de vertu de chacune, les arbres dont on mêle frauduleusement l'écorce avec celle du quinquina, il apprit aux habitans mêmes du pays à employer cette écorce avec méthode, à en reconnoître les différentes

espèces, à en tirer la matière extractive : lui-même prépara une quantité considérable d'extrait de quinquina, pour l'envoyer à ses frères. Cet extrait s'est trouvé plus efficace que celui qu'on prépare en France, & si, comme le croyoit M. de Jussieu, l'extrait peut dans tous les cas être substitué à l'écorce elle-même, peut-être il seroit utile que l'usage d'envoyer le quinquina sous cette forme s'établît dans le Commerce ; le transport seroit moins embarrassant, la vertu du quinquina s'altéreroit moins, & la fraude ne seroit vraisemblablement ni plus facile, ni plus dangereuse, ni plus embarrassante à reconnoître.

Cependant les Astronomes avoient rempli l'objet de leur voyage, & ils se préparoient à retourner en Europe. Sept ans de travaux pénibles eussent pu suffire au zèle de M. de Jussieu ; il eût revu une famille chérie, il eût joui de la gloire de ses recherches, mais il n'avoit vu encore que des contrées habitées par des Européens, défigurées par la culture, ou du moins parcourues avant lui par quelques Voyageurs, & il laissoit derrière lui des pays immenses, où une foule d'objets nouveaux devoient frapper les yeux du premier observateur qui oseroit y pénétrer, où la Nature seule avoit réglé la disposition des végétaux, & donné à la terre les plantes qu'elle devoit produire : il savoit que les découvertes y seroient plus faciles & moins glorieuses, que le voyage seroit plus pénible ; mais il voyoit aussi qu'à chaque pas il pouvoit espérer ou le plaisir de voir une chose nouvelle, ou la satisfaction de faire une observation utile. M. de Jussieu ne put se résoudre à quitter le Pérou sans avoir parcouru ces contrées inconnues : la difficulté de tirer des secours de l'Europe n'étoit pas un obstacle pour lui ; il étoit Médecin, & un Médecin françois étoit regardé dans ces pays, à peu-près comme dans l'ancienne Grèce on regardoit cette famille des rois de Carie, long-temps dépositaire presque unique des secrets de la Médecine, & à laquelle un peuple enthousiaste dans sa reconnoissance, avoit supposé une origine céleste. L'admiration pour M. de Jussieu eut une manière de s'exprimer

bien différence de celle des anciens Grecs : il reçut une défense absolue de sortir jusqu'à la fin d'une maladie épidémique dans laquelle on avoit eu besoin de son secours ; on décerna des peines contre quiconque favoriseroit son évasion ; on promit une récompense à celui qui l'arrêteroit s'il passoit la frontière. Ces précautions honorables & tyranniques étoient bien inutiles, on eût pu s'en reposer sur son zèle pour l'humanité. Si cette partie du voyage de M. de Jussieu a été perdue pour la Botanique, elle servira du moins à l'histoire de la Médecine ; on a trouvé dans ses papiers, des détails intéressans sur la marche de la petite vérole au Pérou, sur les maladies épidémiques de ce pays, sur une maladie singulière qui suivit une éruption du Cotopaxi, & à laquelle on donna le nom de ce volcan.

Retenu, & par les fonctions de Médecin, & par plusieurs maladies violentes auxquelles il ne put échapper, M. de Jussieu ne commença ses nouveaux voyages qu'en 1747 ; c'est alors qu'il parcourut plusieurs pays sauvages & inhabités : il falloit traverser des lacs immenses sur de petits bateaux de jonc, passer des torrens sur des ponts de corde de cent pieds de long ; ailleurs, de longues pièces de bois, appuyées sur les bords de la rivière, & sur des rochers placés au milieu & beaucoup plus bas que les rives, composoient un pont formé de deux plans inclinés très-rapides : d'autres fois, le pont étoit fait de bateaux de jonc, recouverts par des fascines, & supportés par des cables du même jonc, étendus d'un bord du torrent à l'autre. M. de Jussieu nous a laissé des dessins de ces ponts, monumens hardis de l'industrie d'un peuple ingénieux & sauvage.

Il fut obligé de gravir sur des rochers qui servent de retraite au reste des anciens habitans du pays, à qui on donne le nom de *Rebelles*, parce qu'ils défendent leur indépendance naturelle, & qu'ils traitent en ennemis, les Européens & leurs esclaves ; mais ils respectèrent M. de Jussieu, comme s'ils eussent senti que, ministre de paix & de lumière, occupé de chercher des remèdes à des maux

communs à tous les hommes, il étoit le compatriote & l'ami de tous les peuples.

Il parcourut des déserts où la rigueur du froid a détruit toute végétation, réduit à vivre de biscuit & de fromage sec; abandonné & dépouillé par les domestiques, peut-être ne dut-il la vie qu'à l'indulgence excessive avec laquelle on traite les voleurs au Pérou, ils auroient eu tout à risquer & peu à gagner, en se débarrassant par un crime de plus, d'un dénonciateur & d'un témoin: enfin seul au milieu de ces déserts, il perd subitement la vue: cet état horrible ne dura qu'un jour, mais qui peut apprécier la longue & terrible durée d'un tel jour?

C'est à travers tant de fatigues & de dangers, que M. de Jussieu parvint à un pays fertile, riche en plantes jusqu'alors ignorées de l'Europe; mais à peine les a-t-il recueillies, qu'il se livre à de nouveaux dangers, il marche au milieu des précipices dans un pays inhabité, où il découvre les restes immenses des forteresses que les Incas opposoient aux incursions des Sauvages. Ces vastes contrées étoient devenues désertes, placées près du Paraguay, toute communication leur étoit interdite avec ce pays, où l'on croyoit alors que les Jésuites avoient fondé un empire, & où ils n'avoient réellement établi que des couvens & des comptoirs: de-là il passe à la province de Losmoxos, traversant des pays marécageux & brûlans, dévoré par le Soleil, & plongé dans la fange jusqu'aux genoux, vivant de millet & de maïs, forcé de passer la nuit sur les arbres, & d'abandonner la terre aux reptiles: enfin, après avoir vu tout ce que les provinces éloignées des côtes pouvoient lui offrir d'objets nouveaux, il se retrouva en 1750 au Potosi.

La plus grande partie des découvertes faites dans ces voyages, est perdue pour nous; nous ne pouvons en présenter que quelques fragmens, bien propres à augmenter nos regrets.

M. de Jussieu décrivit l'espèce de canelle qui croît sur les montagnes du pays de los Canelos, il ramassa dans une
des

des vallées des Cordilières, l'hélyotrope odorant & la pervenche naturalisée depuis parmi nous ; il visita plusieurs mines d'argent, observa & décrivit les procédés employés dans la mine de mercure de Guancavelica. Il examina la montagne de Pumacanche, qu'il croit entièrement formée d'aimant, ainsi que les montagnes voisines. Il observa des sources d'eau chaude, qui s'élancent des montagnes glacées de Tunguraga & de Vilcanose. Il trouva dans les montagnes du Pérou, ces ossemens immenses, étrangers au sol où ils sont déposés, & que la Nature a semés dans les entrailles de la terre, comme des monumens de ces temps où la mémoire des hommes ne peut atteindre ; mais il observa une hauteur au-dessus de laquelle ces productions animales ne se trouvent plus ; c'est-là que l'empire de la mer a ses limites, ou du moins c'est-là qu'il ne reste plus de vestiges de son empire. Il se procura sur les bords du lac Chicuito, une collection nombreuse de différentes espèces d'oiseaux aquatiques, nouvelles pour nous. Il observa dans la province de los Yungas, le coca, cette plante si nécessaire aux Péruviens enchaînés dans les mines, ressource que la Nature avoit mis en dépôt dans ces contrées, comme une consolation & un soutien contre les maux que cause à leurs habitans la dureté des Européens. Ces victimes de l'avarice mâchent sans cesse les feuilles de cette plante, séchées & saupoudrées de cendre de quinoa ; ces sucs restaurateurs soutiennent leurs forces, relèvent leur ame abattue par l'oppression, & leur donnent le courage de supporter le travail & la servitude.

M. de Jussieu ne se borna point à l'histoire naturelle, ou plutôt il chercha à compléter son travail, en y ajoutant la carte des pays qu'il avoit vus. En parcourant ses Journaux, dont nous ne donnons ici qu'une foible esquisse, on sent que si aucune partie de ses travaux n'eût été perdue, il nous eût fait connoître le Pérou mieux que nous ne connoissons encore plusieurs parties de l'Europe.

Arrivé dans le Potosi, M. de Jussieu, qui cependant sentoit déjà les premières atteintes des infirmités dont il a

Hist. 1779.

G

été la victime, non-seulement y pratique la Médecine, mais il l'enseigne aux Médecins Espagnols & Péruviens; il leur apprend à connoître les vertus des Plantes, lève les Cartes de la province, examine les mines, réforme les travaux publics, enfin on ne lui permet point de partir qu'il n'ait rétabli un pont nécessaire à la communication du pays, & ruiné depuis vingt ans; c'étoit pour la seconde fois qu'il éprouvoit la même violence, & qu'on récompensoit son talent & son zèle par la perte de sa liberté. Le Botaniste redevient ingénieur, il reconstruit le pont, forme des digues qui doivent retenir le fleuve grossi par des torrens, rétablit des chemins. Ainsi dans les premiers âges des Nations, tous les Arts, toutes les Sciences appartenoient à un seul homme. Une pyramide élevée aux dépens du public, atteste la reconnaissance du pays pour M. de Jussieu, & la violence qu'on lui avoit faite, violence dont cette pyramide étoit une sorte de réparation, car ceux qui peuvent tout, croient trop aisément que par des marques d'honneur ils peuvent aussi compenser ou réparer une injustice.

Quatre années furent employées à ces travaux. Le Gouverneur du pays, M. de Xauregui qui logeoit chez lui M. de Jussieu, lui avoit des obligations personnelles du soin qu'il avoit pris de sa famille, il le retint un an, le flattant de l'espérance de le ramener bientôt sur les côtes, & de le conduire en Europe. Cette année écoulée, M. de Jussieu revint avec M. de Xauregui à Lima, par une autre route que celle qu'il avoit prise en quittant cette ville, & y arriva vers la fin de Décembre 1755.

Il n'aspiroit d'abord qu'à retourner dans sa patrie; sa santé étoit affoiblie, & son courage commençoit à l'abandonner; M. de Xauregui partit sans lui, soit qu'il ne voulût pas exposer M. de Jussieu aux fatigues du voyage, par le cap Horn, soit qu'il désirât laisser auprès de sa femme un Médecin habile, & nécessaire à sa santé. M. de Jussieu, resté à Lima, ne recevant de sa patrie aucun secours, privé de ses appointemens comme si, en s'obstinant à rendre son travail plus

complet, il eût mérité d'en perdre la récompense, fut obligé de se livrer de nouveau à la pratique de la Médecine. La Géométrie, seule étude *qui le satisfît par l'évidence de ses démonstrations* (ce sont les termes) occupoit le reste de son temps; il ne voyoit plus dans la Botanique, qu'une Science à laquelle il avoit sacrifié sa santé & sa fortune, qui ne l'avoit pas même récompensé par la gloire, de ce qu'elle lui avoit coûté; le plaisir de soutenir la passion plus constante & plus heureuse de ses frères, auroit soutenu son courage; mais on lui mandoit souvent, que ses envois de graines & de plantes avoient été perdus. Enfin il apprit la mort de son frère aîné, cette nouvelle le consterna. *Je ne puis penser à lui, écrivoit-il, sans que mon sang ne se gèle, & que mon cœur ne se couvre d'un voile noir; ce n'est point un frère, c'est mon père que j'ai perdu.*

Vers 1761, le départ de M.^{de} Xauregui que la santé de M. de Jussieu ne lui permit pas de suivre, mit le comble à ses maux; il devint sujet à de fréquens vertiges, la mémoire s'affoiblit; il continuoît cependant de voir des malades, fuyant les Grands, dont la confiance inquiète & exigeante lui paroissoit un esclavage, préférant les Pauvres, donnant l'exemple du désintéressement dans des pays, où le seul amour de l'or attire les Européens: consumé du regret de vivre loin de sa patrie, & manquant de courage pour vaincre les obstacles qui le retenoient, ne pouvant supporter l'idée de rester au Pérou, & ne voyant qu'avec effroi les dangers & la fatigue du retour; conservant sa générosité & ses vertus, mais trop foible pour se défendre contre ceux qui ne craignoient point d'en abuser; encore utile aux autres, & devenu inutile à lui-même: enfin ses véritables amis sentirent combien son départ devenoit nécessaire, ils y déterminèrent, & il quitta Lima, où ce départ fut regardé par le peuple comme un malheur public. Cet homme qui avoit été pendant vingt ans le bienfaiteur du pays où il avoit vécu, fut obligé d'emprunter pour subvenir aux frais de son voyage.

Sa tête avoit perdu son activité & ses forces, son ame étoit épuisée, mais sa raison étoit saine encore. Le voyage rétablit sa santé, mais sa tête s'affoiblit de plus en plus; il revint à Paris en 1771, après trente-six ans d'absence, retrouver son frère, le reconnoître & pleurer dans ses bras. Il savoit encore qu'il avoit un frère & qu'il l'aimoit, mais ce fut la seule chose dont il eût conservé le souvenir, ou plutôt le sentiment; ses découvertes, ses vues, ses travaux, le fruit de quarante années consacrées aux Sciences, ses chagrins, ses malheurs, tout étoit effacé de sa mémoire. Un frère malheureux, reçu dans une famille vertueuse, un martyr de la Botanique, recueilli dans une maison qu'on pourroit appeler le sanctuaire de cette Science, fut traité avec le respect qu'on devoit à son malheur & à la cause de ce malheur; on lui prodigua les soins, ils furent inutiles. Il vit mourir ce frère qu'il avoit tant aimé, mais il étoit devenu incapable de sentir la perte, & par une espèce de compensation dont il faut rendre grâce à la Nature, son état lui épargna du moins le sentiment de cette dernière infortune. Ses neveux, à qui il restoit seul, lui donnèrent toutes les marques de tendresse qu'il pouvoit recevoir, ils cherchoient à prolonger, à adoucir sa vie, à conserver long-temps les restes respectables d'un vieillard, qui assez malheureux pour avoir perdu jusqu'au souvenir de ce qu'il avoit été, méritoit que les autres en gardassent la mémoire.

Il recevoit ces secours avec une sensibilité & une douceur touchante; privé de la mémoire, incapable de sentir combien il avoit de droits à tout ce qu'on faisoit pour lui, les soins de chaque jour lui paroissoient un nouveau bienfait auquel il répondoit chaque jour par une reconnaissance nouvelle, & l'état où il étoit tombé, lui avoit laissé son caractère, naturellement doux & sensible. Bientôt sa vie ne fut plus qu'un assoupissement continuel, ses membres se retirèrent, & il mourut de la gangrène, après huit jours de souffrances, le 11 Avril 1779, âgé de plus de soixante-quatorze ans.

Telle fut la fin de quarante ans de travaux, & de quinze ans de malheurs.

M. de Jussieu avoit été fait Adjoint-Botaniste de l'Académie en 1743, lorsqu'il étoit au Pérou : en 1758 on le nomma Associé-vétérane, à cause de sa longue absence. Son état, à son retour, ne lui permit point de paroître à nos Assemblées, & par une singularité unique, il fut Académicien pendant trente-six ans, sans avoir jamais paru à l'Académie ; il a consacré aux Sciences sa vie entière, & n'a pas même publié un seul Mémoire.

M. de Jussieu son neveu, croit devoir à la mémoire de son oncle, de donner un Journal détaillé de son voyage, de publier ceux de ses travaux que les naufrages & les accidens ont épargnés ; c'est-là qu'on pourra juger de tout ce qu'on a perdu, & qu'on verra combien d'estime & de reconnoissance on devoit à cet homme, oublié, maltraité même pendant sa vie, & qui a fait aux Sciences & à l'humanité, le sacrifice le plus entier peut-être dont les Annales des Sciences puissent s'honorer.





ÉLOGE

DE M. LE COMTE D'ARCI.

PATRICE D'ARCI, Pensionnaire-Géomètre de l'Académie des Sciences, Maréchal des camps & armées du Roi, Chevalier de l'Ordre de Saint-Louis, & Commandeur de l'Ordre de Saint-Lazare, naquit à Gallowai en Irlande, le 27 Septembre 1725, de Jean d'Arci & de Jeanne Linch, fille de Robet Linch, Chevalier-Baronnet.

Les Comtes d'Holderness en Angleterre, dont le nom est d'*Arci*, regardent la famille des d'Arci d'Irlande, comme issue de la même souche que la leur, & sortie d'un second mariage de Jean d'Arci, Lord-justicier d'Irlande, sous Édouard III. La Maison d'Arci, comme les autres Maisons angloises, dont le nom est françois, & dont la source est inconnue, fait remonter son origine à l'un des Chevaliers normands qui suivirent en Angleterre Guillaume le Conquérant. Nous ne nous arrêtons point sur ces détails, bien peu importants aux yeux d'une Compagnie savante, où les Ouvrages sont tout, & où les titres ne sont rien : mais les Confrères de M. le Comte d'Arci peuvent voir avec intérêt que la France a quelque droit de le revendiquer sur l'Irlande.

Ses parens, à la fois Jacobites & Catholiques, étoient opprimés, à ce dernier titre, sous des loix cruelles, indignes de la sagesse & de l'humanité des loix angloises, mais qu'une fausse politique avoit cru nécessaires dans le siècle dernier : ils avoient mieux aimé renoncer à leurs droits, qu'à la fidélité qu'ils avoient vouée à leur religion & à la famille des Stuarts,

La France est l'asyle naturel des Irlandois catholiques qui annoncent de l'activité & des talens, & que les loix de leur patrie condamnent à l'inutilité & à l'inaction. Le jeune d'Arci fut envoyé à Paris en 1739, auprès d'un de ses oncles; le hasard le plaça dans la maison où logeoit M. Clairaut le père; il devint son élève, & mérita bientôt d'être le disciple ou plutôt le compagnon d'étude de M. Clairaut le fils: c'étoit à l'époque où la France commençoit à reprendre dans les Sciences-mathématiques le rang qu'elle avoit perdu après la mort de Descartes & de Pascal, & qu'elle a su conserver depuis. M. d'Arci fit des progrès rapides: après trois ans d'étude, âgé seulement de dix-sept ans, il donna une nouvelle solution du problème de la courbe d'égale pression dans un milieu résistant: les ouvrages de la jeunesse de M. Clairaut avoient accoutumé à de plus grands prodiges; mais c'étoit beaucoup alors que de savoir à dix-sept ans les principes de la Mécanique transcendante & ceux du Calcul intégral, de mettre en équation un problème de Dynamique, & de construire une équation différentielle du troisième ordre, à laquelle la méthode de M. d'Arci l'avoit conduit: d'ailleurs, il joignoit à sa solution des remarques qui annonçoient une sagacité dont il donna des preuves plus certaines dès l'année suivante, par la solution d'un nouveau problème, solution qui obtint également les suffrages de l'Académie. Il s'agissoit de déterminer la courbe que décrit dans l'espace un corps pesant qui glisse par son poids le long d'un plan mobile, en même-temps que la pression de ce corps fait mouvoir horizontalement le plan qui le porte; à la vérité, ce problème avoit été résolu par M.^{rs} Jean Bernoulli & Clairaut; mais dans la solution qu'en donne M. d'Arci, par une méthode qui lui est propre, on aperçoit déjà l'empreinte de son talent, & même de ce caractère original qui se retrouve dans toutes ses productions.

La guerre vint alors enlever aux Sciences M. le Chevalier d'Arci (c'est le nom qu'il prit en entrant au Service, & que nous lui conserverons dans cet Éloge, parce que c'est celui

sous lequel il a publié tous ses ouvrages) il fit, comme Capitaine dans le régiment de Condé, deux campagnes en Allemagne, & une en Flandre: en 1746 il fut destiné à se joindre au secours que le Roi envoyoit au Prétendant, qui avoit débarqué en Écosse; c'étoit pour sa patrie, pour sa famille, pour les droits de celui qu'il regardoit comme son Prince, que M. d'Arci alloit combattre; son espérance fut trompée, une flotte angloise enleva le convoi; on avoit espéré qu'il échapperait à la faveur de l'obscurité, mais il fut découvert par l'amiral Knowles, à l'aide d'une lunette de nuit, instrument qui commençoit alors à être connu en Angleterre. Né en Irlande, M. d'Arci avoit été pris en portant les armes contre le Gouvernement de sa patrie, la loi le condamnoit, mais l'humanité, la justice & la politique engagèrent à le traiter comme un Officier françois.

Les infortunes du Prétendant n'avoient pu rien changer à ses droits; non-seulement M. le Chevalier d'Arci continua de le regarder comme le fils & l'héritier de son Souverain, mais il conserva le même attachement pour la personne du Prince Édouard. Il défendoit les vertus ou les talens qu'il avoit cru voir en lui, avec le même zèle qu'il avoit défendu ses droits à la Couronne d'Angleterre: il avoit été prêt à répandre son sang pour le replacer sur le Trône de ses ancêtres, il eût soutenu, aux mêmes risques, qu'il étoit digne d'y remonter. Enfin, lorsque la France eut refusé un asyle à un descendant de Henri IV, lorsque Rome eut abandonné la cause d'un Prince, dont l'aïeul avoit perdu trois couronnes par son zèle pour la Religion Catholique, lorsque la voix publique jugeoit avec tant de sévérité un Prince malheureux, dont l'ame n'avoit pu résister à une si longue suite de revers, M. d'Arci ne fut point ébranlé.

La Maison des Stuarts, semble n'avoir été montrée au monde, que pour donner aux Rois une leçon du malheur & des dangers attachés à la Puissance souveraine; elle seule, parmi tant de familles détronées, a vu, dans l'espace de soixante ans, deux têtes couronnées tombant sous la hache
des

des bourreaux, par des assassinats revêtus des formes de la Justice. Mais aucune famille aussi n'a conservé plus longtemps après sa chute, des partisans si zélés. Il est impossible cependant d'attribuer ce zèle, ni à l'attachement pour la Religion Catholique qui avoit été le prétexte ou la cause des malheurs de Jacques II, puisque des Protestans de toutes les Sectes ont partagé ce sentiment; ni à des vues ambitieuses, puisque ce zèle a survécu à toute espérance raisonnable du rétablissement des Stuarts. On ne peut trouver la cause d'une fidélité si constante, que dans l'excès même des malheurs de cette Maison, dans la proscription terrible prononcée contre elle par la famille qui l'a remplacée sur le Trône: tant la persécution a de force pour attacher les ames généreuses à ceux qui en sont les victimes!

Ce ne fut qu'en 1749, après la paix, que M. le Chevalier d'Arci put entrer à l'Académie: la guerre ne lui avoit pas fait abandonner les Sciences; mais il avoit choisi dans la Géométrie le genre de travail qui étoit le plus compatible avec la vie active & agitée qu'il étoit obligé de mener. Dans son premier Mémoire, il avoit employé l'Analyse, depuis il préféra la Synthèse, méthode qui exige plus de méditations que de calculs, & plus d'efforts que de travail. M. d'Arci lut deux Mémoires à l'Académie, même dans le courant de la guerre, l'un en 1746, avant d'être pris par les Anglois; l'autre en 1747, après son échange: le premier renfermoit un principe général de mécanique, celui de la conservation du mouvement giratoire. Ce même principe avoit été donné en 1745; par M.^{rs} Daniel Bernoulli & Euler; mais il n'est pas vraisemblable que leurs ouvrages aient été cherchés par M. d'Arci dans les campagnes de Flandre; d'ailleurs, il suffit de voir comment chacun des Inventeurs a présenté ce même principe pour sentir que la méthode de M. d'Arci, est vraiment à lui, & qu'il n'y a rien de commun entre sa manière de traiter les questions mécaniques & celle de ces deux illustres Géomètres: enfin, ce principe ne s'applique immédiatement qu'aux mouvemens libres, & pour l'étendre aux mouve-

mens assujettis à des conditions, M. d'Arci employoit une méthode à la fois originale & simple, élégante & ingénieuse.

En 1750, il présenta son principe sous une autre forme, il l'appela *le principe de la conservation d'action*, pour l'opposer en quelque sorte au principe de la moindre action, auquel M. de Maupertuis étoit parvenu à donner une grande célébrité, & que M. d'Arci avoit attaqué dans plusieurs Mémoires. On sait quelles disputes ce principe produisit, combien elles furent inutiles aux progrès des Sciences, & affligeantes pour ceux qui s'intéressent à leur gloire. Nous n'entrerons point dans ces discussions qui ont cessé d'intéresser les Mathématiciens, & que nous croyons qu'on peut regarder comme absolument terminées, depuis qu'un Géomètre philosophe a fixé, avec autant de précision que d'impartialité, ce qu'on doit penser de la métaphysique de ce principe, dans quelques-uns des articles dont il a enrichi l'Encyclopédie.

M. d'Arci a employé son principe à la solution de plusieurs problèmes; parmi ceux auxquels il l'applique, on remarque le problème de la précession des Équinoxes, le plus difficile peut-être de l'Astronomie-physique, & celui dont la solution a contribué le plus à prouver la vérité de la loi générale découverte par Newton. M. d'Alembert avoit résolu le premier ce problème, plusieurs années auparavant, par une méthode directe qui embrasse la théorie générale des mouvemens des corps finis, quelle qu'en soit la figure. La vérité ne nous permet pas de dissimuler que les Géomètres s'accordent à trouver une erreur dans la nouvelle solution que M. d'Arci en a donnée; mais si on songe que les premiers Mathématiciens de l'Europe avoient inutilement tenté de résoudre ce problème, que Newton lui-même n'avoit pas été plus heureux que M. d'Arci; qu'enfin, depuis que le défaut de sa solution a été remarqué, de savans Géomètres en ont publié de nouvelles, où l'on a pu observer aussi des erreurs; alors, on sentira que celle qui est échappée à M. d'Arci n'affoiblit en rien les preuves multipliées que ses autres ouvrages ont données de sa sagacité & de ses talens.

Le principe de la conservation du mouvement giratoire, comme celui de la conservation des forces vives, comme celui de la moindre action, enfin, comme tous les autres principes du même genre, peut être sujet à quelques exceptions, ou plutôt à quelques modifications; le calcul en avertit, il indique, il corrige les erreurs où l'on pourroit tomber en donnant à ces principes une trop grande étendue; ainsi, ils peuvent toujours être employés comme des formules mathématiques. On sait avec quel succès M.^{rs} Bernoulli se sont servis de celui des forces vives, & quel heureux usage M.^{rs} Euler & de la Grange ont fait de celui de la moindre action, mais (ainsi que l'ont remarqué eux-mêmes ces illustres Géomètres) on se tromperoit en regardant aucun de ces principes comme une des loix invariables de la Nature: il faut remarquer encore que deux de ces principes, lorsqu'ils ne se réduisent pas à un seul diversément présenté, peuvent résoudre tous les problèmes de mécanique, mais qu'en général il est nécessaire d'en employer deux. Le principe lumineux & simple, donné par M. d'Alembert en 1742, est jusqu'ici l'unique qui puisse suffire seul à la solution des problèmes, parce qu'il est direct, & qu'il n'est pour ainsi dire que l'expression mathématique des notions premières & essentielles de l'action & du mouvement; il est aussi le seul, & par la même raison, qui puisse donner la démonstration de tous les autres, & qui nous fasse distinguer le sens dans lequel chacun d'eux peut être regardé comme vrai.

Lorsque M. le Chevalier d'Arci entra dans l'Académie, l'Électricité occupoit tous les Physiciens. Cette espèce de mode, qui fixe successivement les regards du public & les vues des Savans, sur les différentes parties des Sciences, sert à leurs progrès, quoiqu'elle soit plus souvent la suite que la cause des découvertes les plus brillantes: mais les découvertes brillantes laissent presque toujours entr'elles & les vérités qui les ont précédées, un vide qu'il faut remplir. Les Inventeurs ne saisissent pas toutes les conséquences de leurs découvertes, n'en développent pas tous les usages, & c'est

pour remplir ce vide, pour suivre ces conséquences, pour multiplier ces usages, que le concours de plusieurs Savans devient nécessaire.

L'Électricité agit sur les corps avec une force susceptible d'être assujettie au calcul, & pour analyser les phénomènes électriques, il étoit intéressant de mesurer cette force; il falloit donc chercher un électromètre. Les corps électrisés attirent ceux qui sont capables de recevoir d'eux l'électricité; deux corps doués d'une électricité contraire, s'attirent plus fortement encore; mais la force répulsive qu'exercent entre eux des corps qui ont le même genre d'électricité, & qui la reçoivent d'un même conducteur, paroît celle dont il est le plus facile de comparer les degrés d'intensité: elle fut employée dans la construction de l'électromètre que proposèrent M.^{rs} d'Arci & le Roi; car M. le Chevalier d'Arci fit ces expériences de concert avec M. le Roi, de cette Académie, Élève comme lui de M. Clairaut. Un goût commun pour la Physique avoit resserré cette liaison de leur jeunesse, qui a duré jusqu'à la mort de M. d'Arci. Après une amitié de vingt ans, tous deux se crurent des droits à une même place, & cette concurrence, qui auroit détruit peut-être sans retour une amitié commune, ne put altérer celle de M.^{rs} d'Arci & le Roi, même pendant le temps de la discussion; aucun des deux cependant ne parut songer à proposer le sacrifice de ses prétentions, bien sûr que son Concurrent n'eût pas voulu lui céder l'avantage de sacrifier ses droits à l'amitié.

M. d'Arci n'avoit pu faire la guerre sans réfléchir sur les parties de cet art auxquelles les Sciences qu'il cultivoit étoient plus immédiatement liées, & pendant la paix, il s'occupa de perfectionner la théorie de l'Artillerie.

La guerre est un fléau; mais c'est la guerre elle-même, & non l'art de la guerre, qui est funeste: à mesure même que l'art se perfectionne, les maux qu'elle enfante deviennent moins cruels; car, plus les succès dépendent de la science & du talent, moins les passions & la fureur multiplient les

massacres & la dévastation. Ainsi, en même temps que les progrès des lumières en morale rendront les guerres plus rares & moins acharnées, les progrès des lumières en physique les rendront moins sanglantes & moins destructives. Il est donc permis, sans blesser l'humanité, de louer des travaux qui ont pour objet la perfection d'un art destructeur. Il est permis de célébrer le génie qui crée de nouveaux moyens de défendre la Patrie, & de forcer à la paix ceux qui l'ont troublée; & l'on ne doit détester que la politique meurtrière qui fait de ces moyens de conservation & de tranquillité un instrument d'injustice & de destruction.

M. le Chevalier d'Arci donna un premier Mémoire sur l'Artillerie en 1750, continua long-temps ses expériences, & en rassembla les résultats dans l'Essai sur l'Artillerie, publié en 1760. L'Auteur trace, dans son Ouvrage, le plan d'une théorie générale de l'Artillerie, plan qu'il ne se propose pas de remplir en entier: il sentoît que cette théorie ne pouvoit être appuyée que sur des expériences nouvelles, & que ces expériences demandoient de nouveaux moyens.

Un des objets les plus importants, étoit la connoissance de la poudre. Il falloit déterminer, par des expériences exactes, quelle proportion dans les parties constituantes, quelle qualité de grain, quels procédés dans la manipulation, donnent à la poudre le plus de force: Il falloit savoir si la force qui est communiquée aux projectiles dépend de la promptitude avec laquelle la poudre s'enflamme: mais pour faire ces expériences on avoit besoin d'une éprouvette qui donnât des résultats précis, & il n'en existoit pas. M. d'Arci imagina de suspendre un petit canon à un pendule, & de juger de la force de la poudre par l'arc que le recul feroit décrire à ce canon: cet instrument, perfectionné depuis par lui-même, a été adopté par la Régie des poudres: il peut rendre sensibles de très-petites différences dans la poudre, aucune circonstance étrangère n'en altère les résultats; & pour juger de la supériorité d'une poudre sur une autre, on trouveroit difficilement un instrument plus sensible ou plus sûr.

Il résulte des expériences de M. d'Arci, que plus la poudre s'enflamme vite, plus elle a de force; que le mélange exact des matières & la sécheresse de la poudre, contribuent surtout à la rendre meilleure; qu'enfin de petites différences dans la manipulation, en produisent de bien plus sensibles dans les effets, que n'en font naître des changemens dans la proportion des matières, qui au premier coup d'œil paroîtroient bien plus importants.

M. d'Arci examine ensuite quelle différence la longueur des pièces du même calibre, tirées avec des charges égales, produit dans la vitesse du boulet; & quels sont les effets de différentes quantités de poudre employées à charger la même pièce. Pour mesurer la force des projectiles, il emploie un pendule contre lequel ces projectiles viennent frapper, & la grandeur des arcs décrits par ce pendule, donne les forces cherchées. Cette méthode que Robins a employée, est préférable à celle où l'on voudroit juger des forces par les portées, & M. d'Arci a rendu plus exacte la machine qu'il a imitée de Robins.

Ces expériences prouvent que plus on augmente la longueur des pièces, plus la force est augmentée; ou du moins, que pour de très-grandes longueurs, l'augmentation qui en résulte, surpasse de beaucoup & l'augmentation du frottement & celle de la résistance de l'air. Au contraire l'augmentation de force produite par une plus grande charge dans un canon de longueur donnée a des limites très-étroites.

La loi de la résistance que l'air oppose aux boulets, étoit un des objets les plus essentiels & en même temps le plus difficile de ces recherches. Robins avoit senti que si la loi qui donne la résistance proportionnelle aux quarrés des vitesses, a lieu, même pour les fluides élastiques dans de petites vitesses, elle cesse d'être juste & même approchée, lorsque les vitesses deviennent très-grandes. Il avoit fait pour déterminer la loi qu'il falloit substituer à cette ancienne loi, une suite d'expériences intéressantes, mais elles étoient bien loin de décider la question. Ce même objet a occupé

M. d'Arci jusqu'à la fin de sa vie; avec des instrumens meilleurs & un plan de recherches mieux combiné, il avoit des ressources mathématiques plus étendues que celles de Robins, mais il n'étoit point satisfait encore des résultats de ses expériences & de ses calculs; & cette sévérité pour lui-même, qui nous a privés du fruit de son travail, est une raison de plus pour en regretter la perte.

Attaché comme Colonel à la suite du régiment de Fitzjames en 1752, M. d'Arci fit avec ce Corps la campagne de 1757, & se trouva à la bataille de Rosbach. Ce régiment, trop affoibli par la perte qu'il essuya dans cette journée, fut obligé de revenir en France; M. d'Arci fut alors employé sous M. le Comte d'Hérouville, à qui l'on avoit confié les préparatifs d'une descente projetée sur les côtes de la Grande-Bretagne. L'examen que M. d'Arci avoit fait pendant la paix des côtes de l'Irlande, une connoissance exacte du caractère des habitans & de leurs dispositions, le poids qu'il pouvoit avoir auprès des restes du parti Jacobite & des Catholiques, que les précautions injurieuses prises contre eux avoient ulcérés sans les avoir rendus moins à craindre; son intrépidité, son audace, son éloquence naturelle, pleine de véhémence & d'action, ses connoissances dans toutes les parties de l'art militaire, enfin des ressources contre les accidens imprévus, ressources qu'on ne peut attendre que de ceux qui joignent à la pratique une théorie profonde, tous ces avantages sembloient rendre M. d'Arci non-seulement utile, mais même nécessaire, pour ainsi dire, au succès d'une expédition sur les côtes d'Irlande. Mais ce projet ne fut pas exécuté; le grade de Brigadier fut la récompense des travaux de M. d'Arci, & une foible consolation de l'inutilité de son zèle. La paix vint bientôt le rendre aux Sciences & à l'Académie; en 1765 il donna un Mémoire sur la durée des sensations de la vue, celui de ses ouvrages peut-être où l'on voit briller le plus & son talent pour imaginer des appareils qui conduisent à des expériences exactes & concluantes, & la sagacité avec laquelle il savoit

combiner & varier les expériences, pour en tirer des résultats certains & précis.

Un enfant, en agitant circulairement un charbon allumé, produit l'apparence d'une roue de feu; une roue dentée qui tourne, ne présente qu'un cercle continu; une corde sonore qui vibre avec rapidité, paroît un losange: ces effets sont connus de tous les temps,

Ils prouvent que nos sensations ont une durée plus grande que celle de l'action de leur cause; l'ébranlement produit dans l'organe, se prolonge après que le corps extérieur a cessé d'agir. Ce fait a lieu vraisemblablement pour tous nos sens, & c'est de cette circonstance que, peut-être, on pourra déduire un jour les loix de la composition musicale, si ces loix ont leur base dans la Nature; mais c'est sur-tout pour le sens de la vue que ce phénomène est sensible, parce que c'est le sens pour lequel nous pouvons le plus aisément nous assurer que l'action extérieure a cessé, & séparer la durée de la cause de celle de l'effet.

Personne n'avoit encore songé à soumettre ces observations au calcul, à déterminer la vitesse nécessaire pour produire ces apparences, & à mesurer par conséquent la durée de chaque impression instantanée: c'est l'objet que s'est proposé M. d'Arci. Il trouva que, pendant une nuit obscure, la sensation que produisoit un charbon allumé duroit environ huit tierces. Si on fait tourner un cercle où il n'y ait qu'une ouverture, & que derrière on place un flambeau, ce flambeau demeure toujours visible lorsque le cercle ne met que neuf tierces à faire la révolution; plus l'objet a d'éclat & d'étendue, en un mot, plus son impression sur l'organe est forte, plus la sensation a de durée, & moins il est nécessaire que le mouvement soit rapide.

C'est l'objet qui frappe le plus vivement nos yeux que l'on voit & qui dérobe la vue des autres. En effet, que l'on fasse passer, soit un corps plus visible devant celui qui l'est moins, soit un corps moins visible devant celui qui l'est plus, c'est toujours le moins visible qui disparoît, L'objet
qui

qui produit une sensation continue, quoiqu'il n'ait frappé les sens qu'un instant, fait une impression plus foible que s'il agissoit pendant tout ce temps sur l'organe; ou plutôt on a une sensation mixte qui, lorsque la différence de l'éclat est très-grande, ne paroît qu'un affoiblissement de la plus grande lumière, mais qui, si l'inégalité est moindre, est un véritable mélange des deux sensations.

Ainsi un corps peut passer devant nos yeux sans être vu, & sans marquer sa présence autrement que par l'affoiblissement de l'éclat des objets qu'il couvre.

Ainsi lorsqu'on fait tourner des cartons peints de jaune & de bleu, on n'aperçoit qu'un cercle continu de couleur verte. Ainsi les sept couleurs du prisme, en tournant rapidement, produisent un blanc-obscur, & d'autant moins obscur que le mouvement est plus rapide.

Comme cette durée de la sensation augmente avec l'éclat de l'objet, il auroit été intéressant de connoître suivant quelles loix l'augmentation de la durée suit celle de l'intensité de la lumière. On auroit pu chercher réciproquement de combien l'intensité de la lumière d'un objet que le mouvement rend continuellement visible, se trouve dégradée; mais de telles expériences offroient une difficulté presque insurmontable, & M. d'Arci en avoit éprouvé déjà beaucoup pour ses premières expériences. L'état de sa vue l'avoit obligé de se fier à d'autres yeux que les siens, & ces nouvelles recherches exigeoient une attention & une immobilité qu'il eût obtenues difficilement d'un observateur qui n'auroit été soutenu dans ce travail si pénible, ni par l'espérance de la gloire, ni par le plaisir de suivre ses propres idées.

L'esprit qui a conduit M. d'Arci dans ce travail, le guidoit également dans tous ses ouvrages de physique, on le voit toujours occupé de comparer à la théorie mathématique, les résultats des observations. Il cherchoit dans l'expérience les élémens sur lesquels le calcul doit s'exercer, & les fondemens

d'après lesquels la Géométrie peut conduire à la découverte des loix de la Nature. En même temps il se servoit des Mathématiques pour ne demander aux expériences que ce qu'on peut en attendre, & pour les forcer à ne rien refuser de tout ce qu'elles peuvent donner.

Tel est en particulier l'objet d'un Mémoire sur les machines hydrauliques, imprimé en 1754; Mémoire dans lequel M. d'Arci montre combien il est facile de s'égarer en cherchant par l'expérience les loix des effets susceptibles d'un *maximum* ou d'un *minimum*, & indique en même temps comment on peut former un système d'expériences qui, même dans ce cas, conduise à la découverte de ces loix.

On remarque également dans tous ses ouvrages, des vues ingénieuses & philosophiques; l'Auteur présente toujours ses recherches comme des essais qu'il se propose d'étendre & de perfectionner, mais le temps d'y mettre la dernière main lui manquoit. Il avoit l'ambition de son état, la seule ambition excusable, la seule qui puisse être utile. Son ardeur pour les Sciences ne s'étoit point affoiblie par les distractions auxquelles deux guerres l'avoient forcé, plusieurs même de ses travaux sont datés de l'époque de ces guerres; mais ces longues distractions lui avoient fait perdre l'habitude du travail, & l'habitude plus nécessaire encore de suivre long-temps un même objet & une même idée. Comme il voyoit les objets en grand, comme il vouloit porter dans ses expériences une précision rigoureuse, le défaut de temps, les bornes de sa fortune ne lui ont trop souvent permis d'exécuter qu'une foible partie de ce qu'il avoit conçu.

D'ailleurs M. d'Arci vivoit dans le monde, & avec une belle figure, une taille avantageuse, un caractère ardent, une ame active, il étoit difficile qu'il ne se laissât point entraîner à une dissipation dont sa constitution lui permettoit d'oublier la fatigue pour n'en sentir que les plaisirs; & l'emploi de ses talens pour les Sciences a dû souffrir quelquefois des autres avantages que la Nature lui avoit donnés.

En 1770, M. d'Arci devint Maréchal-de-camp & Pensionnaire de l'Académie; il parut alors s'attacher plus particulièrement à cette Compagnie, il la regardoit comme sa patrie, & comme une République où il vouloit être un citoyen considéré, mais seulement un citoyen. Les droits, & sur-tout la liberté de l'Académie, paroissoient son premier intérêt, l'apparence de la plus légère atteinte portée à ces objets sacrés pour lui, suffisoit pour exciter son indignation, il croyoit que la liberté valoit mieux encore que la paix; opinion républicaine qu'il est dangereux d'exagérer, & dont il seroit peut-être facile d'abuser, en l'appliquant au régime d'une Compagnie savante, où ce ne sont pas, comme dans les associations politiques les avantages des citoyens, mais les progrès des Sciences, qui doivent être le premier but de la société.

L'héritage d'un oncle que M. d'Arci avoit en France, & qui lui avoit servi de père, des récompenses militaires & des intérêts dans les mines, où il avoit fourni à la fois des fonds & des vues utiles, avoient augmenté sa fortune; il crut devoir la partager avec une nièce élevée à Paris sous les yeux, & dont il avoit long-temps observé avec intérêt l'esprit, le caractère & les vertus naissantes; il l'épousa en 1777, & prit alors le nom de Comte d'Arci: il étoit dans l'âge où la société générale offre à peine des distractions, où elle coûte plus qu'elle ne donne, & où tous les hommes qui ne sont dominés ni par l'ambition, ni par la passion de l'étude, sentent le besoin d'une société intime & domestique. En épousant sa nièce, M. d'Arci espéroit assurer leur bonheur mutuel; le mariage avoit resserré des liens déjà chers à tous deux; l'habitude de se voir & de s'aimer avoit fait disparaître la distance qu'auroit pu mettre entr'eux l'inégalité des âges; l'autorité d'un mari perdant ce qu'elle a d'imposant entre les mains d'un étranger, & douce comme l'autorité d'un père, ne devoit plus paroître un joug, mais un appui; enfin, dès les premiers momens de leur union, ils pouvoient se flatter d'éprouver le bonheur de cette con-

fiance intime, de cette amitié pure & inaltérable qui, dans les unions ordinaires, ne peut être que le fruit d'une tendresse constante, & qui en est la plus douce récompense. Cette union qui auroit dû être si heureuse dura peu, M. d'Arci mourut, d'un *cholera-morbus*, le 18 Octobre 1779, n'ayant vécu avec sa femme qu'assez de temps pour qu'elle apprît à sentir toute l'étendue de la perte qu'elle a faite.

M. d'Arci avoit des amis dans le monde, parmi les Militaires, dans l'Académie; s'il avoit eu un caractère liant & facile, on en concluroit seulement qu'il étoit aimable, & non qu'il fût digne d'être aimé; mais avec un caractère ferme, indépendant & facile à s'irriter, il ne put avoir des amis que parce qu'il sentoit le prix de l'amitié, qu'il en connoissoit les devoirs, & qu'il savoit la mériter.

Les Irlandois qui venoient chercher un asyle en France, trouvoient dans M. d'Arci un protecteur, ou plutôt un ami. Il partageoit avec eux la fortune, s'occupoit de leurs intérêts, suivoit leurs affaires avec chaleur, employoit pour eux le poids que lui donnoit sa réputation & le crédit de ses amis. Il consolait ou servoit l'infortune, défendoit ou appuyoit le talent, & ne protégeoit ni l'avidité ni l'intrigue, malheur où tombent si souvent ceux qui obligent, moins par bien-faisance, que par vanité ou par foiblesse.

On remarquoit en lui un penchant pour les Anglois, qui sembloit contraster avec l'ardeur qu'il avoit montrée contre l'Angleterre; c'est que la différence des Gouvernemens ne forme pas la différence des Nations. Une même langue, la ressemblance des mœurs & des opinions politiques, les mêmes goûts, le même amour de la liberté, font un seul peuple des Irlandois & des Anglois. En plaignant sa Nation opprimée par l'Angleterre, en détestant la domination des Anglois, M. d'Arci aimoit la nation Angloise, étoit fier de ses succès dans tous les genres, même de ses succès militaires, quoiqu'il les vît avec douleur. Les Grands-hommes, les Savans d'Angleterre étoient ses compatriotes; la consti-

tution Angloise, celle sous laquelle il eût préféré de vivre. le Prince seul étoit étranger pour lui. Ainsi M. d'Arci réunissoit, comme plusieurs de ses compatriotes, deux passions qui paroissent contradictoires, & qui ne sont que deux modifications d'un même sentiment, l'amour de sa patrie & des loix de son pays, avec la haine de son gouvernement.

Dans un voyage qu'il fit en Irlande en 1767, un de ses oncles lui offrit une fortune considérable s'il vouloit s'y établir; il la refusa, ne voulant pas habiter dans un pays libre en apparence, mais que par des formalités tyranniques l'Angleterre tenoit sous le joug, dans un pays où il eût fallu vivre privé des droits de citoyen, ou les acheter par un parjure. Il passa à Londres dans le même voyage: les Anglois le traitèrent comme un homme qui faisoit honneur à la Nation britannique, & qui, par son refus même de rester sous leur domination, avoit acquis un nouveau titre à leur estime: son nom cependant ne fut point inscrit dans la liste de la Société Royale, la Loi l'avoit pros crit; mais l'estime publique & la générosité de la Nation angloise protégeoient sa personne contre les attentats de la Loi. Ainsi, chez ce peuple si orgueilleux de sa liberté & de sa législation, il existe aussi des Loix auxquelles la raison & l'honneur défendent d'obéir.

La mort a frappé M. d'Arci précisément dans l'instant où la Nation irlandaise alloit reprendre, par son courage, une liberté que ses divisions & le fanatisme lui avoient fait perdre: il auroit vu les Ministres d'Angleterre forcés de reconnoître des droits qui appartiennent aux Irlandois, comme hommes plutôt encore que comme citoyens, & dont la justice ne permet pas à une Nation de priver un peuple sur lequel elle croit avoir le droit de régner: il auroit vu la conduite ferme & modérée de ses compatriotes forcer la Nation angloise à entendre assez bien les intérêts de sa puissance & de son bonheur, pour aimer mieux avoir des frères que des esclaves; & un peuple-roi, instruit par ses malheurs, donner, trop à regret peut-être, un exemple de justice à l'égard d'un

70 HISTOIRE DE L'ACADÉMIE ROYALE, &c.

peuple-sujet, exemple unique dans l'Histoire, & que l'Angleterre doit se repentir de n'avoir pas donné quelques années plus tôt. Cette révolution eût été pour M. d'Arci le jour le plus heureux de sa vie, mais le sort lui envioit cette consolation, & ses derniers regards n'ont pas vu la liberté de son pays.

La place de Pensionnaire-Géomètre, qu'occupoit M. d'Arci, a été remplie par M. l'abbé Bossut, déjà Associé dans la même Classe.



M É M O I R E S
D E
L'ACADÉMIE ROYALE
D E S S C I E N C E S .

MÉMOIRES



M É M O I R E S
 D E
 MATHÉMATIQUE
 E T
 D E P H Y S I Q U E,
TIRÉS DES REGISTRES
de l'Académie Royale des Sciences.

Année M. DCCLXXIX.

M É M O I R E
SUR LES LAINES DE FRANCE,
COMPARÉES AUX LAINES ÉTRANGÈRES.

Par M. D A U B E N T O N.

LES avantages du Commerce sont d'autant plus grands, Lû
à la Séance
de la
S.^e Martin,
1779.
 que l'on connoît mieux les choses qui en sont l'objet :
 l'appât du gain est un puissant aiguillon pour exciter l'industrie
Mém. 1779. A

2 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

des Commerçans; mais souvent l'industrie la plus subtile ne donne que des connoissances fautives, si elle n'est appuyée sur les principes des Sciences.

Il y a dans les productions de la Nature un degré de perfection qui est au-dessus de la portée de nos sens, & que nous ne pouvons apercevoir sans le secours des instrumens qui rendent nos yeux plus perçans : ces moyens sont absolument nécessaires pour distinguer avec précision les différences qui se trouvent entre les laines par rapport à leur finesse.

Le Commerçant qui a les meilleurs yeux & qui est le plus exercé dans le choix des laines, ne peut discerner si les filamens d'une laine superfine sont plus déliés que ceux d'une autre, lorsqu'il n'y a qu'une légère différence entr'elles : cependant cette petite différence influe beaucoup sur le prix de cette marchandise & sur la qualité des Étoffes que l'on en fait.

Tant que l'on n'aura pas un moyen sûr pour distinguer les différens degrés de la finesse des laines, on sera exposé à de grandes méprises sur celles que l'on vend, que l'on achette & que l'on emploie : on fera venir à grands frais des laines étrangères qui seront souvent inférieures à celles de son propre pays : le prix en sera toujours arbitraire ; le Manufacturier achettera au hasard des laines dont il ne connoitra la valeur qu'après les avoir employées ; la qualité de ses étoffes ne sera pas proportionnée aux prix de la laine.

Ces grands inconvéniens dans le Commerce, ne sont pas les seuls qui résultent du défaut de connoissance sur le degré de finesse des laines : il y en a un autre qui n'est pas de moindre conséquence. Faute de connoître les différences qui sont entre les laines super fines, on ne peut se conduire qu'à l'aveugle pour l'amélioration ou pour le maintien de cette production dans les troupeaux ; on ne sait si la laine des béliers que l'on donne aux brebis, les fera dégénérer ou les perfectionnera.

Cette incertitude m'auroit empêché de donner aux expériences que j'ai faites sur la production des laines autant de

précision que je le desirois : j'ai été obligé de mesurer le diamètre des filamens de la laine pour reconnoître & comparer leurs différens degrés de finesse ; j'ai pris cette dimension exactement par le moyen d'un micromètre , que j'ai fait tracer exprès pour cet usage sur une lame de cristal de roche , par la machine à diviser de M. Megnié.

Ayant observé , avec cet instrument appliqué au microscope , tous les échantillons que j'ai pu avoir des laines , non-seulement de France , mais aussi des pays étrangers , j'ai vu qu'il n'y a point de laine , même des plus grosses , qui n'ait des filamens très-fins , dont le diamètre n'est que la 560.^e partie de la ligne du pied-de-roi.

J'ai en même temps reconnu que les laines les plus fines ont des filamens dont le diamètre va jusqu'à la 140.^e partie d'une ligne. J'ai fixé à ce point le premier terme de la laine superfine , parce que je n'ai pu trouver aucune laine dont tous les filamens fussent plus fins ou qui n'en eût point d'aussi gros.

Toutes les laines ayant des filamens très-fins , on ne peut distinguer les différens degrés de la finesse & de la grosseur de la laine que par les filamens les plus gros : on les trouve facilement , car ils sont toujours à l'extrémité des flocons de la toison , que l'on appelle *mèches*.

Il n'y a qu'un 10.^e de ligne entre les côtés parallèles des carrés du micromètre dont je me sers pour mesurer le diamètre des filamens des laines ; il est placé au foyer de l'oculaire du microscope ; la lentille grossit quatorze fois ; par conséquent le diamètre d'un filament de laine qui est au foyer de cette lentille , & qui paroît occuper par sa largeur un carré entier du micromètre , n'est que de la 140.^e partie d'une ligne.

Toute laine dont les plus gros filamens ne remplissent par leur largeur qu'un carré du micromètre , est donc une laine superfine au premier degré , c'est-à-dire une des plus fines de toutes les laines que j'ai pu avoir. Cette connoissance étant acquise , j'ai fait les mêmes observations sur les laines les plus

4 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

grossières, & j'ai vu que la largeur de leurs filamens les plus gros occupoit jusqu'à six carrés du micromètre, qui valent la 23.^e partie d'une ligne.

Je dois faire remarquer ici qu'il ne s'agit que des filamens de vraie laine, & non pas de ceux du jarre, qui ne sont que des poils durs mêlés avec la laine: les plus gros de ces filamens remplissent jusqu'à onze carrés du micromètre, & leur diamètre est par conséquent la 12.^e partie d'une ligne. Il y a des jarres moins gros, & même d'aussi fins que des filamens de laine superfine; mais pour peu que l'on soit exercé à l'examen des laines, on reconnoît aisément le jarre.

Il ne suffisoit pas de connoître les termes extrêmes des laines les plus fines & les plus grosses, il falloit encore fixer des termes intermédiaires pour distinguer différentes sortes de laines par rapport à différens degrés de leur finesse & de leur grosseur pour l'emploi que l'on en fait dans les Manufactures.

On désigne ces différentes sortes par les dénominations de *laines superfines, fines, mi-fines, moyennes, mi-grosses & grosses*, mais on n'a aucune règle sûre pour les distinguer: ces dénominations varient très-souvent; la même laine, au même degré de finesse, est regardée comme fine dans un pays, & comme superfine dans un autre: cette incertitude occasionne beaucoup de méprises dans le Commerce, par ignorance ou par supercherie.

J'ai tâché de fixer toutes ces dénominations, en indiquant les degrés de finesse de la laine auxquels on peut les rapporter: cette division des laines en différentes sortes est arbitraire; elle n'a été imaginée que pour la commodité des Manufacturiers. La Nature ne produit pas ces différentes sortes de laines séparément les unes des autres, au contraire on en trouve plusieurs mêlées ensemble dans la même toison & dans la même mèche: il faut en faire le triage pour avoir les laines superfines, les laines fines, & d'autres sortes qui sont nécessaires pour différens emplois dans les Manufactures.

La division des laines en différentes sortes étant arbitraire, je me suis proposé d'en faire une qui fût d'accord, autant

qu'il seroit possible, avec les notions reçues parmi les Commerçans, & qui pût leur servir de guide dans leurs conventions.

J'ai fait voir qu'une laine est superfine au premier degré, lorsque le diamètre de ses plus gros filamens n'est que d'une 140.^e partie de la ligne : ce premier terme est certain par les preuves que j'en ai données ; mais quel est le dernier terme de la laine superfine ? à quel degré de finesse la laine doit-elle perdre le nom de superfin & prendre le nom de fin ?

Pour résoudre cette question, j'ai observé vingt-neuf échantillons de laines qui venoient de magasins & de manufactures où elles étoient regardées comme superfines. Ayant reconnu, par des observations soigneusement répétées, que les gros filamens de ces laines occupoient rarement plus de deux carrés du micromètre, j'ai fixé le dernier terme des laines superfines à celles dont les plus gros filamens remplissent par leur largeur deux carrés du micromètre, & dont le diamètre est de la 70.^e partie d'une ligne.

Après les laines superfines, j'en distingue quatre autres sortes, sous les dénominations de *laines fines*, de *laines moyennes*, de *grosses laines* & de *laines supergrosses*, ce qui fait en tout cinq sortes de laines depuis la plus fine jusqu'à la plus grosse.

Cette division est plus commode & plus exacte que celles qui ont été imaginées jusqu'à présent ; elle partage en cinq parties égales la différence qui se trouve réellement entre les laines les plus fines & les plus grosses.

Quoique les dénominations de *mi-fin* & de *mi-gros* soient en usage, je les ai supprimées, parce que j'ai reconnu, après plusieurs essais, que cette multiplicité de noms rendoit leur signification équivoque. Les cinq sortes de laine que je distingue s'accordent avec la progression de la Nature dans la production des laines, par rapport à leur finesse & à leur grosseur : celles que j'appelle *moyennes* le sont réellement, puisqu'elles correspondent au terme moyen entre les deux extrêmes des laines superfines & des supergrosses : les laines

finer & les grosses sont placées à égales distances entre les laines moyennes & les laines supergrosses & superfines. Voilà donc une nomenclature simple, exacte & applicable aux laines de tous les pays, sans qu'elle puisse varier, suivant les intérêts des Propriétaires, des Commerçans & des Manufacturiers.

Les laines de chaque sorte ont différens degrés de finesse ou de grosseur, puisque les diamètres des filamens qui indiquent leurs dénominations, varient de la 140.^e partie d'une ligne. Quoique cette différence paroisse peu considérable, elle est importante pour la valeur & le prix des laines : il faut nécessairement distinguer dans chaque sorte des laines de deux qualités différentes ; celles de la première sont les plus fines, & celles de la seconde sont les plus grosses.

Cette distinction est plus nécessaire pour les laines superfines & pour les laines fines que pour les autres, parce qu'elles sont d'un plus haut prix, & que l'on en fait des ouvrages où les différens degrés de finesse sont plus intéressans.

En admettant un plus grand nombre de sortes de laines, j'aurois pu supprimer la distinction de deux qualités dans chaque sorte, mais je serois tombé dans un grand inconvénient : j'aurois rendu la connoissance des laines fort équivoque, beaucoup plus difficile, & peut-être impossible pour les Bergers & les autres gens de la campagne, & pour la plupart des Marchands.

On ne peut se passer du microscope pour déterminer avec précision tous les degrés de finesse de la laine par les différentes grandeurs du diamètre de ses filamens, pour limiter les différentes sortes de laines, pour les faire connoître dans leur état actuel & montrer à la postérité les changemens qu'elles auront éprouvés dans les temps à venir : mais je suis fort éloigné de proposer à tous les Marchands, à tous les Propriétaires de troupeaux & aux Bergers, d'avoir des microscopes pour reconnoître les différentes sortes de laines ; il n'y a que les Commerçans & les grands Manufacturiers qui doivent se servir de cet instrument ; il leur sera très-utile,

& même absolument nécessaire, toutes les fois qu'ils seront obligés de connoître exactement le degré de la finesse des laines dans des cas importans à leur commerce ou à leurs fabriques.

Pour l'usage ordinaire, il suffiroit d'avoir des échantillons des cinq sortes de laines, qui auroient été vérifiés au microscope, & auxquels on compareroit les laines dont on voudroit connoître le degré de finesse ou de grosseur; une seule personne pourroit en peu de temps choisir & éprouver au microscope, un très-grand nombre de ces échantillons pour les distribuer par-tout où il seroit nécessaire.

De petits flocons de ces laines étant épars & appliqués sur un velours, ou sur un drap noir, on voit leurs rapports avec les laines dont on veut connoître la finesse ou la grosseur.

On pourroit aussi avoir pour objets de comparaison des fils d'argent trait, du même diamètre que les filamens des cinq sortes de laines; le métal auroit bientôt perdu son éclat, & prendroit une couleur approchante de celle de la laine. Je crois qu'il se fait du fil d'argent aussi fin que les filamens de la laine superfine au premier degré; car M. Tillet, actuellement Directeur de l'Académie, m'a donné un échantillon de fil d'or qui n'a en diamètre que la 70.^e partie d'une ligne, & qui est par conséquent d'une grosseur égale à celle de la laine superfine de la dernière qualité. On pourroit sans doute faire du fil d'argent plus délié, & avoir des échantillons qui correspondroient aux différentes sortes de laine: ces échantillons ne seroient pas sujets aux accidens qui détruisent la laine, mais je ne les ai pas essayés; je ne sais s'ils rempliroient mes vues.

Il y auroit encore un autre moyen pour reconnoître les différentes sortes de laine, qui seroit plus simple pour les gens de la campagne: on pourroit leur indiquer, sur différentes parties du corps d'un animal qui se trouveroit dans tous les pays, le poil qui auroit à-peu-près le même diamètre que les filamens de chaque sorte de laine: le duvet de la souie est aussi fin que la laine superfine au premier degré; le gros

poil est à peu-près de même grosseur que la laine super-grosse. J'ai trouvé aussi des rapports entre le poil d'autres parties du corps de cet animal & les autres sortes de laines ; mais ces observations ne sont pas assez confirmées : je m'en tiens pour le présent aux échantillons réels des cinq sortes de laines.

Ces échantillons étant appliqués à deux pouces de distance les uns des autres, sur une étoffe noire exposée au grand jour, on place la laine que l'on veut comparer entre les deux échantillons qui paroissent au premier coup-d'œil y avoir le plus de rapport. Supposons qu'elle soit entre le fin & le superfine : en examinant attentivement ces trois objets, on reconnoît si la laine mise à l'épreuve ressemble plus à l'échantillon du fin qu'à celui du superfine ; dans ce cas, elle est fine de première qualité ; au contraire si elle a plus de rapport avec l'échantillon du superfine qu'avec celui du fin, elle est superfine de seconde qualité.

Par ce moyen, on saura de quelle sorte sont les laines, & de quelle qualité dans chaque sorte ; on en reconnoîtra mieux la valeur & le prix : on pourra choisir les béliers les plus convenables pour améliorer les laines d'un troupeau par leurs alliances avec les brebis, ou au moins pour les empêcher de dégénérer, comme il n'arrive que trop souvent par le défaut d'intelligence pour le choix des béliers.

Ces objets n'étoient pas les seuls que j'avois en vue, lorsque j'ai recherché les moyens de constater cinq sortes de laines, & de les faire connoître : je me suis aussi proposé de comparer exactement les laines de France, sur-tout les plus fines avec celles des pays étrangers, & de reconnoître à quel point de perfection j'étois parvenu par mes expériences pour l'amélioration des laines.

J'ai fait la comparaison des laines dans toute l'étendue qui m'a été possible ; j'en ai mis à l'épreuve rigoureuse du microscope un très-grand nombre de différentes sortes, parmi lesquelles il y en a de pays si éloignés, que je n'aurois jamais pu me les procurer sans la protection du Gouvernement qui
a toujours

a toujours favorisé mes recherches. Ayant observé ces laines avec la plus grande attention, j'ai reconnu que les plus fines venoient d'Espagne.

J'ai observé un grand nombre d'échantillons des laines superfines qui nous viennent de l'Étranger, je ne les ai pas trouvées au premier degré de finesse.

J'ai aussi vu des laines de Roussillon au premier degré de la seconde qualité de superfin, & des laines de Berri & d'Auxois au dernier degré.

Quoique la grandeur du diamètre des filamens des laines superfines au premier & au dernier degré ne diffère que de la cent quarantième partie d'une ligne, cette différence est très-sensible dans les étoffes fabriquées avec ces deux sortes de laines; cependant le Commerçant ni le Manufacturier ne peuvent absolument pas l'apercevoir dans ses différens degrés sur les laines: aussi arrive-t-il quelquefois que le Fabricant fait les meilleures étoffes avec les laines superfines qui lui ont coûté le moins, parce que toutes les laines qui ont un certain degré de finesse, sont vendues & achetées à l'aveugle.

J'étois dans la même incertitude au milieu des laines de ma Bergerie, avant d'avoir trouvé le moyen de déterminer avec précision leurs différens degrés de finesse; mes yeux, même avec l'aide d'une loupe, me servoient mal; lorsque je consultois les meilleurs Connoisseurs que je pouvois trouver, je les voyois fort indécis, & souvent ils se contredisoient d'un moment à l'autre.

Enfin j'ai mis à l'épreuve invariable du microscope les laines qui ont été améliorées par mes expériences, & j'ai vu avec beaucoup de satisfaction qu'elles étoient parvenues au premier degré de superfin.

Par exemple, la laine d'un Bélier de trois ans est à ce haut degré de finesse, quoiqu'il soit venu d'un Bélier & d'une Brebis, tous les deux métis de races de Roussillon & d'Auxois, dont la laine n'étoit que de la seconde qualité de superfin; ce Bélier & cette Brebis avoient été produits eux-mêmes par

des Béliers de Roussillon à laine superfine de la seconde qualité, & par des Brebis d'Auxois à laine moyenne.

Par la première génération, la laine superfine du Bélier a changé la laine moyenne de la Brebis en laine superfine de la seconde qualité dans l'Agneau qu'ils ont produit. Cette amélioration est si vraisemblable, & je l'ai vu tant de fois, que je n'y trouve rien d'extraordinaire; mais je suis toujours surpris que dans la seconde génération, l'Agneau ait eu une laine superfine au premier degré, quoique le père & la mère n'eussent qu'une laine superfine de seconde qualité. J'ai déjà vu plusieurs fois cet événement dans la suite de mes expériences; je ne puis l'attribuer à l'influence du Bélier ou de la Brebis sur leur Agneau, puisqu'il les surpasse dans la finesse de la laine: il faut nécessairement qu'elle ait été perfectionnée par une cause étrangère.

Ce n'est pas le choix des alimens, car tous les métis de ma Bergerie ne sont nourris la plupart du temps que de paille: j'ai toujours eu pour principe, qu'il ne faut jamais favoriser les expériences de ce genre, mais les faire en toute rigueur.

Mes troupeaux vont aux parcs sur de petites montagnes & sur des côtes secs & maigres; il est certain que ces pâturages sont très-bons pour la production des laines fines; mais quoiqu'il y ait des pâturages de cette nature dans tous les pays montueux, les laines n'y ont pas été améliorées comme dans ma Bergerie.

Je présume que le plein air auquel mes troupeaux sont exposés nuit & jour en tout temps, a beaucoup influé sur l'amélioration de leurs laines; mais je n'en ai point de preuves convaincantes: je tâche d'en acquérir par des expériences que je fais exprès dans cette vue.

Il est toujours très-difficile & souvent impossible de distinguer les différentes causes qui influent sur les productions de la Nature: nous pouvons les rechercher sans impatience lorsqu'elles produisent de bons effets. Il est certain que l'on peut avoir en France des laines super fines de première qualité,

& même au plus haut degré : l'épreuve que j'en ai faite me paroît assez constante, assez évidente & assez répétée pour que les moyens qui l'ont produite puissent être utiles au Public. Douze ans d'expériences m'ont déterminé à les exposer dans une instruction pour les Bergers : je la soumettrai au jugement de l'Académie, & je la publierai si elle est jugée digne de son approbation.



SECONDE MÉMOIRE SUR LE CAP DE LA CIRCONCISION.

Par M. LE MONNIER.

Lû
le 12 Avril
1780.

M. DE LOZIER-S-BOUVET, qui réside à Paris actuellement, m'a communiqué une Carte * avec l'extrait de son Journal, qu'il a envoyé, en forme de lettre, à la Compagnie des Indes le 28 Juin 1739, & qui fut lû pour lors à l'Assemblée de l'Académie par feu M. du Fay.

Cette lettre contient seize pages *in-folio*, avec un plan & une vue du cap de la Circoncision, par $54^{\text{d}} 3'$ de latitude australe, & $26^{\text{d}} \frac{1}{2}$ de longitude estimée, à compter de Ténériffe : on en a imprimé un extrait pour lors dans les Observations sur les Écrits modernes, & M. Buache en a publié un autre, avec une Carte de la plus grande partie de l'hémisphère austral, là où il rapporte les variations observées de l'Aiguille aimantée, tirées des Journaux de M. Bouvet. M. Buache donne, vis-à-vis le cap de la Circoncision, la variation de l'Aiguille par un des compas de route, $6^{\text{d}} 30'$ du Nord à l'Ouest, & par l'autre 8 degrés; en sorte qu'on peut prendre un milieu, savoir 7 degrés $\frac{1}{4}$. Le Capitaine Cook, par les mêmes longitudes & latitudes, à ce qu'il croyoit pour lors, a trouvé tout récemment $13^{\text{d}} \frac{1}{2}$ degrés de variation; l'excès est donc près de 6 degrés, & la ligne sans déclinaison & d'autres lignes qui l'avoisinent, n'ont pas varié assurément de la moitié de cette quantité à 54^{d} de latitude australe.

Dès le 15 Décembre 1738, on avoit vu, à $48^{\text{d}} 50'$ de latitude, par 7 degrés de longitude, des glaces dont la

* Il m'a dit avoir vu quatre fois le cap de la Circoncision, & sa lettre faisoit déjà mention de trois fois : le premier Pilote qui l'avoit découvert, eut vingt pialtres de récompense à la vue de deux cents hommes qui formoient l'équipage du Vaisseau.

hauteur étoit de 2 à 300 pieds, & depuis un quart de lieue jusqu'à deux & trois lieues de tour, &c.

Extrait du Journal.

« Le 1.^{er} Janvier, vers les 3 heures après midi, on a vu une terre fort haute qui étoit couverte de neiges & fort embrumée : « elle a paru comme un grès Cap, &c. Cette terre restoit alors « dans l'Est-nord-est, à dix ou douze lieues : les vents en venoient, & nous mimes sur le champ au plus près pour l'aller « reconnoître, étant situés par 54 degrés de latitude & 27 ou « 28 de longitude : ils prétendent que le jour précédent ils « n'en avoient pas passé à plus de trois lieues ; mais ce jour-là « ils étoient à la cape ; grand vent, grosse mer & brume très- « épaisse le 31 Décembre : le 1.^{er} Janvier, à 10 heures du « soir, par une éclaircie, ils ont vu une très-grosse glace près « d'eux, & qu'ils ont soupçonné avoir bordé la terre. »

« Le 6 Janvier, beaucoup d'oiseaux blancs & gros comme « des pigeons : par une éclaircie, ils ont vu une très-grosse « glace à un quart de lieue à l'avant, & la terre à une ou deux « lieues, &c. Ils ont encore vu la terre le 5 Janvier, & plus « près qu'ils ne la croyoient du Vaisseau. »

*Extrait d'une Lettre de M. la Vigne-Buisson, écrite de
Saint-Malo, à M. Loziers-Bouvet, & communiquée
à l'Académie le 19 Avril 1780.*

Cette lettre, écrite tout récemment par un ancien Capitaine de Vaisseau de la Compagnie des Indes, lequel a commandé ensuite dans le Port de l'Orient, nous fournit encore un témoignage authentique de la découverte du Cap, à 54 degrés de latitude.

« Mon Journal de notre voyage des Terres australes, a eu à peu-près le même sort que le vôtre ; l'original, qui n'étoit « qu'un brouillon, s'est trouvé perdu, &c. »

Pour moi, qui avois des yeux de vingt-six ans, j'affirmois sur mon honneur & sur ma vie, que je n'ai cessé de «

14 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

» voir la terre (du Cap) pendant neuf ou dix jours , toutes les
» fois que la brume ne nous en a pas empêché , & j'en étois si
» fort persuadé , que le seul jour qui annonça , au lever du Soleil ,
» un temps clair & propre à envoyer des bateaux à terre , moi
» étant de quart , m'ayant ordonné de mettre notre chaloupe
» de pêche à la mer , & m'ayant commandé pour m'y em-
» barquer & faire la reconnoissance de cette terre , je ne vous
» fis aucune représentation , & j'étois prêt à partir lorsque le
» temps s'obscurcit par la brume épaisse qui couvrit tout d'un
coup l'horizon ».



ADDITIONS AUX DÉCOUVERTES
DÉJÀ PUBLIÉES
SUR LE CAP DE LA CIRCONCISION.

Par M. LE MONNIER.

IL y a environ un mois qu'on a produit dans l'Assemblée le Journal d'un Pilote du Vaisseau *l'Aigle*, de la Compagnie des Indes, dont l'extrait m'ayant été communiqué par M. Bori, est resté au Secrétariat. Ce Journal avoit été annoncé comme une pièce absolument contraire à la découverte du Cap ou île australe de la Circoncision : or dans ce même Journal, on trouve au contraire que ce Pilote a vu & relevé douze fois les terres du cap de la Circoncision, depuis le 1.^{er} Janvier jusqu'au 8 du même mois de l'année 1739 : on y trouve aussi quelques Observations sur la variation de l'aimant, qui donneroient la position de ce Cap encore plus dans l'Ouest que je ne l'avois cru devoir établir par les Observations publiées jusqu'à ce jour.

Dans la dernière assemblée du 29 Avril, on a encore produit un calcul de la longitude de ce Cap, fondé sur une supposition que je n'admets nullement, au sujet des variations de l'Aiguille aimantée : on y pose pour point fondamental de la question, qu'à 5 degrés de variations de l'Aiguille, à la latitude de 54 degrés, répondent 10 degrés en longitude géographique, au lieu de 8 degrés seulement que j'ai cru devoir établir dans nos Mémoires de 1776, page 667 ; car la ligne sans déclinaison a dû être, vers 54 degrés de latitude, en 1775, à 5 degrés de longitude, à compter de l'île de Fer ; & puisque le Capitaine Cook, dont j'emprunte uniquement ici les Observations, comptoit 27 degrés de longitude lorsque la variation de l'Aiguille étoit 13 degrés $\frac{1}{2}$, il est clair qu'à proportion, pour 5 degrés de variation on ne doit admettre

Lû
le 3 Mai
1780.

que 8 degrés de différence en longitude géographique à la latitude de 54 degrés australe, & sous le Méridien du Cap de la Circoncision.

Or d'après cette supposition, déjà trop forcée, de 10 degrés au lieu de 8 degrés, on embarrasse la question, par l'effet des lieues parcourues, qui ne sont plus lieues marines, & par les courans; comme si les courans qui ont lieu proche l'Afrique, 20 degrés moins au sud & à l'atterage du cap de Bonne-espérance, pouvoient influencer sur une mer aussi éloignée du continent d'Afrique que doit l'être celle qui environne le cap, ou plutôt l'île de la Circoncision. Quoique j'aie déjà recueilli avec soin dans le Mémoire qu'on veut attaquer, tout ce qui concerne la position de la ligne sans déclinaison de l'Océan atlantique dans la partie du Sud, comme aussi les rapports qui se trouvent aux approches de cette ligne, entre les degrés de longitude & les variations observées du compas ou de l'Aiguille aimantée, on ne sera peut-être pas fâché de trouver ici la suite des Observations faites au-delà du 27.^o degré de longitude, par le Capitaine Cook & les autres Officiers du Vaisseau *la Résolution*; d'autant que plus on s'éloigne de la ligne sans déclinaison, plus le rapport augmente entre les variations observées du compas & les degrés de longitude géographique. Voici l'extrait du Livre publié à Londres en 1777, sous ce titre : *The original Astronomical Observations made in the course of a Voyage towards the south Pole, &c.*

1.^o A la page 383, il est dit que le 14 Février 1775, par 56^d 14' $\frac{1}{2}$ de latitude australe (& par conséquent 2 degrés $\frac{1}{4}$ plus au Sud que le cap de la Circoncision, sous le Méridien duquel le Vaisseau *la Résolution* devoit alors se trouver), la longitude étoit 4^d 50', c'est-à-dire, 23^d 1' à compter de l'île de Fer. On observa ce jour-là 6^d 50' $\frac{1}{3}$ de variation du Nord à l'Ouest, grosse mer & vent S. W.

Et à la page 270, le 15, à 8^h 24' du matin, la latitude étoit encore 55^d 30' $\frac{1}{8}$, la longitude 5^d 56' $\frac{1}{8}$, mauvaise mer; donc longitude 24^d 7' depuis l'île de Fer.

2.^o Le

| | | |
|---|-----------------------------------|---------|
| 2.° Le 16 Février, latitude australe..... | 54 ^d 24' $\frac{1}{6}$ | |
| Longitude..... | 6. 30. | |
| La variation..... | 12 ^d 7' | vent S. |
| Le même jour..... | 54. 21 $\frac{1}{2}$ | |
| Longitude..... | 8. 6. | |
| La variation..... | 13. 42 $\frac{1}{3}$ | E. S. |
| Le 17, vent modéré..... | 54. 25 $\frac{1}{3}$ | |
| Longitude..... | 9. 20. | |
| La variation..... | 13. 16 $\frac{1}{3}$ | N. W. |
| Le 21, vent modéré..... | 54. 26. | |
| Longitude..... | 19. 15. | |
| La variation..... | 19. 8 $\frac{1}{2}$ | vent W. |

Ces variations, comme on voit, ont été observées plusieurs fois dans les parties de l'Océan, situées à l'est du cap de la Circoncision, & par une latitude qui peut être censée constante: on s'éloignoit alors davantage du premier Méridien magnétique ou ligne sans déclinaison, & les rapports des variations, comme j'en ai averti, devoient s'accroître alors ou donner un peu plus de 8 degrés en longitude pour 5 degrés de variations, relativement à ce que j'avois dû conclure aux approches du premier Méridien.

Mais il s'en faut bien, par les Observations du 16 & du 17 Février, qu'on trouve les 8 degrés en longitude, ni ce qu'on a voulu porter inutilement jusqu'à 10 degrés dans la dernière assemblée, car on n'auroit d'abord que 6 degrés $\frac{1}{2}$: ensuite prenant un plus grand intervalle de temps & d'espace parcouru, savoir du 17 au 21 Février, on trouve 9 degrés, à très-peu de chose près: prenant donc un milieu, je trouve 7 degrés $\frac{3}{4}$ au lieu des 10 degrés qu'on a supposés dans le Mémoire lu à la dernière Assemblée; & si on s'opiniâtroit à retenir les 9 degrés déterminés par les dernières Observations du Capitaine Cook, par une longitude qui est 16 degrés plus à l'Orient que n'est celle que j'attribue au cap de la Circoncision, cela ne sauroit détruire les 8 degrés en longitude que je trouve dans l'Ouest de ce Cap, pour une variation

Mém. 1779.

C

18 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

de 5 degrés ou changement observé dans la déclinaison de l'Aimant, en faisant route aux environs de ce Cap.

C'est donc sans fondement qu'on a voulu attaquer les valeurs que j'ai assignées pour la longitude du cap de la Circoncision, & que feu M. Buache a voulu placer au moins, conformément aux Journaux de M. Bouvet dont il étoit saisi; ou bien à l'égard de l'île de Fer, 2 degrés plus dans l'Ouest *, ainsi que les Anglois, sur le Vaisseau *la Résolution*, en y croisant, l'ont très-bien reconnu : leurs Capitaines s'étoient emparés à Louisbourg, en 1743, des originaux de ce Journal, dont M. Buache nous avoit heureusement conservé, il y avoit déjà quatre ans, une copie exacte & très-fidèle, & que le célèbre Commandant, M. Bouvet, a bien voulu communiquer tout récemment à l'Assemblée & au Dépôt de la Marine, ainsi que sa lettre écrite à la Compagnie des Indes en Juillet 1739-

* On s'est encore mépris dans les 28 degrés $\frac{1}{2}$, & qui sont les mêmes, à compter de l'île de Fer, que les 26 degrés $\frac{1}{2}$ des Pilotes, à compter du pic de Ténériffe. Voyez la *Pièce paraphée* & le *Rapport des Commissaires de l'Académie*, &c.



OBSERVATIONS DES ÉCLIPSES

DES

SATELLITES DE JUPITER,

Faites en 1779 à Périnaldo, dans le Comté de Nice,
avec une Lunette achromatique de 3 pieds de foyer,
& 27 lignes d'ouverture.

Par M. MARALDI

| MOIS & JOURS. | TEMPS VRAI. | |
|---------------------|-------------------------|---|
| Janvier... 14 | 15 ^h 30' 14" | Immersion du troisième Satellite; il fait beau. |
| 14 | 18. 35. 37 | Émergence du troisième; il fait beau. |
| 18 | 18. 13. 27 | Immersion du premier; il fait beau. |
| 20 | 12. 41. 57 | Immersion du premier; il fait beau. |
| 21 | 12. 51. 46 | Immersion du second; il fait fort beau. |
| Février.... 3 | 16. 25. 50 | Immersion du premier; il fait fort beau, mais trop proche & presque en conjonction avec la Lune, qui est un peu plus boréale. |
| 4 | 17. 54. 49 | Immersion du second; très-douteuse, à cause des fortes vapeurs qui sont dans l'air. |
| 10 | 18. 19. 37 | Immersion du premier; il fait beau, mais il fait jour. |
| 17 | 15. 36. 3 | Immersion du quatrième; il fait beau: lorsque je suis retourné à la lunette, j'ai cru l'entrevoir encore. |
| 17 | 15. 37. 7 | On ne le voit certainement plus. |
| 19 | 11. 17. 31 | Immersion du troisième; il fait fort beau. |
| 19 | 14. 42. 33 | Immersion du premier; il fait fort beau. |
| 21 | 9. 11. 15 | Immersion du premier; il fait beau. |
| 22 | 12. 21. 14 | Immersion du second; il fait fort beau. |

Le
le 29 Janvier
1780.

20 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

| M O I S & J O U R S. | | TEMPS V R A I. | |
|----------------------------|----|------------------------|---|
| Février... | 26 | 15 ^h 17' 9" | Immersion du troisième; très-douteuse: fortes vapeurs: on voit très-foiblement les autres Satellites, quoique π soit bien terminé, & qu'on voie distinctement les bandes. |
| | 28 | 11. 6. 14 | Immersion du premier; il fait beau, mais la lumière de la Lune m'incommode. |
| Mars.... | 1 | 14. 56. 28 | Immersion du second; il fait fort beau. |
| | 6 | 9. 35. 18 | Immersion du quatrième; il fait beau, mais π est ondoyant, & j'ai les yeux fatigués. |
| | 23 | 13. 37. 8 | Émergence du premier; il fait beau, mais il fait un peu de vent qui agite la lunette. |
| | 27 | 10. 12. 7 | Émergence du troisième; il fait beau. |
| | 30 | 15. 33. 12 | Émergence du premier; il fait beau. |
| Avril..... | 3 | 14. 11. 28 | Émergence du troisième; il fait très-beau. |
| | 15 | 3. 55. 10 | Émergence du premier; il fait beau. |
| | 20 | 11. 50. 15 | Émergence du second; il fait beau. |
| | 27 | 12. 47. 48 | Émergence du second; il fait beau, mais Jupiter est ondoyant & mal terminé. |
| Mai..... | 1 | 12. 15. 29 | Émergence du premier; il fait beau. |
| | 10 | 8. 40. 55 | Émergence du premier; il fait beau. |
| | 15 | 8. 59. 56 | Émergence du second; il fait beau. |
| | 16 | 11. 21. 50 | Immersion du troisième; il fait beau. |
| | 17 | 10. 34. 36 | Émergence du premier; il fait beau. |
| | 22 | 11. 36. 13 | Émergence du second; il fait beau. |
| Juin..... | 25 | 9. 0. 33 | Émergence du premier; fortes vapeurs. |
| Novembre. | 12 | 17. 48. 46 | Émergence du quatrième; il fait beau, mais Jupiter est encore un peu ondoyant. |
| | 22 | 17. 25. 34 | Immersion du premier; il fait beau. |
| Décembre. | 8 | 15. 34. 8 | Immersion du premier; il fait beau. |
| | 15 | 71. 24. 31 | Immersion du premier; il fait beau. |
| | 28 | 17. 37. 54 | Immersion du second; il fait beau. |
| | 31 | 15. 32. 33 | Immersion du premier; il fait beau. |
| | 31 | 18. 31. 5 | Immersion du troisième; il fait beau. |

*Observation de l'Éclipse de Lune , du 29 Mai 1779 ,
faite avec une Lunette de 7 pieds , garnie d'un réticule
de 13 fils parallèles , dont les extrêmes comprenoient
le diamètre de la Lune.*

| MOIS & JOURS. | TEMPS VRAI. | |
|---------------------|------------------------|--|
| Mai..... 29 | 15 ^h 24' 0" | La Lune sort des nuages , & on voit la pénombre à la vue simple. |
| 29 | 15. 32. 7 | Commencement de l'Éclipse. |
| 29 | 15. 36. 35 | La Lune sort des nuages , & Galilée me paroît couvert. |
| 29 | 15. 40. 0 | L'Éclipse est de deux doigts. |
| 29 | 15. 45. 15 | L'Éclipse est de trois doigts. |
| 29 | 15. 48. 45 | L'ombre à Aristarque. |
| 29 | 15. 50. 35 | L'Éclipse est de quatre doigts. |
| 29 | 15. 53. 30 | L'Éclipse me paroît de cinq doigts : la Lune entre dans les nuages. |
| 29 | 15. 59. 30 | La Lune paroît un moment , & l'Éclipse me paroît de six doigts ; elle s'est cachée ensuite , & je ne l'ai pas pu voir depuis. |

Observation de l'Éclipse de Lune , du 23 Novembre 1779.

J'ai observé cette Éclipse avec la lunette achromatique
de 3 pieds , qui grossit soixante fois , parce qu'il faisoit un
très-grand vent qui m'a empêché de me servir de la lunette
ordinaire de 7 pieds , qu'il étoit impossible de tenir à la
fenêtre.

22 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

| MOIS & JOURS. | TEMPS VRAI. | |
|---------------------|-----------------------|--|
| Novembre. 23 | 6 ^h 34' 0" | Pénombre forte. |
| 23 | 6. 41. 24 | Commencement de l'Éclipse. |
| 23 | 6. 43. 8 | L'ombre à Galilée. |
| 23 | 6. 44. 20 | Galilée couvert. |
| 23 | 6. 46. 41 | L'ombre à Aristarque. |
| 23 | 6. 48. 40 | Aristarque dans l'ombre. |
| 23 | 6. 57. 28 | L'ombre à Copernic. |
| 23 | 6. 59. 43 | Copernic dans l'ombre. |
| 23 | 7. 3. 58 | L'ombre à Platon. |
| 23 | 7. 5. 34 | Platon dans l'ombre, & la Lune cou- verte par les nuages. |
| 23 | 7. 28. 35 | L'ombre à <i>Mare crisum</i> . |
| 23 | 7. 34. 10 | <i>Mare crisum</i> tout dans l'ombre. |
| 23 | 7. 38. 10 | Immersion douteuse. |
| 23 | 7. 38. 44 | Immersion certaine. |
| 23 | 9. 7. 58 | Commencement de l'émerſion entre les nuages qui ont ensuite couvert tota- lement la Lune; à 9 ^h 30', pluie; & je quitte. |



M É M O I R E
S U R L E S
LUNETTES DIPLANTIDIENNES
OU À DOUBLE IMAGE,
Et sur les Objectifs & les Oculaires achromatiques.

Par M. J E A U R A T.

LES Lunettes que je nomme *diplantidiennes*, sont celles qui représentent tout-à-la-fois deux images d'un même objet, l'une droite & l'autre renversée; cette construction procure, pour l'observation des Astres, des avantages que n'ont pas les lunettes ordinaires, qui ne représentent qu'une seule image pour chaque objet: voici en quoi consistent les avantages de cette nouvelle construction.

28 Août
1779,
& lu
par extrait
à la rentrée
publique
de la
Saint-Martin
de
cette année.

Les deux images de l'Astre entrent dans la lunette, & en sortent à la fois par la droite & par la gauche, puisqu'elles sont dans des sens opposés, & qu'elles marchent en sens contraire; ainsi elles vont au-devant l'une de l'autre, se séparent & sortent par les côtés opposés à ceux par où elles sont entrées; donc, pour premier avantage, les deux images ont entr'elles des vitesses apparentes, doubles de celle d'une seule image à l'égard de l'axe fixe & immobile d'une lunette ordinaire.

Après l'entrée de l'Astre dans la lunette, & avant sa sortie, les deux images, par leur contact, donnent les passages des deux bords du disque de l'Astre, soit par le plan du Méridien, soit par un cercle horaire quelconque; d'ailleurs, le croisement de deux images, lorsqu'elles sont précisément l'une sur l'autre, donne le passage du centre, quelle que soit la grandeur du diamètre de l'Astre: or, cette observation intermédiaire, & qui se vérifie naturellement par les deux autres, n'a encore pu se faire d'aucune manière & avec aucune autre

lunette, & ne se concluoit que de celle des bords du disque de l'Astre, qui s'observent avant ou après le véritable passage cherché.

La construction *diplantidienne* que je propose, a donc l'avantage de doubler la vitesse du passage des Astres, de rendre l'observation des petites Étoiles aussi facile que celle des plus grandes, & d'être susceptible d'une observation qu'on n'avoit encore pu que déduire de deux autres, savoir, l'observation directe du passage du centre d'un Astre, quelle que soit la grandeur de son diamètre.

Quoiqu'on puisse se dispenser de placer des fils dans cette lunette, néanmoins il sera bon d'y en adapter, parce que, pour les observations aisées à faire, comme celle des Astres dont la force de la lumière est assez considérable pour éclairer les fils de manière à voir tout-à-la-fois l'Astre & les fils, on aura alors la facilité de diriger la lunette dès que l'Astre y entrera, de sorte que les deux images soient toutes deux placées sur le fil qui passe par l'axe de la lunette; car dans ce cas, on sera assuré d'avance que les deux images parcourront exactement le même fil, & que les coïncidences des images se feront comme il convient; autrement il faudroit que, dans l'instant même où on observe dans le méridien le passage & la hauteur du centre de l'Astre, qu'on fasse à la lunette *diplantidienne* le petit changement de hauteur qui convient, pour que le recouvrement exact des deux images se fasse avec la précision que comporte la construction de cette lunette.

D'après les avantages que m'a paru réunir la construction *diplantidienne*, à laquelle personne n'avoit encore pensé, je la proposai le 10 Avril 1778, à M. Navarre, habile Opticien; & après plusieurs conférences que j'eus avec lui à ce sujet, il construisit sa lunette qu'il a présentée à l'Académie: M.^{rs} Cassini de Thury, le Roi & Bailly, en ont fait leur rapport le 2 Septembre 1778, & ont trouvé que le succès de M. Navarre prouvoit qu'il avoit des connoissances en Optique, que n'ont pas ceux qui ne savent qu'exécuter.

Le

Le premier objet que je me propose ici, est de donner la solution générale du Problème dont M. Navarre a résolu lui-même le cas de la construction qu'il a adopté: je vais donc donner ici la relation générale entre les foyers des lentilles & les distances que les lentilles doivent avoir entr'elles; ainsi, avec trois lentilles de foyer quelconque, on construira toujours, & sans recherche hasardée, une lunette qui procurera complètement l'effet proposé, & quand on n'aura pas atteint exactement les foyers qu'on se sera proposés, d'après les Tables que je donne, on pourra calculer directement, d'après les foyers exécutés, quelles seront les distances qu'on devra adopter pour produire l'effet demandé. Ensuite je donne des mesures d'objectifs *achromatiques*, que je crois préférables à celles que j'ai données, *Mémoires de l'Académie, année 1770, pages 461 & 486.*

L'effet proposé des lunettes *diplantidiennes*, s'opère d'une manière simple, moyennant trois objectifs; l'un des trois est percé dans son milieu, & les deux autres sont à l'ordinaire, pleins & non percés.

L'objectif percé, que je nomme *objectif équivalent*, forme Fig. 1. naturellement une image renversée, tandis que les deux autres forment ensemble, & par leur effet successif & combiné, une image droite en ce même point, alors les deux images formées en un foyer commun, produisent l'effet requis, & les dimensions respectives des foyers des lentilles, à l'égard des distances qu'elles doivent avoir entr'elles, se calculent directement d'après les foyers des lentilles, comme on va le voir.

Relation des foyers des lentilles, & des distances qu'elles doivent avoir entr'elles pour produire l'effet d'une double image.

1.^o Soit la lentille *A*, dont le foyer *F* des rayons parallèles est $DA = F$; soit aussi cette lentille *A*, percée dans son centre *A* de la manière qui convient, pour que les rayons réfractés des objets ne rencontrent pas ceux des deux autres lentilles *a* & *c*.

Mém. 1779.

D.

26 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

2.^o Soit la lentille a non percée, dont le foyer f des rayons parallèles est $Ba = f$, & soit la troisième & dernière lentille C non percée, dont le foyer ϕ des rayons parallèles soit celui qu'il faut pour que l'image B , produite par l'effet de la lentille a , soit transmise & redressée en D , même foyer que celui que produit la seule lentille A .

Alors il se formera en D une image de situation droite, par l'effet successif des lentilles a & c , & une autre image de situation renversée, par l'effet de la seule lentille percée A .

$$\text{De plus, soit } \left\{ \begin{array}{l} Da = x, \text{ distance de la lentille } a \text{ au foyer commun } D, \\ Dc = y, \text{ foyer relatif à la distance } BC \text{ de l'image } B \\ \text{transmise par la lentille } C, \\ BC = Da - Ba - Dc = x - f - y, \\ r, \text{ rayon de la courbure de la lentille } C, \text{ qu'on suppose} \\ \text{isocèle,} \\ p, \text{ rapport de la réfraction.} \end{array} \right.$$

Cela posé, je suppose, comme on le voit, que les foyers F , f & ϕ des rayons parallèles, sont les données, & que les distances Da , Dc , sont les cherchées, parce que la difficulté d'exécuter des lentilles de foyers, exactement conformes à ceux qu'on se prescrit, est très-grande, au lieu qu'on espacera toujours de la manière qu'on voudra des lentilles entr'elles, & selon que le prescrira le calcul.

Voici présentement comme je procède, quant à la solution demandée, & le procédé dépend uniquement de connoissances simples, généralement connues en Optique, & dont M. Navarre a si heureusement fait application dans son *Mémoire* le 2 Septembre 1778.

La lentille C transmettra l'image B en D , si DC ou $y = \frac{r \times BC}{2BC(p-1) - r}$, c'est-à-dire, si $y = \frac{r(x-f-y)}{2(x-f-y)(p-1) - r}$.

Mais ϕ est le foyer des rayons parallèles, ainsi on a

$$r = 2(p-1)\phi;$$

donc l'équation

$$y = \frac{r(x-f-y)}{2(x-f-y)(p-1)-r},$$

donnera pour première condition

$$\phi = \frac{y(x-f-y)}{x-f}.$$

D'une autre part, les grandeurs des images sont dans le rapport des distances focales; ainsi, la lentille A qui produit en D une image, & la lentille a qui produit en B une autre image, ont des grossissemens, dont le rapport est celui de F à f .

D'ailleurs, la lentille C qui transmet l'image B , & la redresse en D , doit en même temps produire en D un grossissement égal à celui de l'image D , produite par la seule lentille A dans ce même point D ; cette condition de deux images d'égale grandeur, exige donc cette condition-ci,

$$DA . Ba :: DC . BC,$$

où

$$F.f :: y.x - f - y,$$

savoir

$$F(x-f-y) = fy;$$

ainsi les conditions sont $\begin{cases} \phi(x-f) = y(x-f-y), \\ F(x-f-y) = fy. \end{cases}$

$$\text{Donc} \begin{cases} \text{pour relation entre les données \& les cherchées } \phi F(x-f) = fy^2, \\ \text{pour solution demandée...} \begin{cases} Da, \text{ où } x = f + \frac{\phi}{Ff}(F+f)^2, \\ DC, \text{ où } y = \frac{\phi}{f}(F+f), \\ DA = F. \end{cases} \end{cases}$$

Cette solution, qui a toute la généralité qu'on peut desirer, donne naturellement la construction que voici, pour fixer les distances respectives des lentilles dont les foyers F, f, ϕ seroient données.

Soit les droites indéfinies yQ, CL , perpendiculaire l'une à l'autre; faites $CK = F + f, CE = \phi, CG = f$; tirez la droite GK ; alors la parallèle ED donnera D ij Fig. 2.

$DC = \frac{\phi}{f} (F + f)$ pour la distance de la lentille C , au foyer commun D , cette lentille C ayant ϕ pour foyer des rayons parallèles.

Fig. 2. D'une autre part, menez DM , parallèle à CL ; faites $DH = DC = \frac{\phi}{f} (F + f)$; par les points H & E , menez HE , son prolongement EB donnera

$$DB = \frac{\phi}{Ff} (F + f)^2,$$

faisant aussi $Ba = f$; alors

$$Da = Ba + DB = f + \frac{\phi}{Ff} (F + f)^2.$$

Quant à la lentille A , son foyer F en donne directement la position, car $DA = F$.

Cas particuliers qui offrent quelques facilités dans la pratique, mais qui ont l'inconvénient d'allonger, & presque en pure perte, la longueur de la Lunette.

Fig. 1. 1.^o Si l'on fait $\phi = F = f$, on aura $\begin{cases} Da = 5F, \\ DC = 2F; \end{cases}$

dans ce cas, on a un foyer total Da , cinq fois plus grand que le foyer absolu DA ou F .

2.^o f étant comme on voudra, si on fait $\phi = F$, on aura... $\begin{cases} Da = 2(F + f) + \frac{F}{f}, \\ DC = \frac{F}{f} (F + f); \end{cases}$

dans ce cas, on a un foyer total Da , plus que double du foyer absolu F ; & si on fait $f = \frac{1}{2}F$, la longueur totale Da sera cinq fois celle du foyer absolu F .

3.^o ϕ étant comme on voudra, si l'on fait $F = f$, on aura... $\begin{cases} Da = F + 4\phi \\ DC = 2\phi; \end{cases}$

dans ce cas, le foyer total Da sera nécessairement plus grand que le foyer absolu F , mais l'excédant pourra être aussi petit qu'on voudra ; & si on fait $\varphi = \frac{1}{2}F = \frac{1}{2}f$, le foyer total Da sera triple du foyer absolu F ; d'ailleurs, les lentilles C & A seront à une même distance du foyer commun D , Fig. 3. c'est-à-dire, que le centre de ces deux lentilles sera commun, la lentille C , placée dans le vide même de la lentille A , d'une autre part, les surfaces pourront avoir un même rayon, pourvu que deux surfaces soient planes.

Voyez page 42, la Table première, qui est dressée d'après Fig. 3. la supposition de ce cas particulier, & dont le principal défaut est d'employer des surfaces planes, qui est ce qu'il y a de plus difficile à bien travailler. Voyez aussi la Table deuxième, qui répond à la figure quatrième, & où $F = f = 4\varphi$.

4.^o F étant comme on voudra, $\left\{ \begin{array}{l} Da = F + 3f + \frac{f^2}{F}, \\ \text{si l'on fait } f = \varphi, \text{ on aura...} \\ Dc = F + f; \end{array} \right.$

dans ce dernier cas, la lentille c sera placée entre les lentilles Fig. 8. A & a , & les lentilles a & c seront peu éloignées l'une de l'autre ; on aura donc, comme dans les cas précédens, une distance focale relative Da , toujours plus grande que la distance absolue. Par exemple, si l'on fait $F = 4f = 4\varphi$, on aura $Da = \frac{29}{16}F$, & $Dc = \frac{5}{4}F$.

Passons au cas qu'a adopté avec raison M. Navarre, dans lequel la distance absolue ou équivalente DA égale la distance totale & relative Da .

Cas préférable à ceux qu'on vient d'expliquer, & qui est Fig. 1. celui que M. Navarre a adopté, à très-peu de chose près, pour la lunette qu'il m'a construite lorsqu'il a eu dessein de remplir mes vues.

Laisant de côté l'avantage qu'il y a à construire des lentilles de foyers égaux, & qu'on peut travailler dans les mêmes bassins, pour ne s'occuper que du soin de n'avoir pas

une lunette plus grande que celle dont l'effet seroit
celui d'une lunette d'un moindre foyer, on voit qu'il
convient que la longueur totale ou relative Da soit égale à
la distance focale absolue DA , savoir à celle du foyer des
rayons parallèles, représentés par DA ou par F ; alors ce cas

Fig. 5. est celui où $Da = DA$, où $f + \frac{\varphi}{Ff}(F + f)^2 = F$.

D'où l'on tire, pour condition des foyers entr'eux, la

Fig. 5. condition prescrite que voici; $\varphi = \frac{Ff(F - f)}{(F + f)^2}$.

Cette condition exige que f soit moindre que F , car
le foyer φ seroit zéro ou négatif, si f étoit égal ou plus grand
que F .

Ainsi pourvu qu'on fasse F plus grand que f , on pourra
admettre entre F & f , tel rapport numérique qu'on voudra,
puis se prescrivant pour foyer des rayons parallèles de la

lentille c , la valeur $\varphi = \frac{Ff(F - f)}{(F + f)^2}$ il ne restera plus

d'autre position à chercher que celle de cette lentille c , &
sa position à l'égard du foyer commun $Da = F$, sera

$Dc = \frac{F(F - f)}{F + f}$, ce qui revient ici à

$$Dc = \sqrt{\frac{\varphi F}{f} (F - f)}$$

Ce cas déduit si naturellement de ma solution générale,
& qui offre un nombre infini de rapports entre F & f , pré-
sente facilement les cinq principaux cas que voici:

$$1.^{\circ} \text{ Soit } \left\{ \begin{array}{l} Da = F, \\ Ba = f = \frac{1}{2} F, \\ \varphi = \frac{1}{12} F. \end{array} \right\} \text{ on fera } Dc = \frac{1}{4} F.$$

$$2.^{\circ} \text{ Soit } \left\{ \begin{array}{l} Da = F, \\ Ba = f = \frac{1}{3} F, \\ \varphi = \frac{1}{9} F. \end{array} \right\} \text{ on fera } Dc = \frac{1}{3} F.$$

$$3.^{\circ} \text{ Soit } \left\{ \begin{array}{l} Da = F, \\ Ba = f = \frac{1}{3} F, \\ \varphi = \frac{1}{3} F, \end{array} \right\} \text{ on fera } Dc = \frac{1}{3} F.$$

$$4.^{\circ} \text{ Soit } \left\{ \begin{array}{l} Da = F, \\ Ba = f = \frac{2}{3} F, \\ \varphi = \frac{2}{3} F, \end{array} \right\} \text{ on fera } Dc = \frac{2}{3} F.$$

$$5.^{\circ} \text{ Soit } \left\{ \begin{array}{l} Da = F, \\ Ba = f = \frac{1}{2} F, \\ \varphi = \frac{1}{2} F, \end{array} \right\} \text{ on fera } Dc = \frac{1}{2} F.$$

De ces principaux cas particuliers, celui qui paroît être le plus favorable de tous, est le troisième, savoir celui où la lentille *C* sera placée précisément au milieu de la distance totale *DA* de la lentille, & c'est sur ce principe que, *page 44*, la troisième Table a été dressée : on se dirigera donc, à cet égard, d'après cette Table, pour construire les lentilles, & pour les placer comme il convient ; mais quand l'exécution de la construction des lentilles n'aura pas été précise pour les distances focales des lentilles, on se départira des positions prescrites dans la Table, & au lieu d'avoir recours, comme *M. Navarre*, au tâtonnement de l'écartement des lentilles, on mesurera séparément les foyers des rayons parallèles de chaque lentille, puis, avec ces mesures, on les placera entr'elles avec sûreté, de la manière qui conviendra, moyennant les mesures prescrites par la formule générale, que je rapporte de nouveau ici, comme devant constamment servir de règle dans tous les systèmes qu'on adoptera.

Formule générale de la page 27, & à laquelle doivent être rapportés tous les cas particuliers qu'on pourra imaginer.

$$\text{Distance } \left\{ \begin{array}{l} Da = f + \frac{\varphi}{Ff} (F + f), \\ DA = F, \\ Dc = \frac{\varphi}{F} (F + f). \end{array} \right.$$

Fig. 1. Et aussi pour relation des foyers avec les distances $\phi F(Da - f) = f \times DC^2$.

La Table troisième sera suivie d'une quatrième, dans laquelle
Fig. 6. la distance relative Da n'est que les $\frac{4}{5}$ de la distance absolue, ou équivalente DA ou F ; & dans cette quatrième Table, qu'on trouve page 45, on a supposé, pour le cas proposé, la relation des données que voici, ainsi que les distances cherchées qui s'ensuivent, & qui fixent l'arrangement des lentilles entr'elles.

$$\text{Soit } F = 2f = 15\phi, \text{ on fera } \begin{cases} DA = F, \\ Da = \frac{4}{5}F, \\ DC = \frac{1}{5}F. \end{cases}$$

Voyons présentement quel est le cas qui convient tout-à-la-fois & aux oculaires & aux objectifs à double images.

Cas particulier qui convient tout-à-la-fois aux oculaires & aux objectifs à double images.

Fig. 7. Pour le cas des oculaires, on suppose l'œil placé en y , de manière que ce point y soit placé à une distance Ay , égale au foyer F ou à AD foyer de la lentille percée A , & en même temps à une distance ay , égale à celle du foyer f de la lentille a ; ce cas est donc celui de la condition que voici.

$$\text{Condition des oculaires } \begin{cases} Ay = DA = F, \text{ foyer de la lentille percée,} \\ ay = Ba = f, \\ Aa = Ay - ay = F - f. \end{cases}$$

$$\text{Mais, page 27, } \begin{cases} Da = f + \frac{\phi}{Ff} (F + f)^2, \\ DA = F; \end{cases}$$

$$\text{alors, } Aa = Da - DA$$

$$\text{donne } F - f = f + \frac{\phi}{Ff} (F + f)^2,$$

ce qui assigne au foyer ϕ des rayons parallèles de la lentille C , la valeur prescrite que voici :

$$\phi = \frac{2Ff(F - f)}{(F + f)^2}.$$

De plus,

De plus, f doit être moindre que F ; car si f égaioit F , ϕ deviendrait zéro, & si f étoit plus grand que F , le foyer ϕ seroit négatif, c'est-à-dire que la lentille C seroit concave: excluant donc les lentilles concaves, qui ne réussissent que pour les miroirs de réflexion, on fera f moindre que F , & aussi $\phi = \frac{2Ff(F-f)}{(F+f)^2}$. Cela posé, la solution qui convient tout-à-la-fois aux oculaires & aux objectifs à double image, sera celle-ci.

$$\text{Condition prescrite } \phi = \frac{2Ff(F-f)}{(F+f)^2},$$

$$\text{Distance cherchée} \dots \begin{cases} DA = F, \\ Da = 2F - f = f + \frac{\phi}{Ff}(F+f)^2, \\ DC = \frac{2F(F-f)}{F+f} = \frac{\phi}{f}(F+f). \end{cases}$$

Dans ce cas, commun aux objectifs & aux oculaires à Fig. 7. double images, le foyer relatif Da sera plus grand que le foyer absolu DA , & supposant, *Table V, page 46*, $f = \frac{1}{2}F$,

$$\text{On trouvera} \dots \dots \dots \begin{cases} \phi = \frac{2}{9}F, \\ Da = \frac{1}{3}F, \\ DA = F, \\ DC = \frac{1}{3}F; \end{cases}$$

d'ailleurs, si l'on veut favoriser la facilité de l'exécution, par exemple, d'admettre une même courbure pour les lentilles a & c , cette supposition de $f = \phi$, donnera

$$f = \phi = (\sqrt{5} - 2)F = 0,23607 F.$$

Fig. 8.

Cela posé,

$$\text{Les distances seront} \begin{cases} DA = F = 4,23604 f = 4,23604 \phi, \\ Da = 1,76393 F, \\ DC = 1,23600 F. \end{cases}$$

Or, c'est dans cette supposition qu'est dressée, *page 47*, la sixième & dernière de mes Tables, pour les constructions dioptriques.

Mém. 1779.

E

34 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

La crainte qu'il y a pour le succès de la cinquième & sixième Tables, communes aux oculaires & aux objectifs, c'est que dans l'application aux oculaires, il pourra arriver que la nécessité de partager en deux parties l'ouverture totale, afin de laisser passer librement les différens rayons, ne restreigne trop chaque partie de l'ouverture de l'oculaire, l'ouverture totale étant déjà pour l'ordinaire plus petite qu'on ne voudroit, eu égard au champ de la lunette, qu'on a cependant intérêt de rendre le plus grand qu'il est possible.

Fig. 7. Si on supprime la lentille *C*, & si on fait la lentille *A* pleine & non percée, il est évident qu'on se trouve dans le cas des oculaires équivalens qui renversent les objets, & qui sont ceux qui réussissent le mieux dans la pratique.

Avant de passer à la construction des objectifs achromatiques, on remarquera que la formule des objectifs à double image, s'applique d'une manière directe à la construction des oculaires qui redressent les objets, & qui sont composés

Fig. 9. de deux lentilles *a* & *c*.

La construction des oculaires qui redressent les objets, moyennant deux lentilles seulement, n'est pas nouvelle *; elle a même été abandonnée, quoique cependant ingénieuse, parce qu'elle restreint beaucoup le champ des lunettes, & le besoin d'augmenter ce champ le plus qu'il est possible, a fait qu'on a eu recours à l'usage de trois & de quatre lentilles, placées à foyers coïncidens les uns aux autres; alors on a allongé forcément, & de beaucoup, la longueur de la lunette: or pour un oculaire, dont le foyer équivalent ne seroit pas moindre que deux pouces, voici la construction qui convient, afin que la lunette ait précisément la même longueur qu'elle auroit si l'oculaire étoit simple, & qu'il renversât les objets.

* Seconde partie de l'Optique du P. Chérubin, Capucin, année 1671. D'une autre part, quant à la construction des oculaires équivalens qui renversent les objets, & qui est

préférable à tout autre, l'oculaire près de l'œil doit être le tiers du foyer de l'autre, & la distance entre les deux doit être les deux tiers du foyer du plus grand des deux.

Soit $\left\{ \begin{array}{l} f, \text{ foyer des rayons parallèles de la lentille } a, \text{ la plus proche de l'œil. Fig. 9.} \\ \varphi, \text{ foyer des rayons parallèles de la lentille } c, \text{ la plus éloignée de l'œil,} \\ D, \text{ foyer relatif} \\ F, \text{ foyer équivalent} \end{array} \right\} \text{ des lentilles } a \text{ \& } c.$

La position de l'œil ne devant pas différer de celle qui auroit lieu, s'il n'y avoit qu'une seule lentille, dont le foyer seroit F , & qui renversât les objets, on est dans le cas de la formule qui convient tout-à-la-fois aux oculaires & aux objectifs à double image; ainsi, on a pour condition

$$\varphi = \frac{2 F f (F - f)}{(F + f)^2}.$$

Cela posé,

$$\text{on a } \left\{ \begin{array}{l} Da = 2 F - f = f + \frac{\varphi}{F f} (F + f)^2, \\ Dc = \frac{2 F (F - f)}{F + f} = -\frac{\varphi}{f} (F + f), \\ ac = \frac{f (3 F - f)}{F + f}. \end{array} \right.$$

D'ailleurs il convient que f soit moindre que φ ; ainsi on peut adopter le rapport des foyers qui suit.

$$\text{Rapport numérique } \left\{ \begin{array}{l} F = 6498, \\ f = \frac{1}{18} F = 361, \\ \varphi = \frac{14}{161} F = 612. \end{array} \right.$$

$$\text{Position numérique } \left\{ \begin{array}{l} Da = 12635, \\ Dc = 11628, \\ ac = 1007. \end{array} \right.$$

Réduisant ces dimensions relatives entr'elles à celle d'un *Voy. Tabk VII,* foyer équivalent F de 6 pouces, on aura les mesures qui *page 48.* suivent.

$$\text{Pour un foyer équivalent de 6 pouces... } \left\{ \begin{array}{l} f = 0.40, \text{ foyer des rayons parallèles de la lentille } a, \\ \varphi = 0.68, \text{ foyer des rayons parallèles de la lentille } c, \\ Da = 11.80, \\ Dc = 10.88, \\ Ac = 0.112 \end{array} \right\} \text{ positions respectives des lentilles } a \text{ \& } c,$$

Alors un oculaire qui auroit les dimensions qu'on vient de calculer, redresseroit l'image des objets, & n'allongeroit pas plus la lunette qu'un oculaire simple qui les renverseroit; car pour un oculaire simple de 6 pouces, & qui renverse l'image des objets, l'œil s'éloigne du foyer de l'objectif de 12 pouces: ici, *figure 9*, pour un pareil foyer équivalent, l'œil s'éloigne de la lentille *a* de 4 lignes, & le surplus *Da* est de 11 pouces 8 lignes.

Quant à la facilité de l'exécution, on peut faire $f = \phi$, mais cette construction augmente même de beaucoup la longueur de l'oculaire dans un grand nombre de cas; aussi n'emploie-t-on cette construction que lorsqu'on veut voir de petits objets proches: enfin, cette construction, utile à de certains égards, est toute calculée dans la *Table VIII, page 48*, & cette huitième Table offre huit manières différentes de construire les oculaires qu'on voudra, & pour le cas où l'on veut voir les objets dans une situation droite & naturelle. Présentement voici les dimensions d'objectifs achromatiques, que je crois préférables à celles de mon Mémoire, année 1770, pages 461—486.

Dimensions des Objectifs achromatiques composés de trois
 Fig. 12. *Lentilles cB, BA, AA; celles du milieu BA concave de flint-glass ou de crystal d'Angleterre; & les deux autres CB, AA convexe, de crow-glass ou de glace de Venise.*

Pour la facilité du travail des verres, il convenoit d'admettre le moins possible de courbures différentes; aussi, dans cette vue, n'ai-je admis en 1770 que deux courbures différentes: or comme cette loi que je m'étois prescrite, ne détruit réellement que l'aberration de réfrangibilité, qui, à la vérité, est la plus nuisible, je vais cette fois admettre trois différentes courbures *A, B, C*; & de-là s'ensuivra que je détruirai entièrement l'aberration de réfrangibilité, & que

je restreindrai celle de sphéricité à une quantité moindre que celle d'un objectif simple AA ; d'ailleurs j'admettrai aussi, comme je l'ai déjà fait, *Mémoires de l'Académie, année 1770, pages 465*, les réfractions qui suivent.

Pour le Verre de Venise, dont le pouce cube pèse 950 grains.

Réfraction des rayons rouges..... 1,5258.

Réfraction des rayons moyens..... 1,5298.

Réfraction des rayons violets..... 1,5433.

Pour le crystal d'Angleterre, dont le pouce cube pèse 1215 grains.

Réfraction des rayons rouges..... 1,5920.

Réfraction des rayons moyens..... 1,5973.

Réfraction des rayons violets..... 1,6229.

Ces réfractions ont été établies d'après un grand nombre d'expériences que j'ai vu faire à M. l'abbé Bouriot; & ayant admis ces résultats de réfraction, j'ai calculé trigonométriquement, *page 49*, les neuvième & dixième Tables qui terminent ce Mémoire. On trouvera donc ci-après les oculaires achromatiques, calculés depuis 9 lignes jusqu'à 7 pouces, & les objectifs depuis 2 pouces jusqu'à 12 pieds de foyer.

Avant de procéder au calcul, j'envisage la lentille AA , Fig. 12. placée du côté de l'œil, comme étant un objectif simple & aussi comme étant la lentille principale; puis les deux précédens AB , BC , comme devant produire sur la lentille principale AA l'effet de diminuer le plus qu'il est possible l'aberration de sphéricité, & d'annuler en même temps celle de réfrangibilité; d'où l'on voit que les rayons entrant dans la précédente lentille cB , suivant une direction parallèle à l'axe, doivent, après avoir traversé les deux lentilles CB , BA , sortir de la seconde BA , suivant des directions & dispersions HR de rayon rouge, HM de rayon moyen, Fig. 10. & HV de rayon violet; & qu'après avoir traversé de nouveau l'objectif simple AA , ils doivent sortir ensemble & suivre une seule & même direction HD , ainsi en fixant une distance

Fig. 10. focale AD qui soit celle de la lentille simple AA . Voici comment se fait le calcul requis.

Fig. 12. Soit $\left\{ \begin{array}{l} r \text{ rayon des courbures égales } AA \text{ de la lentille de crow-glass,} \\ p \text{ rapport de la réfraction moyenne dans le crow-glass,} \\ f \text{ foyer des rayons parallèles pour la réfraction moyenne,} \end{array} \right.$

$DA = f = \frac{r}{2(p-1)}$ pour une ouverture infiniment petite d'objectif,

AH demi-ouverture prise convenablement, mais à volonté.

1.° Avec AH , pris à volonté, & avec $f = \frac{r}{2(p-1)}$,

on calculera la direction, suivant laquelle le rayon moyen auroit dû entrer dans la lentille principale AA , pour sortir suivant la direction HD , assujettie à la distance focale

$$f = \frac{r}{2(p-1)}.$$

Fig. 12. 2.° Avec l'arc Bh , pris comme il convient, savoir, à peu-près double de l'arc AH ; on calculera pour l'intérieur de la première lentille CB (*figure 11*) la position FN , qu'auroit dû avoir le rayon moyen (*figure 10*) pour prendre la direction HD de la sortie du rayon moyen.

Fig. 11. 3.° Avec l'angle NFK (du rayon moyen FN , avec FK , parallèle à l'axe des lentilles) on cherchera dans la Table qui suit, l'angle LFK qui lui correspond : alors cet angle LFK est (*figure 12*) la valeur de l'arc C , eu égard aux évaluations arbitraires des arcs Bh , AH . Ainsi laissant de côté la destruction de l'aberration de réfrangibilité, on détruira ici celle de sphéricité.

DES SCIENCES.
POUR LE VERRE DE VENISE.

39

Figure 11.

TABLE de la correspondance de l'angle calculé NFK avec l'angle cherché LFK, dont l'arc C est la mesure. L'arc C est la première courbure de la première lentille CB de l'objectif total C, B, A, A.

| NFK. | L F K ou c. | DIFFÉR. | NFK. | L F K ou c. | DIFFÉR. | NFK. | L F K ou c. | DIFFÉR. |
|-------|----------------|---------|-------|----------------|---------|-------|----------------|---------|
| D. M. | D. M. S. | M. S. | D. M. | D. M. S. | M. S. | D. M. | D. M. S. | M. S. |
| 0. 0 | 0. 0. 0 | | 3. 0 | 8. 34. 39 | | 6. 0 | 16. 57. 18 | |
| 0. 20 | 0. 57. 25 | 57. 25 | 3. 20 | 9. 31. 18 | 56. 39 | 6. 20 | 17. 51. 56 | 54. 38 |
| 0. 40 | 1. 54. 48 | 57. 23 | 3. 40 | 10. 27. 46 | 56. 28 | 6. 40 | 18. 46. 17 | 54. 21 |
| 1. 0 | 2. 52. 9 | 57. 21 | 4. 0 | 11. 24. 5 | 56. 19 | 7. 0 | 19. 40. 19 | 54. 2 |
| 1. 20 | 3. 49. 29 | 57. 20 | 4. 20 | 12. 20. 12 | 56. 7 | 7. 20 | 20. 34. 5 | 53. 46 |
| 1. 40 | 4. 46. 43 | 57. 14 | 4. 40 | 13. 16. 4 | 55. 52 | 7. 40 | 21. 27. 30 | 53. 25 |
| 2. 0 | 5. 43. 51 | 57. 8 | 5. 0 | 14. 11. 44 | 55. 40 | 8. 0 | 22. 20. 35 | 53. 5 |
| 2. 20 | 6. 40. 54 | 57. 3 | 5. 20 | 15. 7. 11 | 55. 27 | 8. 20 | 23. 13. 22 | 52. 47 |
| 2. 40 | 7. 37. 51 | 56. 57 | 5. 40 | 16. 2. 29 | 55. 18 | 8. 40 | 24. 5. 52 | 52. 30 |
| 3. 0 | 8. 34. 39 | 56. 48 | 6. 0 | 16. 57. 18 | 54. 49 | 9. 0 | 24. 57. 6 | 51. 14 |

Quelle que soit la relation établie entre les courbures *A* & *B*, Fig. 12. on trouvera toujours avec la Table précédente la courbure *C*, qui convient pour que le rayon moyen *EF*, parallèle à Fig. 11. l'axe *GD*, sorte de la lentille simple *AA*, suivant la direction Fig. 10. prescrite *HD*; mais si d'ailleurs la direction des rayons rouges & violets à la sortie des lentilles *CB*, *BA*, ne forme pas un angle *VHR*, ou *uHr* de dispersion, qui soit précisément celui qui convient, on fera de nouveau une seconde ou au plus une troisième supposition pour l'établissement du rapport de la courbure *A* à la courbure *B*, & alors on fixera Fig. 12. décidément la vraie courbure *C*, tant pour la destruction complète de l'aberration de réfrangibilité, que pour la diminution considérable de celle de sphéricité.

Fig. 12. 1.^o Soit la courbure A de..... $20^d\ 0' 0''$,
la distance focale de..... $1,0000$,
le rayon de la courbure A , de.. $1,0605$;

On trouvera {
courbure $B = 29^d\ 20' 0''$,
courbure $C = 20. 35. 0$,
rayon de la courbure $B = 0,7706$,
rayon de la courbure $C = 1,0738$,
ouverture de l'objectif = $0,7248$.

Cette détermination convient à une distance focale de 12 lignes, eu égard à une épaisseur de verre d'environ 2 lignes: d'ailleurs, ce rapport corrige dans l'objectif simple AA une aberration de réfrangibilité de $46' 31''$, & une de sphéricité de $3^d\ 51' 10''$.

2.^o Soit la courbure A de..... $10^d\ 0' 0''$.

La distance focale & le rayon de la courbure A , comme dans le 1.^o

On trouvera {
courbure $B = 19^d\ 9' 0''$,
courbure $C = 13. 4. 6$,
rayon de la courbure $B = 0,5696$,
rayon de la courbure $C = 0,8263$,
ouverture de l'objectif = $0,3680$.

Cette détermination convient à une distance focale de 42 lignes, & corrige dans l'objectif simple AA une aberration de réfrangibilité de $21' 29''$, & une de sphéricité de $33' 11''$.

3.^o Soit la courbure A de..... $5^d\ 0' 00''$.

La distance focale ainsi que le rayon de la courbure A , comme dans le 1.^o

On trouvera {
courbure $B = 10^d\ 25' 43''$,
courbure $C = 6. 55. 27$,
rayon de la courbure $B = 0,5128$,
rayon de la courbure $C = 0,7694$,
ouverture de l'objectif = $0,1847$.

Fig. 12. Cette détermination convient à une distance focale de 12 pouces, & corrige dans l'objectif simple AA une aberration de réfrangibilité de $10' 35''$, & une de sphéricité de $6' 17''$.

4.^o Soit la courbure A de..... $2^d\ 30' 0''$.

La

La distance focale ainsi que le rayon de la courbure A , comme dans le 1.^o Fig. 12.

$$\text{On trouvera } \left\{ \begin{array}{l} \text{courbure } B = 5^{\circ} 15' 43'', \\ \text{courbure } C = 3. 30. 6, \\ \text{rayon de la courbure } B = 0,5058, \\ \text{rayon de la courbure } C = 0,7582, \\ \text{ouverture de l'objectif} = 0,0924. \end{array} \right.$$

Cette détermination convient à une distance focale de 54 pouces, & corrige dans l'objectif simple AA une aberration de réfrangibilité de $5' 12''$, & une de sphéricité de $1' 52''$.

D'après ces résultats, on juge facilement que le rapport des courbures ne peut être constant; que celui qui convient aux petites lunettes ne peut convenir aux grandes, & réciproquement; on ne doit donc pas manquer d'avoir égard à l'ouverture qu'on se propose de donner à l'objectif; on sait aussi que l'épaisseur des verres étant limitée, les ouvertures ne peuvent manquer de l'être, & que par cette raison, on est forcé de donner aux objectifs de long foyer, des ouvertures moindres qu'à ceux de court foyer.

C'est d'après les rapports de courbures qui viennent d'être déterminés, que j'ai dressé, *page 49*, les neuvième & dixième Tables, où l'on trouve les dimensions d'oculaires achromatiques calculées depuis 9 lignes de foyer jusqu'à 7 pouces de foyer, & les objectifs, depuis 2 pouces jusqu'à 12 pieds. Un plus ample détail seroit superflu; & si les matières qu'on emploie n'ont pas précisément le même degré de réfringence que celui que je leur ai supposé, on pourra en être averti d'avance par leur pesanteur spécifique; alors on feroit soi-même le calcul qu'exigeroit la circonstance du cas, d'un autre degré de réfringence que celui que j'ai adopté.

T A B L E I.

*Figure 3.**POUR LES OBJECTIFS À DOUBLE IMAGE.**Cas où deux surfaces sont planes & où les autres sont égales entr'elles,
& doivent se travailler dans deux bassins formés l'un dans l'autre.*

| DISTANCE focale équivalente <i>DA</i> ou <i>Dc</i> . | RAYONS des courbures, supposant LA MATIÈRE du poids de 950 grains, LE POUCE CUBE. | DISTANCE relative ou totale <i>Da</i> . | DISTANCE <i>Aa</i> ou <i>Ca</i> entre LES LENTILLES. |
|--|---|--|---|
| <i>pieds. pouces.</i> | <i>pieds. pouces. lignes.</i> | <i>pieds. pouces.</i> | <i>pieds. pouces.</i> |
| 0. 6 | 0. 6. 4 | 1. 6 | 1. 0 |
| 1. 0 | 1. 0. 9 | 3. 0 | 2. 0 |
| 2. 0 | 2. 1. 6 | 6. 0 | 4. 0 |
| 3. 0 | 3. 2. 2 | 9. 0 | 6. 0 |
| 4. 0 | 4. 2. 11 | 12. 0 | 8. 0 |
| 5. 0 | 5. 3. 7 | 15. 0 | 10. 0 |
| 6. 0 | 6. 4. 4 | 18. 0 | 12. 0 |
| Cette construction a l'inconvénient de tripler la longueur de la Lunette, & d'employer des surfaces planes. | | | |

TABLE II.

*Figure 4.**POUR LES OBJECTIFS À DOUBLE IMAGE.*

*Cas où les Lentilles a & A ont des foyers égaux, & où la Lentille c
à un foyer égal au quart des deux autres.*

| DISTANCE focale équivalente DA , & FOYER des Lentilles A & a . | FOYER de LA LENTILLE c . | DISTANCE relative ou totale Da . | DISTANCE DC . |
|--|----------------------------------|---|-----------------------|
| <i>pieds. pouces.</i> | <i>pieds. pouces. lignes.</i> | <i>pieds. pouces.</i> | <i>pieds. pouces.</i> |
| 0. 6 | 0. 1. 6 | 1. 0 | 0. 3 |
| 1. 0 | 0. 3. 0 | 2. 0 | 0. 6 |
| 2. 0 | 0. 6. 0 | 4. 0 | 1. 0 |
| 3. 0 | 0. 9. 0 | 6. 0 | 1. 6 |
| 4. 0 | 1. 0. 0 | 8. 0 | 2. 0 |
| 5. 0 | 1. 3. 0 | 10. 0 | 2. 6 |
| 6. 0 | 1. 6. 0 | 12. 0 | 3. 0 |

Cette construction doublera la distance totale & relative Da à l'égard du foyer équivalent DA .

TABLE III.

Figure 5.

Pour les Objectifs à double image, construction diplantidienne plus avantageuse que les deux précédentes.

Ici la Lentille a occupe le milieu de la Lentille percée A, & la Lentille C est placée au milieu de la distance totale DA.

Dans ce cas, la condition des foyers est $\phi = \frac{Ff(F-f)}{(F+f)^2}$.

| $Da = F$ F O Y E R de la Lentille percée A, & aussi Foyer équivalent. | f F O Y E R de la Lentille a, placée dans le vide de la Lentille percée A. | ϕ F O Y E R de la Lentille C. | DC P O S I T I O N de la Lentille C. |
|--|---|---|---|
| <i>pieds pouces</i> | <i>pieds pouces</i> | <i>pieds pouc. lignes</i> | <i>pieds pouc.</i> |
| 0. 6 | 0. 2 | 0. 0. 9 | 0. 3 |
| 1. 0 | 0. 4 | 0. 1. 6 | 0. 6 |
| 1. 6 | 0. 6 | 0. 2. 3 | 0. 9 |
| 2. 0 | 0. 8 | 0. 3. 0 | 1. 0 |
| 2. 6 | 0. 10 | 0. 3. 9 | 1. 3 |
| 3. 0 | 1. 0 | 0. 4. 6 | 1. 6 |
| 3. 6 | 1. 2 | 0. 5. 3 | 1. 9 |
| 4. 0 | 1. 4 | 0. 6. 0 | 2. 0 |
| 4. 6 | 1. 6 | 0. 6. 9 | 2. 3 |
| 5. 0 | 1. 8 | 0. 7. 6 | 2. 6 |
| 5. 6 | 1. 10 | 0. 8. 3 | 2. 9 |
| 6. 0 | 2. 0 | 0. 9. 0 | 3. 0 |
| 6. 6 | 2. 2 | 0. 9. 9 | 3. 3 |
| 7. 0 | 2. 4 | 0. 10. 6 | 3. 6 |
| 7. 6 | 2. 6 | 0. 11. 3 | 3. 9 |
| 8. 0 | 2. 8 | 1. 0. 0 | 4. 0 |
| 8. 6 | 2. 10 | 1. 0. 9 | 4. 3 |
| 9. 0 | 3. 0 | 1. 1. 6 | 4. 6 |
| 9. 6 | 3. 2 | 1. 2. 3 | 4. 9 |
| 10. 0 | 3. 4 | 1. 3. 0 | 5. 0 |
| 10. 6 | 3. 6 | 1. 3. 9 | 5. 3 |
| 11. 0 | 3. 8 | 1. 4. 6 | 5. 6 |
| 11. 6 | 3. 10 | 1. 5. 3 | 5. 9 |
| 12. 0 | 4. 0 | 1. 6. 0 | 6. 0 |
| 24. 0 | 8. 0 | 3. 0. 0 | 12. 0 |

TABLE IV.

Figure 6.

Pour les Objectifs à double image, construction diplantidienne qui a sur les trois précédentes, l'avantage d'avoir une distance focale relative D_a , moindre que la distance équivalente DA .

Ici la Lentille a a un foyer moitié de la Lentille percée A, & la Lentille c a un foyer qui est les quatre cinquièmes du foyer de la même Lentille A.

| $DA = F$ FOYER de la Lentille percée A, & aussi Foyer équiv. | f FOYER de la Lentille a, savoir Distance Ba. | φ FOYER de la Lentille C. | Da POSITION de la Lentille a, ou Foyer relatif. | DC POSITION de la Lentille C. |
|---|--|--|---|--|
| pieds. pouces | pieds. pouc. | pieds. pouc. lign. | pieds. pouc. lign. | pieds. pouc. lign. |
| 0. 6 | 0. 3 | 0. 0. 4,8 | 0. 4. 9,6 | 0. 1. 2,4 |
| 1. 0 | 0. 6 | 0. 0. 9,6 | 0. 9. 7,2 | 0. 2. 4,8 |
| 1. 6 | 0. 9 | 0. 1. 2,4 | 1. 2. 4,8 | 0. 3. 7,2 |
| 2. 0 | 1. 0 | 0. 1. 7,2 | 1. 7. 2,4 | 0. 4. 9,6 |
| 2. 6 | 1. 3 | 0. 2. 0,0 | 2. 0. 0,0 | 0. 6. 0,0 |
| 3. 0 | 1. 6 | 0. 2. 4,8 | 2. 4. 9,6 | 0. 7. 2,4 |
| 3. 6 | 1. 9 | 0. 2. 9,6 | 2. 9. 7,2 | 0. 8. 4,8 |
| 4. 0 | 2. 0 | 0. 3. 2,4 | 3. 2. 4,8 | 0. 9. 7,2 |
| 4. 6 | 2. 3 | 0. 3. 7,2 | 3. 7. 2,4 | 0. 10. 9,6 |
| 5. 0 | 2. 6 | 0. 4. 0,0 | 4. 0. 0,0 | 1. 0. 0,0 |
| 5. 6 | 2. 9 | 0. 4. 4,8 | 4. 4. 9,6 | 1. 1. 2,4 |
| 6. 0 | 3. 0 | 0. 4. 9,6 | 4. 9. 7,2 | 1. 2. 4,8 |
| 6. 6 | 3. 3 | 0. 5. 2,4 | 5. 2. 4,8 | 1. 3. 7,2 |
| 7. 0 | 3. 6 | 0. 5. 7,2 | 5. 7. 2,4 | 1. 4. 9,6 |
| 7. 6 | 3. 9 | 0. 6. 0,0 | 6. 0. 0,0 | 1. 6. 0,0 |
| 8. 0 | 4. 0 | 0. 6. 4,8 | 6. 4. 9,6 | 1. 7. 2,4 |
| 8. 6 | 4. 3 | 0. 6. 9,6 | 6. 9. 7,2 | 1. 8. 4,8 |
| 9. 0 | 4. 6 | 0. 7. 2,4 | 7. 2. 4,8 | 1. 9. 7,2 |
| 9. 6 | 4. 9 | 0. 7. 7,2 | 7. 7. 2,4 | 1. 10. 9,6 |
| 10. 0 | 5. 0 | 0. 8. 0,0 | 8. 0. 0,0 | 2. 0. 0,0 |
| 10. 6 | 5. 3 | 0. 8. 4,8 | 8. 4. 9,6 | 2. 1. 2,4 |
| 11. 0 | 5. 6 | 0. 8. 9,6 | 8. 9. 7,2 | 2. 2. 4,8 |
| 11. 6 | 5. 9 | 0. 9. 2,4 | 9. 2. 4,8 | 2. 3. 7,2 |
| 12. 0 | 6. 0 | 0. 9. 7,2 | 9. 7. 2,4 | 2. 4. 9,6 |
| 24. 0 | 12. 0 | 1. 7. 2,4 | 19. 2. 4,8 | 4. 9. 7,2 |

TABLE V.

Voyez la page 32, & aussi la figure 7.

*Dimensions communes aux Objectifs & aux Oculaires
à double image.*

Pour les oculaires, l'œil sera placé en y ; alors D fera le foyer de l'oculaire.

Pour les objectifs, l'œil sera au contraire placé au-delà de D , & le point D sera le foyer de l'objectif.

| $DA = P$ FOYER de la Lentille percée A , & aussi Foyer équiv. | f FOYER de la Lentille a , & aussi distance Aa . | ϕ FOYER de la Lentille C . | Da POSITION de la Lentille a , & aussi Foyer relatif total. | DC POSITION de la Lentille c . |
|--|---|--|--|---|
| <i>pieds. pouces.</i> | <i>pieds. pouc. lign.</i> | <i>pieds. pouc. lign.</i> | <i>pieds. pouc. lign.</i> | <i>pieds. pouc. lign.</i> |
| 0. 1 | 0. 0. 6 | 0. 0. 2,6 | 0. 1. 6 | 0. 0. 8 |
| 0. 2 | 0. 1. 0 | 0. 0. 5,3 | 0. 3. 0 | 0. 1. 4 |
| 0. 4 | 0. 2. 0 | 0. 0. 10,7 | 0. 6. 0 | 0. 2. 8 |
| 0. 6 | 0. 3. 0 | 0. 1. 4,0 | 0. 9. 0 | 0. 4. 0 |
| 0. 8 | 0. 4. 0 | 0. 1. 9,3 | 1. 0. 0 | 0. 5. 4 |
| 0. 10 | 0. 5. 0 | 0. 2. 2,6 | 1. 3. 0 | 0. 6. 8 |
| 1. 0 | 0. 6. 0 | 0. 2. 8,0 | 1. 6. 0 | 0. 8. 0 |
| 1. 6 | 0. 9. 0 | 0. 4. 0,0 | 2. 3. 0 | 1. 0. 0 |
| 2. 0 | 1. 0. 0 | 0. 5. 4,0 | 3. 0. 0 | 1. 4. 0 |
| 2. 6 | 1. 3. 0 | 0. 6. 8,0 | 3. 9. 0 | 1. 8. 0 |
| 3. 0 | 1. 6. 0 | 0. 8. 0,0 | 4. 6. 0 | 2. 0. 0 |
| 3. 6 | 1. 9. 0 | 0. 9. 4,0 | 5. 3. 0 | 2. 4. 0 |
| 4. 0 | 2. 0. 0 | 0. 10. 8,0 | 6. 0. 0 | 2. 8. 0 |
| 4. 6 | 2. 3. 9 | 1. 0. 0,0 | 6. 9. 0 | 3. 0. 0 |
| 5. 0 | 2. 6. 0 | 1. 1. 4,0 | 7. 6. 0 | 3. 4. 0 |
| 5. 6 | 2. 9. 0 | 1. 2. 8,0 | 8. 3. 0 | 3. 8. 0 |
| 6. 0 | 3. 0. 0 | 1. 4. 0,0 | 9. 0. 0 | 4. 0. 0 |
| 6. 6 | 3. 3. 0 | 1. 5. 4,0 | 9. 9. 0 | 4. 4. 0 |
| 7. 0 | 3. 6. 0 | 1. 6. 8,0 | 10. 6. 0 | 4. 8. 0 |
| 7. 6 | 3. 9. 0 | 1. 8. 0,0 | 11. 3. 0 | 5. 0. 0 |
| 8. 0 | 4. 0. 0 | 1. 9. 4,0 | 12. 0. 0 | 5. 4. 0 |
| 9. 0 | 4. 6. 0 | 2. 0. 0,0 | 13. 6. 0 | 6. 0. 0 |
| 10. 0 | 5. 0. 0 | 2. 2. 8,0 | 15. 0. 0 | 6. 8. 0 |
| 11. 0 | 5. 6. 0 | 2. 5. 4,0 | 16. 6. 0 | 7. 4. 0 |
| 12. 0 | 6. 0. 0 | 2. 8. 0,0 | 18. 0. 0 | 8. 0. 0 |

TABLE VI.

Figure 8.

*Dimensions communes aux Objectifs & aux Oculaires
à double image.*

Dans ce cas, & dans le précédent, $\varphi = \frac{2 F f (F - f)}{(F + f)^2}$.

Ici l'on a fait les foyers des Lentilles *a* & *c* égaux entr'eux, ce qui offre une facilité plus grande que celle de la Table précédente, mais ayant pour inconvénient celui d'avoir des foyers *f* & φ très-petits.

| <i>DA = F</i> FOYER de la Lentille percée <i>A</i> , & aussi Foyer équival. | <i>f = φ</i> FOYER des Lentilles égales <i>a</i> & <i>c</i> . | <i>Da</i> POSITION de la Lentille <i>a</i> , & aussi Foyer relatif total. | <i>DC</i> POSITION de la Lentille <i>C</i> . |
|--|---|--|---|
| pieds pouces | pieds pouces lignes | pieds pouces lignes | pieds pouces lignes |
| 0. 1 | 0. 0. 2,9 | 0. 1. 9,2 | 0. 1. 2,9 |
| 0. 2 | 0. 0. 5,7 | 0. 3. 6,4 | 0. 2. 5,7 |
| 0. 4 | 0. 0. 11,3 | 0. 7. 0,7 | 0. 4. 11,4 |
| 0. 6 | 0. 1. 5,0 | 0. 10. 7,0 | 0. 7. 5,0 |
| 0. 8 | 0. 1. 10,7 | 1. 2. 1,4 | 0. 9. 10,7 |
| 0. 10 | 0. 2. 4,4 | 1. 5. 7,7 | 1. 0. 4,4 |
| 1. 0 | 0. 2. 10,0 | 1. 9. 2,0 | 1. 2. 10,0 |
| 1. 6 | 0. 4. 3,0 | 2. 7. 9,0 | 1. 10. 3,0 |
| 2. 0 | 0. 5. 8,0 | 3. 6. 4,0 | 2. 5. 8,0 |
| 2. 6 | 0. 7. 1,0 | 4. 4. 11,0 | 3. 1. 1,0 |
| 3. 0 | 0. 8. 6,0 | 5. 3. 6,0 | 3. 8. 6,0 |
| 3. 6 | 0. 9. 11,0 | 6. 2. 1,0 | 4. 3. 11,0 |
| 4. 0 | 0. 11. 4,0 | 7. 0. 8,0 | 4. 11. 4,0 |
| 4. 6 | 1. 0. 9,0 | 7. 11. 3,0 | 5. 6. 9,0 |
| 5. 0 | 1. 2. 2,0 | 8. 9. 10,0 | 6. 2. 2,0 |
| 5. 6 | 1. 3. 7,0 | 9. 8. 5,0 | 6. 9. 7,0 |
| 6. 0 | 1. 5. 0,0 | 10. 7. 0,0 | 7. 5. 0,0 |
| 6. 6 | 1. 6. 5,0 | 11. 5. 7,0 | 8. 0. 5,0 |
| 7. 0 | 1. 7. 10,0 | 12. 4. 2,0 | 8. 7. 10,0 |
| 7. 6 | 1. 9. 3,0 | 13. 2. 9,0 | 9. 3. 3,0 |
| 8. 0 | 1. 10. 8,0 | 14. 1. 4,0 | 9. 10. 8,0 |
| 9. 0 | 2. 1. 6,0 | 15. 10. 6,0 | 11. 1. 6,0 |
| 10. 0 | 2. 4. 4,0 | 17. 7. 8,0 | 12. 4. 4,0 |
| 11. 0 | 2. 7. 2,0 | 19. 4. 10,0 | 13. 7. 2,0 |
| 12. 0 | 2. 10. 0,0 | 21. 2. 0,0 | 14. 10. 0,0 |

TABLE VII.

*Figure 9.**Dimensions des Oculaires qui redressent l'image des objets.*

Ici l'Oculaire composé de deux Lentilles, n'allonge pas plus la longueur de la Lunette, que si on y substituoit un seul Oculaire simple qui renverferoit les images, comme il a été dit *page 36*; mais la Lunette aura peu de champ, ce qui fait qu'ordinairement on préfère les Oculaires équivalens qui renversent les images, & qui grandissent le champ de la Lunette autant qu'il est possible.

| F FOYER équivalent. | f FOYER de la Lentille a . | ϕ FOYER de la Lentille c . | $a c$ DISTANCE des Lentilles. | $D a$ LONGUEUR totale de l'Oculaire. |
|-----------------------------|---|--|-------------------------------------|---|
| <i>pois. lgn.</i> | <i>lgn. dix.</i> | <i>lgn. dix.</i> | <i>lgn. dix.</i> | <i>pois. lgn. dix.</i> |
| 2. 0 | 1,3 | 2,3 | 3,7 | 3. 10,7 |
| 2. 2 | 1,4 | 2,4 | 4,0 | 4. 2,6 |
| 2. 4 | 1,5 | 2,6 | 4,3 | 4. 6,5 |
| 2. 6 | 1,6 | 2,8 | 4,6 | 4. 10,3 |
| 2. 8 | 1,8 | 3,0 | 4,9 | 5. 2,2 |
| 2. 10 | 1,9 | 3,2 | 5,2 | 5. 6,1 |
| 3. 0 | 2,0 | 3,4 | 5,6 | 5. 10,0 |
| 3. 2 | 2,1 | 3,6 | 5,9 | 6. 1,9 |
| 3. 4 | 2,2 | 3,7 | 6,2 | 6. 5,8 |
| 3. 6 | 2,3 | 3,9 | 6,5 | 6. 9,6 |
| 3. 8 | 2,4 | 4,1 | 6,8 | 7. 1,5 |
| 3. 10 | 2,6 | 4,3 | 7,1 | 7. 5,4 |
| 4. 0 | 2,7 | 4,5 | 7,5 | 7. 9,3 |
| 4. 4 | 2,9 | 4,9 | 8,1 | 8. 5,1 |
| 4. 8 | 3,1 | 5,3 | 8,7 | 9. 0,9 |
| 5. 0 | 3,3 | 5,7 | 9,3 | 9. 8,7 |
| 5. 4 | 3,5 | 6,1 | 9,9 | 10. 4,5 |
| 5. 8 | 3,8 | 6,5 | 10,5 | 11. 0,3 |
| 6. 0 | 4,0 | 6,8 | 11,2 | 11. 8,0 |

TABLE

DIMENSION L'IMAGE DES OBJETS.

gaux.

| F FOYER équivalent | A L E S A E T C, total est D _a . | | | | | | | | | |
|--------------------------|---|---------------------------|-------------------------------------|---------------------------|--|---------------------------|---------------------------|--|---------------------------|--|
| | FOYER DES LENTILLES <i>a</i> & <i>c</i> = 3 l ^g & <i>c</i> = 18 l ^g . | | | | FOYERS DES LENTILLES <i>a</i> & <i>c</i> = 21 l ^g . | | | FOYERS DES LENTILLES <i>a</i> & <i>c</i> = 24 l ^g . | | |
| | <i>D</i> <i>a</i> . | | <i>D</i> <i>a</i> . | | <i>D</i> <i>C</i> . | | <i>D</i> <i>a</i> . | | <i>D</i> <i>C</i> . | |
| | <i>pouc.</i> <i>lign.</i> | | <i>pouc.</i> <i>c.</i> <i>lign.</i> | | <i>pouc.</i> <i>lign.</i> | | <i>pouc.</i> <i>lign.</i> | | <i>pouc.</i> <i>lign.</i> | |
| | <i>lignes.</i> | <i>pouc.</i> <i>lign.</i> | <i>pouc.</i> <i>c.</i> <i>lign.</i> | <i>pouc.</i> <i>lign.</i> | <i>pouc.</i> <i>lign.</i> | <i>pouc.</i> <i>lign.</i> | <i>pouc.</i> <i>lign.</i> | <i>pouc.</i> <i>lign.</i> | <i>pouc.</i> <i>lign.</i> | |
| 3 | 1. 3,0 | 0. . 9,0 | 1. 9,0 | 17. 9,0 | 2. 0,0 | 22. 3,0 | 2. 3,0 | | | |
| 6 | 1. 4,5 | 0. . 6,0 | 2. 0,0 | 11. 10,5 | 2. 3,0 | 14. 6,0 | 2. 6,0 | | | |
| 9 | 1. 7,0 | 1. . 3,0 | 2. 3,0 | 10. 1,0 | 2. 6,0 | 12. 1,0 | 2. 9,0 | | | |
| 12 | 1. 9,7 | 1. . 9,0 | 2. 6,0 | 9. 3,7 | 2. 9,0 | 11. 0,0 | 3. 0,0 | | | |
| 15 | 2. 0,6 | 1. . 6,6 | 2. 9,0 | 8. 11,4 | 3. 0,0 | 10. 5,4 | 3. 3,0 | | | |
| 18 | 2. 3,5 | 1. . 6,0 | 3. 0,0 | 8. 9,5 | 3. 3,0 | 10. 2,5 | 3. 6,0 | | | |
| 21 | 2. 6,4 | 2. . 6,4 | 3. 3,0 | 8. 9,0 | 3. 6,0 | 10. 0,4 | 3. 9,0 | | | |
| 24 | 2. 9,4 | 2. . 7,5 | 3. 6,0 | 8. 9,4 | 3. 9,0 | 10. 0,0 | 4. 0,0 | | | |
| 27 | 3. 0,3 | 2. . 9,0 | 3. 9,0 | 8. 10,3 | 4. 0,0 | 10. 0,4 | 4. 3,0 | | | |
| 30 | 3. 3,3 | 2. . 10,8 | 4. 0,0 | 8. 11,7 | 4. 3,0 | 10. 1,2 | 4. 6,0 | | | |
| 33 | 3. 6,3 | 3. . 0,8 | 4. 3,0 | 9. 1,4 | 4. 6,0 | 10. 2,5 | 4. 9,0 | | | |
| 36 | 3. 9,2 | 3. . 3,0 | 4. 6,0 | 9. 3,2 | 4. 9,0 | 10. 4,0 | 5. 0,0 | | | |
| 42 | 4. 3,2 | 3. . 7,7 | 5. 0,0 | 9. 7,5 | 5. 3,0 | 10. 7,7 | 5. 6,0 | | | |
| 48 | 4. 9,2 | 4. . 0,7 | 5. 6,0 | 10. 0,2 | 5. 9,0 | 11. 0,0 | 6. 0,0 | | | |
| 60 | 5. 9,2 | 5. . 11,4 | 6. 6,0 | 10. 10,3 | 6. 9,0 | 11. 9,6 | 7. 0,0 | | | |
| 72 | 6. 9,1 | 6. . 10,5 | 7. 6,0 | 11. 9,1 | 7. 9,0 | 12. 8,0 | 8. 0,0 | | | |

TABLE IX.

Figure 12.

Dimensions des Objectifs achromatiques composés de trois Lentilles.

Le Verre de Venise pesant 950 grains le pouce cube.

Le Crystal d'Angleterre pesant 1215 grains le pouce cube.

| FOYER de l'Objectif. | RAYONS A, A, A. | RAYONS B, B. | RAYON c. | DIAM. de l'ouverture. |
|-------------------------|--------------------|-----------------|-------------------|-----------------------------|
| pieds po. | pieds pouc. lign. | pieds po. lign. | pieds pouc. lign. | pouc. lign. |
| 0. 2 | 0. 2. 1 | 0. 1. 3 | 0. 1. 10 | 0. 11 |
| 0. 4 | 0. 4. 3 | 0. 2. 3 | 0. 3. 4 | 1. 2 |
| 0. 6 | 0. 6. 4 | 0. 3. 3 | 0. 4. 9 | 1. 5 |
| 0. 8 | 0. 8. 6 | 0. 4. 2 | 0. 6. 3 | 1. 8 |
| 0. 10 | 0. 10. 7 | 0. 5. 2 | 0. 7. 9 | 1. 11 |
| 1. 0 | 1. 0. 9 | 0. 6. 2 | 0. 9. 3 | 2. 2 |
| 1. 6 | 1. 7. 2 | 0. 9. 2 | 1. 1. 9 | 2. 7 |
| 2. 0 | 2. 1. 6 | 1. 0. 3 | 1. 6. 4 | 3. 0 |
| 2. 6 | 2. 7. 10 | 1. 3. 3 | 1. 10. 10 | 3. 5 |
| 3. 0 | 3. 2. 2 | 1. 6. 3 | 2. 3. 4 | 3. 10 |
| 3. 6 | 3. 8. 7 | 1. 9. 3 | 2. 7. 10 | 4. 2 |
| 4. 0 | 4. 2. 11 | 2. 0. 4 | 3. 0. 5 | 4. 7 |
| 4. 6 | 4. 9. 3 | 2. 3. 4 | 3. 4. 11 | 5. 0 |
| 5. 0 | 5. 3. 7 | 2. 6. 4 | 3. 9. 5 | 5. 5 |
| 5. 6 | 5. 10. 0 | 2. 9. 5 | 4. 2. 0 | 5. 10 |
| 6. 0 | 6. 4. 4 | 3. 0. 5 | 4. 6. 6 | 6. 3 |
| 6. 6 | 6. 10. 8 | 3. 3. 5 | 4. 11. 0 | 6. 8 |
| 7. 0 | 7. 5. 0 | 3. 6. 6 | 5. 3. 6 | 7. 0 |
| 7. 6 | 7. 11. 4 | 3. 9. 6 | 5. 8. 0 | 7. 5 |
| 8. 0 | 8. 5. 9 | 4. 0. 6 | 6. 0. 7 | 7. 10 |
| 8. 6 | 9. 0. 1 | 4. 3. 6 | 6. 5. 1 | 8. 3 |
| 9. 0 | 9. 6. 5 | 4. 6. 7 | 6. 9. 8 | 8. 8 |
| 9. 6 | 10. 0. 9 | 4. 9. 7 | 7. 2. 2 | 9. 1 |
| 10. 0 | 10. 7. 2 | 5. 0. 7 | 7. 6. 8 | 9. 6 |
| 12. 0 | 12. 8. 8 | 6. 0. 10 | 9. 1. 0 | 9. 0 |

TABLE X.

Figure 13.

Dimensions des Oculaires achromatiques composés de trois Lentilles.

Le Verre de Venise pesant 950 grains le pouce cube.

Le Crystal d'Angleterre pesant 1215 grains le pouce cube.

| FOYER de l'Oculaire. | RAYON a. | RAYONS b, b. | RAYONS c, c, c. | DIAM. de l'ouverture |
|-------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|----------------------------|
| po. lig. | po. lign. | po. lign. | po. lign. | po. lign. |
| 0. 9 | 1. 3 | 0. 11 | 0. 9 | 0. 5 |
| 1. 0 | 1. 1 | 0. 9 | 1. 1 | 0. 8 |
| 1. 3 | 1. 3 | 0. 11 | 1. 4 | 0. 9 |
| 1. 6 | 1. 5 | 1. 0 | 1. 7 | 0. 18 |
| 1. 9 | 1. 7 $\frac{1}{2}$ | 1. 2 | 1. 10 | 0. 11 |
| 2. 0 | 1. 10 | 1. 3 | 2. 1 | 0. 11 |
| 2. 3 | 2. 0 | 1. 5 | 2. 5 | 1. 0 |
| 2. 6 | 2. 2 | 1. 6 | 2. 8 | 1. 0 |
| 2. 9 | 2. 4 | 1. 8 | 2. 11 | 1. 1 |
| 3. 0 | 2. 6 $\frac{1}{2}$ | 1. 9 | 3. 2 | 1. 2 |
| 3. 3 | 2. 9 | 1. 11 | 3. 5 | 1. 3 |
| 3. 6 | 2. 11 | 2. 0 | 3. 8 $\frac{1}{2}$ | 1. 3 |
| 3. 9 | 3. 1 | 2. 1 $\frac{1}{2}$ | 4. 0 | 1. 3 |
| 4. 0 | 3. 4 | 2. 3 | 4. 3 | 1. 3 |
| 4. 3 | 3. 6 | 2. 4 | 4. 6 | 1. 4 |
| 4. 6 | 3. 8 | 2. 6 | 4. 9 | 1. 4 |
| 4. 9 | 3. 10 | 2. 7 | 5. 0 | 1. 4 |
| 5. 0 | 4. 0 | 2. 9 | 5. 4 | 1. 4 |
| 5. 3 | 4. 3 | 2. 10 | 5. 7 | 1. 5 |
| 5. 6 | 4. 5 | 3. 0 | 5. 10 | 1. 5 |
| 5. 9 | 4. 7 | 3. 1 | 6. 1 | 1. 5 |
| 6. 0 | 4. 9 $\frac{1}{2}$ | 3. 3 | 6. 4 | 1. 5 |
| 6. 3 | 5. 0 | 3. 4 | 6. 7 $\frac{1}{2}$ | 1. 6 |
| 6. 6 | 5. 2 | 3. 5 $\frac{1}{2}$ | 6. 11 | 1. 6 |
| 7. 0 | 5. 6 | 3. 8 $\frac{1}{2}$ | 7. 5 | 1. 7 |

Évidemment , les dix Tables que je viens de donner procureront aux Artistes le moyen de réussir , tant pour les constructions *diplantidiennes*, ou à double image , que pour les objectifs & les oculaires achromatiques , & si , comme je l'ai dit , le succès de mes Tables n'est pas toujours complet , au moins suis-je assuré que l'exécution sera facilitée & abrégée pour les Opticiens éclairés & zélés pour le progrès de leur Art.

Pour les constructions *diplantidiennes* , la lentille percée doit nécessairement être achromatique ; le mieux seroit même qu'elles le fussent toutes trois , car l'ouverture totale de l'objectif étant partagé en deux fonctions différentes , il est clair que les lentilles ne peuvent séparément produire un grand effet qu'autant qu'elles seront aussi bonnes qu'elles peuvent l'être.

Quant aux deux dernières Tables IX & X , qui sont pour les objectifs & pour les oculaires achromatiques , il est sous-entendu que les trois lentilles qui composent l'objectif ou l'oculaire total doivent seulement être écartées entr'elles de l'épaisseur d'une feuille de papier très-mince ; car les lentilles , quoique ne devant pas se toucher , doivent cependant être le plus proche que faire se puisse les unes des autres.



Les Foyers des Rayons parallèles étant
 φ . pour la Lentille non percée..... c
 F pour la Lentille percée..... A
 f pour la Lentille non percée..... a

La Distance des Lentilles, c, A, a , seront

$$Dc = \frac{\varphi}{f} (F+f); DA = F$$

$$Da = f + \frac{\varphi}{Ff} (F+f)^2$$

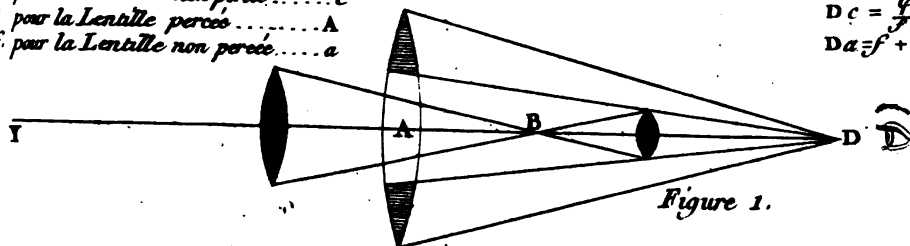


Figure 1.

Trouver les positions relatives Dc, DA, Da
 des Lentilles c, A, a , dont les Foyers des
 Rayons parallèles φ, F, f , sont donnés.

Faites $\begin{cases} cK = F+f \\ cE = \varphi \\ cG = f \end{cases}$

ED , parallèle à GK donne $Dc = \frac{\varphi}{f} (F+f)$

Directement on a $DA = F$

de plus faites $DH = Dc = \frac{\varphi}{f} (F+f)$

le prolongement de HE , donne $DB = \frac{\varphi}{Ff} (F+f)^2$

alors faisant $Ba = f$

vous aurez pour dernière position cherchée

$$Da = Ba + DB = f + \frac{\varphi}{Ff} (F+f)^2$$

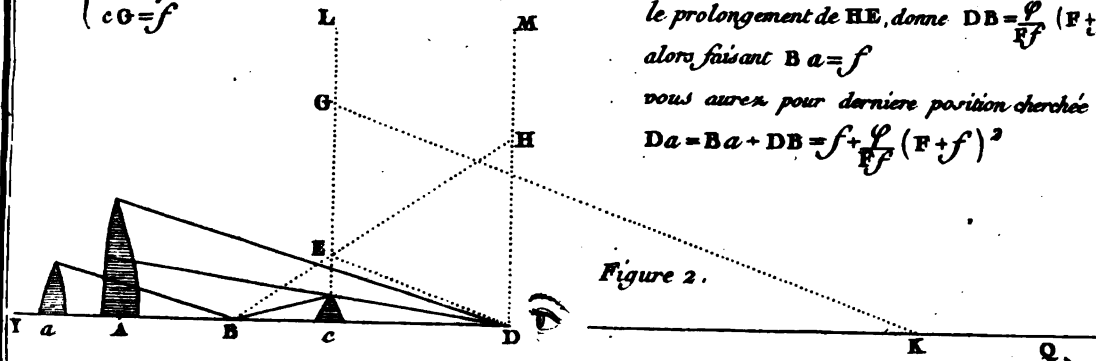


Figure 2.

Table I. page 42.

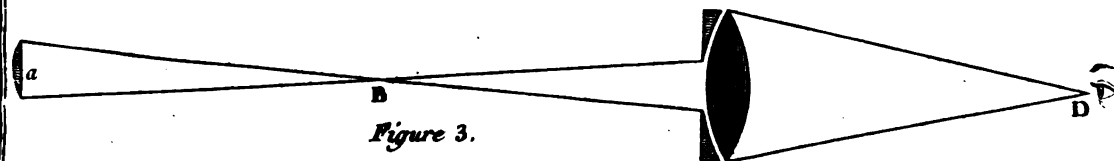


Figure 3.

Système de la Table II.
 Page 43.

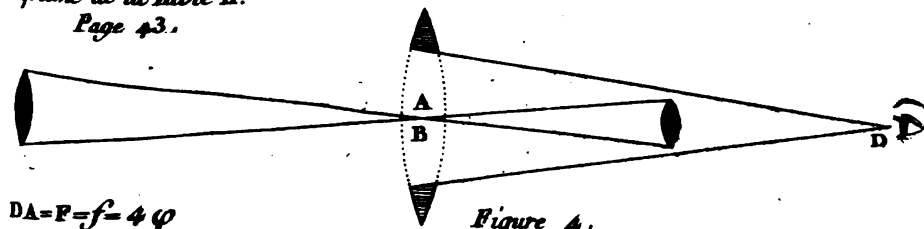
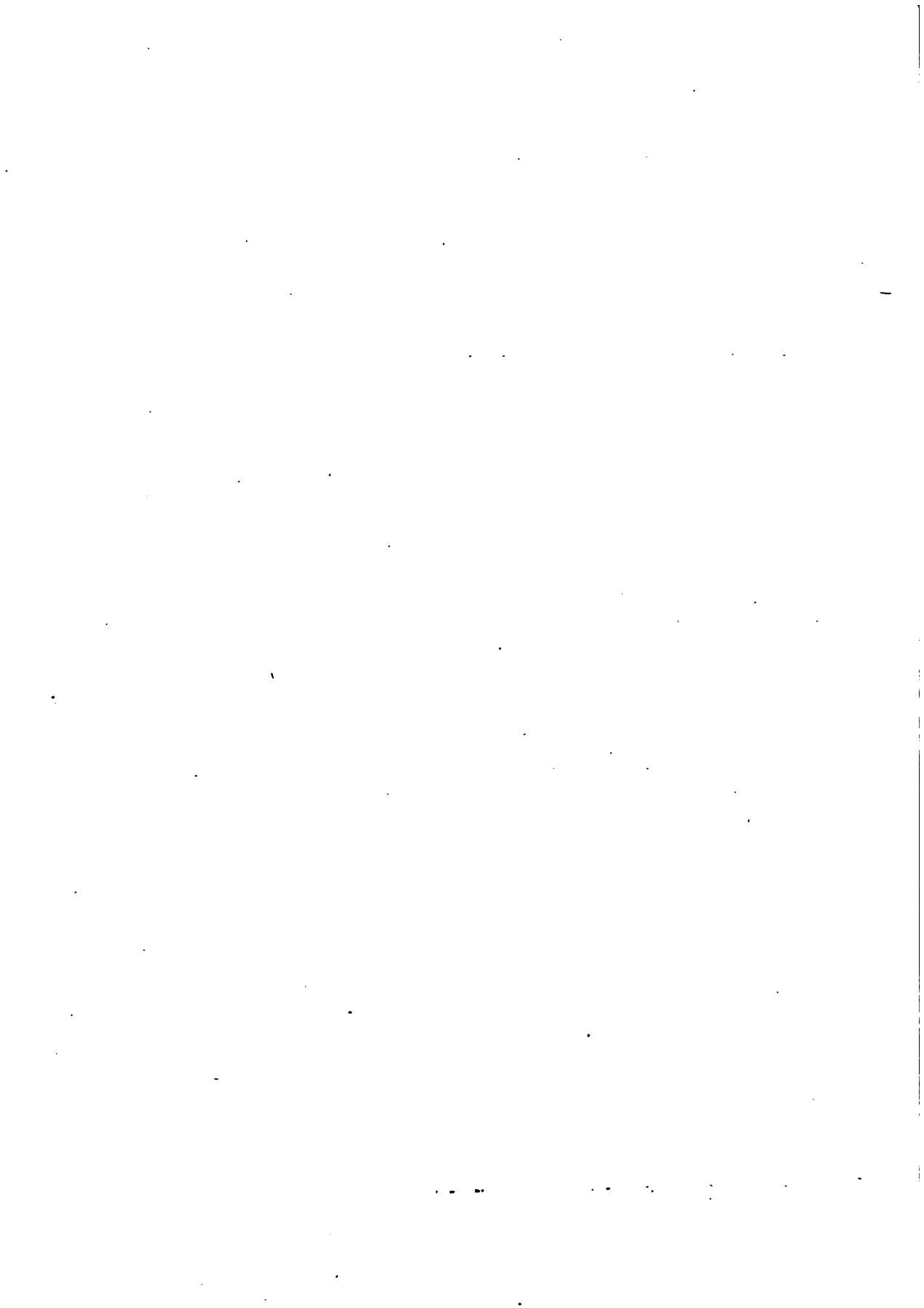


Figure 4.

$$DA = F = f = 4\varphi$$



aa, Lentille placée dans le vuide de la Lentille percée A, A
 DA = F, Foyer de la Lentille percée A, A
 f, Foyer de la Lentille a, placée dans le vuide de la Lentille A
 alors on a pour condition du Foyer
 des rayons parallèles de la Lentille c

$$\varphi = Ff \frac{(F-f)}{(F+f)^2}$$

Table III. page 44.

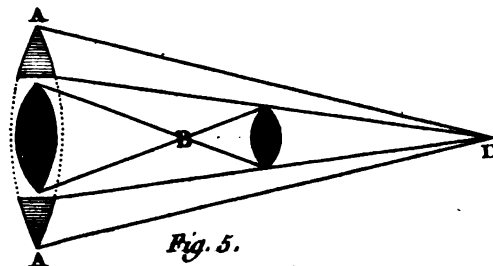


Fig. 5.

Table IV. page 45.

$$DA = F = 2f = 15 \varphi$$

$$DA = \frac{2}{5} F$$

$$DC = \frac{1}{5} F$$

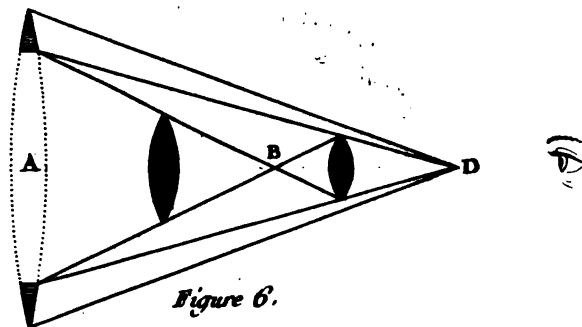


Figure 6.

Objectif, ou Oculaire à double Image
 Table V. page 46

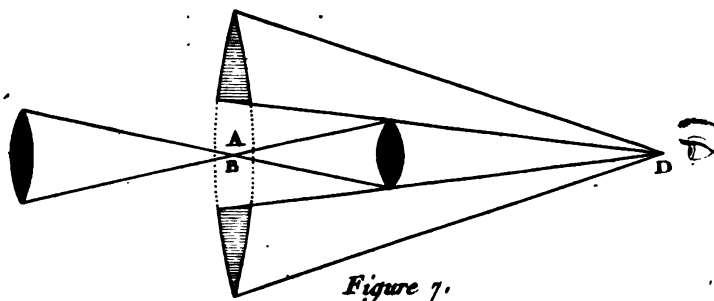


Figure 7.

Objectif, ou Oculaire à double Image
 Table VI. page 47.

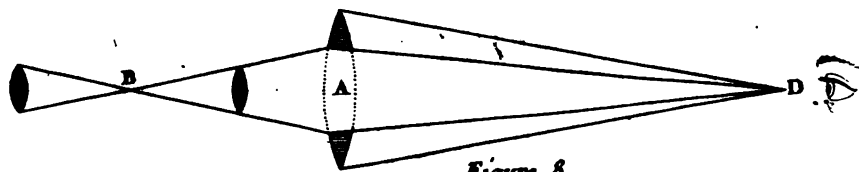


Figure 8.

Pour les Oculaires qui redressent les Images Pag. 48.

F, Foyer equivalent

f, Foyer de la Lentille a

φ, Foyer de la Lentille c

$$DC = \frac{F}{f} (F + f)$$

$$Da = f + \frac{F}{Ff} (F + f)^2$$

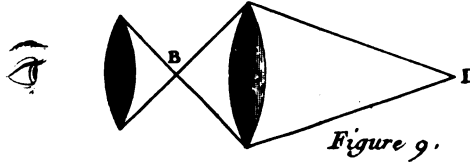


Figure 9.

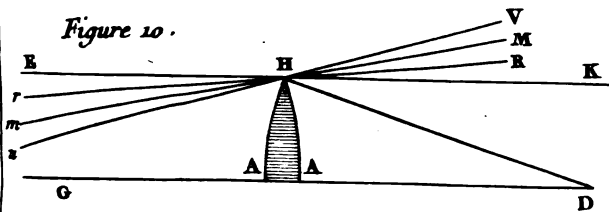


Figure 10.

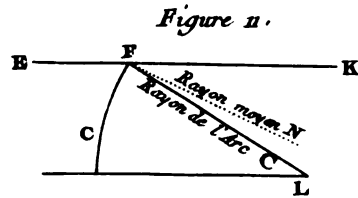
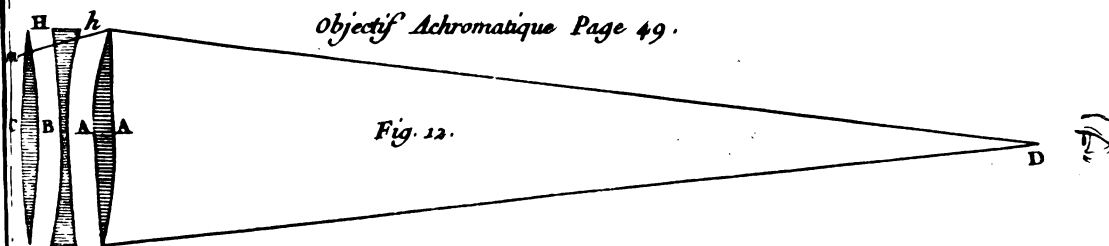


Figure 11.



Objectif Achromatique Page 49.

Fig. 12.

Oculaire Achromatique Page 49.

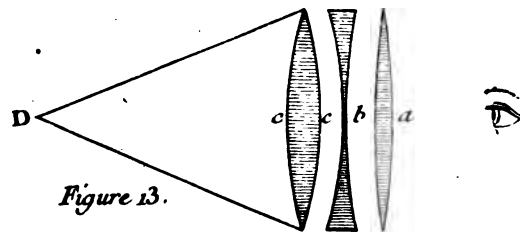


Figure 13.

NOUVELLES MÉTHODES ANALYTIQUES
POUR RÉSOUDRE
DIFFÉRENTES QUESTIONS ASTRONOMIQUES.

QUATORZIÈME MÉMOIRE,

*Dans lequel on applique l'analyse, à la détermination
des orbites des Comètes.*

Par M. DIONIS DU SÉJOUR.

Exposition du Sujet.

(1.) **D**ANS mes Essais sur les Comètes, je me suis contenté de jeter un coup-d'œil rapide sur les Méthodes en usage pour déterminer les orbites de ces Astres: je me proposois de revenir sur ce sujet & d'en faire l'objet d'un travail particulier; je le reprends aujourd'hui. Je vais donner l'analyse qui m'a paru la plus simple & la plus directe pour calculer ces orbites.

On sent aisément que pour calculer la route d'une Comète, il faut satisfaire à deux conditions principales; la première, que les points de la trajectoire décrite par la Comète, quelle qu'elle soit, puissent tous appartenir à un seul & même plan, dont il s'agit de déterminer la position; la seconde, que cette trajectoire soit une section conique. Cette distinction simple entre la nature des questions qu'il s'agit de résoudre, m'a paru mettre un ordre naturel dans les discussions auxquelles on doit se livrer. J'ai donc examiné s'il n'étoit pas possible de partager les équations qui résolvent le Problème des Comètes en deux classes, les unes dépendantes uniquement de la position du plan, les autres au contraire dépendantes de la nature de la trajectoire; de manière que l'on pût résoudre particulièrement les questions relatives

à la position du plan, sans les compliquer des difficultés qui appartiennent à la nature des trajectoires.

La simplicité de cette idée m'avoit toujours frappé. Il m'avoit été aisé de démontrer que si, par exemple, on pouvoit par une voie quelconque, déterminer le rapport entre trois distances successives de la Comète à la Terre, correspondantes à trois observations, & que ce rapport fût linéaire, la distinction précédente entre les équations du Problème, s'établissoit naturellement; & que la position du plan de l'orbite se concluoit facilement, sans avoir à résoudre des équations d'un degré supérieur au second. J'avois vu pareillement qu'en faisant usage d'une propriété démontrée par Newton, sur les cordes des trajectoires décrites en vertu de la force centrale, on n'avoit besoin que de connoître le rapport de deux distances de la Comète. L'équation, il est vrai, est alors d'un degré supérieur au second; mais la solution, presque aussi facile dans la pratique, attendu la forme de l'équation, acquiert un degré d'exactitude que l'on ne peut regretter d'acheter par un peu plus de calculs. Je m'étois donc appliqué à chercher les rapports entre les distances successives de la Comète à la Terre; j'étois même parvenu à un résultat: je n'ai pas eu de peine à l'abandonner lorsque j'ai eu connoissance des savantes recherches de M. de la Grange sur les Comètes. Il me suffit de dire qu'en adoptant son analyse, la solution en devient plus simple, plus exacte & fondée sur des principes plus lumineux.

Quoique les rapports linéaires entre les distances successives de la Comète à la Terre, ne se trouvent pas directement dans le Mémoire de M. de la Grange, il est si aisé de les déduire de ses principes, que j'ai dû lui en faire hommage: je n'ai d'autre mérite que d'avoir aperçu, que si, au lieu d'employer les équations aux distances démontrées par ce savant Géomètre, l'on veut uniquement conclure le rapport de ces quantités, l'on parvient à des relations du premier degré; en un mot, je crois avoir résolu la question à laquelle me paroissoit

tenir le partage naturel des équations du Problème en deux classes distinctes & séparées.

Les rapports déduits du Mémoire de M. de la Grange, présentoient au premier coup-d'œil une difficulté que la suite des calculs pouvoit rendre plus sensible, celle d'exiger des observations trop prochaines entr'elles. En effet, si d'un côté l'exactitude de la méthode demande des observations peu éloignées, d'un autre côté, l'inconvénient d'avoir à déterminer de très-grands élémens par les différences de quantités, chacune très-petites, pouvoit jeter beaucoup d'incertitude dans les résultats; j'ai donc cherché à parer à cet inconvénient. J'ai fait voir comment il étoit possible d'employer sans danger des observations notablement distantes, pourvu toutefois que l'on ait des observations intermédiaires qui lient ces observations éloignées; je serois même tenté de croire que cette manière d'envisager le Problème est préférable dans la pratique; que la méthode acquiert par-là le plus grand degré d'exactitude, & que d'ailleurs les erreurs des observations se compensent.

(2.) Après avoir exposé les équations qui peuvent servir à la détermination du plan de l'orbite, je passe à la détermination de la trajectoire: je suppose d'abord que cette trajectoire est une parabole, & je donne les équations pour calculer la parabole particulière qui satisfait aux observations. Les mêmes formules qui déterminent la parabole, peuvent également servir à rectifier la position du plan, s'il s'étoit glissé quelqu'erreur dans les premiers résultats.

Généralement parlant, ces calculs suffisent pour la totalité des Comètes: si cependant la Comète particulière que l'on calcule avoit parcouru un très-grand arc de sa trajectoire; si elle avoit été vue avant & après son passage par le périhélie, & sur-tout, si les observations se refusoient d'une manière sensible à pouvoir être représentées par une seule & même parabole, de manière, qu'en abandonnant le calcul dans l'hypothèse parabolique, on n'eût point à craindre de courir après une exactitude chimérique; alors il faudroit avoir recours au

54 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

calcul dans l'ellipse. J'entre dans des détails sur cette partie du Problème; en un mot j'applique aux Comètes les principes généraux de la détermination des orbites des Planètes.

Je fais voir enfin qu'il y a un cas particulier où le Problème rigoureux des Comètes se résout sans faire usage des rapports des distances, & sans néanmoins employer des équations d'un degré supérieur au quatrième; c'est celui où la Comète auroit été observée dans les deux nœuds.

P R E M I È R E P A R T I E,

Dans laquelle on suppose que l'orbite des Comètes est parabolique.

N O T I O N S P R É L I M I N A I R E S.

(3.) Le calcul des orbites des Comètes consiste à déterminer, d'après les observations, les élémens suivans:

Le lieu du nœud ascendant sur l'Écliptique;

La distance périhélie de la Comète;

L'inclinaison du plan de l'orbite sur l'Écliptique;

Le sens du mouvement de la Comète dans son orbite, relativement à l'ordre des signes;

La distance du périhélie au nœud ascendant: cette distance se compte sur l'orbite de la Comète;

L'instant du passage de la Comète par le périhélie.

Voyons comment ces élémens se déterminent, d'après les observations.

Équation à la trajectoire de la Comète sur le plan de son orbite.

(4.) Puisque l'équation à la trajectoire de la Comète est une parabole, il faut déterminer d'abord l'équation à la parabole par rapport au foyer.

Fig. 1. Soit AM une parabole; FAD son grand axe; F son foyer; FA la distance du foyer au sommet de la parabole;

soit pris sur FAD une ligne AD égale à FA , & par le point D , soit menée la ligne indéfinie DHE , perpendiculaire à la ligne FAD . Du point F , menons un rayon vecteur quelconque FM à la courbe; & du point M , menons la ligne MH perpendiculaire à la ligne DHE . Fig. 1.

On démontre dans la parabole que quelque part que l'on prenne le point M , on a toujours $FM = HM$; d'où il suit, que $FA = AD$. Du point M , abaissons sur la ligne FAD la perpendiculaire MN , on aura, en nommant 1 le sinus total, $FN = FM \cos. AFM$; d'ailleurs

$$HM = AF + AD - FN = 2AF - FN;$$

donc $HM + FN = 2AF;$

donc $FM + FM \cos. AFM = 2AF;$

donc $FM(1 + \cos. AFM) = 2AF.$

Il suit de-là, que si l'on nomme

- R le rayon vecteur de la parabole,
- ν l'angle traversé depuis le périhélie,
- 1 le sinus total,
- D la distance périhélie;

on a

$$(1) R(1 + \cos. \nu) - 2D = 0.$$

Expression de l'aire de la parabole, & du temps employé par la Comète à parcourir un arc quelconque de son orbite.

(5.) Dans toute trajectoire décrite en vertu d'une force centrale, les aires sont proportionnelles aux temps employés à décrire les arcs correspondans; il faut donc, avant tout, avoir l'expression de l'aire de la parabole.

On fait généralement que l'aire d'une courbe dont le

rayon vecteur $= R$, & l'angle traversé $= v$, s'exprime par $\int \frac{R^2 dv}{2}$. Maintenant, si l'on différencie l'équation (1) du paragraphe précédent, l'on aura $\frac{2 D dR}{R} - R \sin. v dv = 0$, ou à cause de $R \sin. v = 2 D \sqrt{R - D}$,

$$D^{\frac{1}{2}} dR - R \sqrt{R - D} dv = 0.$$

Substituant cette valeur dans l'aire de la parabole, on aura

$$\text{Aire de la parabole} = \int \frac{1}{2} D^{\frac{1}{2}} \frac{R dR}{\sqrt{R - D}},$$

& cette dernière quantité, en ajoutant convenablement la constante, a pour intégrale $\frac{1}{3} D^{\frac{1}{2}} (R + 2 D) \sqrt{R - D}$; donc

$$\text{Aire de la parabole} = \frac{1}{3} D^{\frac{1}{2}} (R + 2 D) \sqrt{R - D}.$$

Cette expression sert à mesurer le temps écoulé depuis le passage de la Comète par le périhélie.

(6.) L'expression que nous venons de déterminer, est bien proportionnelle pour chaque parabole, au temps employé par la Comète à parcourir les différens arcs de cette parabole depuis le périhélie; mais si l'on veut comparer les temps employés par différentes Comètes, à parcourir les différens arcs respectifs de leurs différentes paraboles, afin d'avoir une expression générale qui convienne à toutes les paraboles, à tous les arcs & à tous les temps, il faut multiplier l'expression précédente de l'aire de la parabole, par un coefficient qu'il s'agit de déterminer.

(7.) On démontre qu'une Comète dont la distance périhélie est égale à la moyenne distance du Soleil à la Terre, emploie $109^{\text{d}} 14^{\text{h}} 46' \frac{1}{3}$ ou $157846' \frac{1}{3}$ à décrire 90^{d} d'anomalie; que de plus les carrés des temps employés à parcourir une même anomalie dans les différentes paraboles, sont comme les cubes des distances périhélies; & qu'enfin le

rayon

rayon vecteur qui répond à 90 degrés d'anomalie, est double de la distance périhélie.

Il suit de-là que si l'on nomme en général,

δ le nombre de minutes de temps employées dans chaque parabole à parcourir 90 degrés d'anomalie,

X le nombre de minutes de temps qui répond au temps employé à parcourir les différentes anomalies,

R le rayon vecteur de la Comète,

r la moyenne distance de la Terre au Soleil,

D la distance périhélie;

on a généralement

$$X = \frac{1}{4} \frac{(R + 2D) \sqrt{(R - D) \delta}}{D^{\frac{1}{2}}}.$$

Mais, par ce qui vient d'être remarqué précédemment,

$$\delta : 157846' \frac{1}{3} :: D^{\frac{1}{2}} : r^{\frac{1}{2}};$$

donc généralement

$$(1) X = \frac{1}{4} \frac{(R + 2D) \sqrt{(R - D) 157846' \frac{1}{3}}}{r^{\frac{1}{2}}}.$$

(8.) Nous remarquerons que si l'on suppose avec les Astronomes, $r = 100000$, dont le logarithme égale 10,0000000, l'on aura — 10,4038259 pour logarithme de $\frac{1}{4} \times \frac{157846' \frac{1}{3}}{r^{\frac{1}{2}}}$.

(9.) Au moyen des équations du *paragraphe précédent*, on peut connoître non-seulement le temps employé par la Comète à parcourir ses différentes anomalies, mais on peut encore déterminer le temps qu'elle emploie à parcourir les différens arcs de sa trajectoire. Soit en effet,

R' le rayon vecteur qui commence l'arc de la trajectoire;

R'' le rayon vecteur qui termine cet arc;

z le nombre de minutes employées à parcourir l'arc;

Mém. 1779.

H

on aura évidemment

$$(1) t = [(R'' + 2D)\sqrt{(R'' - D)} \mp \sqrt{(R' + 2D)}\sqrt{(R' - D)}] \times \frac{157846^{\frac{1}{2}}}{4r^{\frac{1}{2}}};$$

& si l'on nommoit

- R'' un troisième rayon vecteur qui termine un nouvel arc,
- t' le nombre de minutes employées à parcourir ce nouvel arc,
- Δ le nombre de minutes écoulées entre la première & la troisième observation;

l'on aura pareillement

$$(2) t' = [(R'' + 2D)\sqrt{(R'' - D)} \mp \sqrt{(R' + 2D)}\sqrt{(R' - D)}] \times \frac{157846^{\frac{1}{2}}}{4r^{\frac{1}{2}}};$$

$$(3) \Delta = [(R'' + 2D)\sqrt{(R'' - D)} \mp \sqrt{(R' + 2D)}\sqrt{(R' - D)}] \times \frac{157846^{\frac{1}{2}}}{4r^{\frac{1}{2}}}.$$

Dans chacune de ces équations, on fera usage des signes inférieurs si, dans l'intervalle des observations, la Comète a passé par son périhélie; on fera usage des signes supérieurs dans le cas contraire.

Expression de la corde comprise entre deux rayons vecteurs R' , R'' .

(10.) Soit dans une courbe quelconque,

- R' un premier rayon vecteur;
- R'' un second rayon vecteur;
- v' l'angle compris entre le rayon vecteur R' & une ligne donnée de position, que l'on prend pour l'origine des angles traversés;
- v'' l'angle compris entre le rayon vecteur R'' & la même ligne origine des angles traversés;
- c la corde de la courbe comprise entre les rayons R' , R'' .

il est évident que l'on a

$$c^2 = (R'' \cos. v'' - R' \cos. v')^2 + (R'' \sin. v'' \mp R' \sin. v')^2,$$

suivant que les angles v'' , v' , sont pris du même côté ou de côté différent, par rapport à l'origine des angles traversés;

donc

- (1) $c^2 = R''^2 + R'^2 - 2 R'' R' (\cos. v'' \cos. v' \pm \sin. v'' \sin. v')$;
 & comme $\cos. v'' \cos. v' \pm \sin. v'' \sin. v'$ est toujours égal au cosinus de l'angle compris entre les deux rayons vecteurs,
 (2) $c^2 = R''^2 + R'^2 - 2 R'' R' \cos. (\text{angle compris entre les deux rayons } R'', R')$.

De la relation entre les Observations géocentriques & la longueur de la corde correspondante de la Parabole.

(11.) Je supposerai dans ces recherches que l'on connoît avec précision les élémens suivans :

La longitude du Soleil ;

La distance du Soleil à la Terre ;

La longitude géocentrique de la Comète ; c'est-à-dire sa distance au premier point d'*Ariès*, comptée sur l'Écliptique & vue de la Terre ;

La latitude géocentrique de la Comète.

Je nommerai

A la longitude du Soleil ;

T la distance du Soleil à la Terre ;

B la longitude géocentrique de la Comète ;

L la latitude géocentrique de la Comète.

Je supposerai que l'origine des angles *A*, *B* est au premier point d'*Ariès*, & qu'ils sont comptés de suite depuis 0^d jusqu'à 360^d ; je supposerai pareillement que la latitude géocentrique de la Comète est boréale ; de sorte que si elle étoit australe, le sinus de cette latitude deviendrait négatif, le cosinus restant toujours positif.

(12.) Soit ω un angle tel que

$$\cos. \omega = \frac{\sqrt{[\cos.^2 \frac{1}{2} (90^d + \text{asc. dr. Com.}) \times (\sin. \text{obliq. Éclipt.}) \cos. (\text{décl. Com.})]}}{\sin. \frac{1}{2} (\text{obliq. de l'Éclipt.} + \text{dist. Comète au pôle boréal de l'Équateur})} ;$$

on a

$$(1) \sin. \frac{1}{2} (\text{distance de la Comète au pôle boréal de l'Écliptique}) = \sin. \frac{1}{2} (\text{obliq. Éclipt.} + \text{dist. Comète au pôle bor. de l'Équat.}) \sin. \omega ;$$

on a pareillement

$$(2) \cos. (\text{latitude de la Comète}) \times \cos. (\text{longitude de la Comète}) - \cos. (\text{décl. de la Comète}) \times \cos. (\text{ascens. droite de la Comète}) = 0 ;$$

H ij

On voit par-là comment les longitude & latitude géocentriques de la Comète, se déduisent de la déclinaison & de l'ascension droite, qui sont immédiatement données par les observations.

Fig. 2. (13.) Soit $\gamma \in \omega \propto$ l'Écliptique rapportée à la sphère des fixes; S le Soleil; EeT l'orbite de la Terre; T le lieu de la Terre dans son orbite, éloigné de 180° du lieu du Soleil; Ee le diamètre de l'orbite terrestre passant par le premier point d'Ariès; Tt une parallèle indéfinie à la ligne Ee ; C' la projection de la Comète sur le plan de l'Écliptique; C le lieu de la Comète dans l'espace; CC' la distance perpendiculaire de la Comète au plan de l'Écliptique; TC la distance de la Terre à la Comète.

De la projection C' de la Comète, abaïssons sur la ligne ESe , la droite $C'P$; & du lieu T de la Terre, abaïssons sur la même ligne, la droite Tp . Nommons

- x la distance SP du Soleil au point P ;
- y la distance PC' du point P , à la projection C' de la Comète;
- z la distance CC' de la Comète au plan de l'Écliptique;
- ξ la distance Sp du Soleil au point p ;
- ν la distance pT du point p , à la Terre T ;
- Δ la distance TC de la Terre à la Comète;
- T la distance TS de la Terre au Soleil;
- A la longitude du Soleil, vue de la Terre;
- B la longitude géocentrique de la Comète;
- L la latitude géocentrique de la Comète.

Dans le triangle STp , l'on a $ST : Sp :: 1 : \cos. TS p$; mais $TS = T$, angle $TS p = A$, & $Sp = \xi$; donc $\xi = T \cos. A$; par une raison semblable, $\nu = T \sin. A$. Dans le triangle TCC' rectangle en C' , on a $TC : TC' :: 1 : \cos. CTC'$; $TC : CC' :: 1 : \sin. CTC'$; mais $TC = \Delta$, angle $CTC' = L$; donc $TC' = \Delta \cos. L$; $CC' = \Delta \sin. L$. Dans le triangle TtC' , on a $TC' : C't :: 1 : \sin. C'Tt$; $TC' : Tt :: 1 : \cos. C'Tt$; mais $TC' = \Delta \cos. L$; $C't = Pt - PC' = \nu - y$;

$Tt = Sp - SP = \xi - x$; angle $C'Tt = B$; donc Fig. 2.
 $y - y = \Delta \cos. L \sin. B$; $\xi - x = \Delta \cos. L \cos. B$;
 donc enfin, à cause de $\xi = T \cos. A$, de $y = T \sin. A$,
 & de $z = CC'$,

$$(1) x = T \cos. A - \Delta \cos. B \cos. L;$$

$$(2) y = T \sin. A - \Delta \sin. B \cos. L;$$

$$(3) z = \Delta \sin. L.$$

D'où l'on voit, que les trois coordonnées x, y, z , ne dépendent que d'une seule inconnue Δ .

(14.) Si l'on cherche maintenant l'expression de la distance SC de la Comète au Soleil, & que l'on nomme

R la distance de la Comète au Soleil,

on aura évidemment $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$; donc

$$(1) R^2 = T^2 + \Delta^2 - 2 \Delta T \cos. L \cos. (B - A).$$

(15.) Considérons maintenant deux observations, & nommons $x', y', z', \Delta', T', R', A', B', L'$ les quantités qui appartiennent à la première observation; $x'', y'', z'', \Delta'', T'', R'', A'', B'', L''$ les quantités qui appartiennent à la seconde; on aura pour chacune des observations, des équations semblables à celles que nous venons de démontrer. De plus, si l'on nomme

c la corde comprise entre les rayons vecteurs R'', R' ,

on aura

$$c^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2x'x'' - 2y'y'' - 2z'z'';$$

mais

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = R'^2; \quad x''^2 + y''^2 + z''^2 = R''^2;$$

donc

$$(1) c^2 = R'^2 + R''^2 - 2[T'T'' \cos. (A'' - A') - T'\Delta'' \cos. L'' \cos. (B'' - A') \\ - T''\Delta' \cos. L' \cos. (B' - A'') + \Delta'\Delta'' \cos. L' \cos. L'' \cos. (b'' - B') \\ + \Delta'\Delta'' \sin. L' \sin. L''];$$

bien entendu que l'on a d'ailleurs

$$(2) R' = \sqrt{[T'^2 + \Delta'^2 - 2\Delta'T' \cos. L' \cos. (B' - A')]};$$

$$(3) R'' = \sqrt{[T''^2 + \Delta''^2 - 2\Delta''T'' \cos. L'' \cos. (B'' - A'')]}.$$

Et la question proposée est résolue.

*Détermination de l'angle compris entre les deux
rayons vecteurs R'' R'.*

(16.) Si l'on compare cette dernière valeur de c^2 avec celle que l'on tire de l'équation (2) du §. 10, & que l'on nomme

N l'angle compris entre les deux rayons vecteurs $R' R''$;

on aura

$$(1) R'R'' \cos. N - T'T'' \cos. (A'' - A') + T'\Delta'' \cos. L'' \cos. (B'' - A') \\ + T''\Delta' \cos. L' \cos. (B' - A'') - \Delta'\Delta'' \cos. L' \cos. L'' \cos. (B'' - B') \\ - \Delta'\Delta'' \sin. L' \sin. L'' = 0.$$

Quoique l'équation (1) donne deux valeurs de l'angle N , puisqu'un même cosinus appartient à deux angles différens; on ne peut cependant pas être en suspend sur le choix de cet angle; & c'est toujours le plus petit des deux angles qu'il faut choisir.

Supposons en effet que $\cos. N$ soit positif, & qu'il réponde à 10 degrés; le même cosinus répondra aussi à 350 degrés: or on ne peut pas être en suspend sur le choix de ces deux angles.

(17.) Il arrive souvent, que dans l'équation du *paragraphe précédent*, l'angle N est d'un petit nombre de degrés, ce qui rend cette équation peu commode dans son usage, à

cause de la très-grande précision qu'elle exige dans le calcul.
Nous remarquerons alors, que puisqu'en général,

$$\cos. N = \cos. \left(\frac{1}{2} N + \frac{1}{2} N \right) = \cos.^2 \frac{1}{2} N - \sin.^2 \frac{1}{2} N = 1 - 2 \sin.^2 \frac{1}{2} N,$$

l'équation devient

$$(1) R'R'' - T'T'' \cos. (A'' - A') + T'\Delta'' \cos. L'' \cos. (B'' - A') + T''\Delta' \cos. L' \cos. (B' - A'') \\ - \Delta'\Delta'' [\cos. L' \cos. L'' \cos. (B'' - B') + \sin. L' \sin. L''] - 2 R'R'' \sin.^2 \frac{1}{2} N = 0.$$

Par la même raison, l'équation (2) du §. 10, devient

$$(2) (R'' - R')^2 - c^2 + 4 R'R'' \sin.^2 \frac{1}{2} N = 0.$$

*Expression de la corde de la parabole, en rayons vecteurs R', R''
& en distance périhélie.*

(18.) Les recherches précédentes conduisent naturellement à avoir l'expression de la corde de la parabole, en rayons vecteurs R' , R'' , & en distance périhélie; en effet, nous avons vu (§. 10) que l'on a l'équation suivante,

$$2 R'R'' \cos. N - R'^2 - R''^2 + c^2 = 0.$$

Je remarque que l'angle N étant l'angle compris entre les rayons vecteurs R' , R'' ; si l'on nomme v' & v'' les deux anomalies correspondantes de la Comète, l'on a

$$R'R'' \cos. N = R'' R' \cos. v'' \cos. v' + R'' R' \sin. v'' \sin. v';$$

mais, par la propriété de la parabole, si l'on nomme

D la distance périhélie,

à cause des deux équations,

$$R'(1 + \cos. v') - 2D = 0; R''(1 + \cos. v'') - 2D = 0;$$

l'on a

$$R'R'' \cos. v'' \cos. v' = 4D^2 - 2D(R' + R'') + R'R'';$$

$$R'R'' \sin. v'' \sin. v' = \pm 4D \sqrt{(R' - D) \sqrt{(R'' - D)}};$$

donc

$$(1) c^2 - (R' - R'')^2 + 4D[2D \pm 2\sqrt{(R' - D) \sqrt{(R'' - D)}} - R' - R''] = 0.$$

64 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

La valeur de c^2 a un double signe; la première a lieu lorsque la corde ne coupe point le grand axe de la parabole; la seconde valeur a lieu lorsque la corde coupe le grand axe.

Si l'on compare cette valeur de c^2 avec celle du §. 15, on aura la relation suivante entre les élémens de la parabole, & les observations prises deux à deux,

$$(2) \quad 2D [2D \pm 2\sqrt{(R' - D)\sqrt{(R'' - D)} - R' - R''} \\ + R'R'' - T'T'' \cos.(A'' - A') + T'\Delta'' \cos.L'' \cos.(B'' - A') \\ + T''\Delta' \cos.L' \cos.(B' - A'') - \Delta'\Delta'' [\cos.L' \cos.L'' \cos.(B'' - B') \\ + \sin.L' \sin.L'']] = 0.$$

Si l'on différencie cette dernière équation, & que l'on suppose

$$f = R'' - 2D \pm \frac{2D(R'' - D)}{\sqrt{(R' - D)}\sqrt{(R'' - D)}}$$

$$f' = R' - 2D \pm \frac{2D(R' - D)}{\sqrt{(R' - D)}\sqrt{(R'' - D)}},$$

$$g = T'' \cos.L' \cos.(B' - A'') - \Delta'' [\cos.L' \cos.L'' \cos.(B'' - B') + \sin.L' \sin.L''];$$

$$g' = T' \cos.L'' \cos.(B'' - A') - \Delta' [\cos.L' \cos.L'' \cos.(B'' - B') + \sin.L' \sin.L''],$$

$$h = 8D - 2(R' + R'') \pm \frac{[8D^2 - 6D(R' + R'') + 4R'R'']}{\sqrt{(R' - D)}\sqrt{(R'' - D)}},$$

l'on aura

$$(3) \quad f dR' + g d\Delta' + f' dR'' + g' d\Delta'' + h dD = 0.$$

Il n'est pas même nécessaire que l'équation (2) soit rigoureusement satisfaite par la substitution des différentes valeurs de R' , R'' , Δ' , Δ'' , D , pour que l'on puisse employer une équation de la forme précédente; & si l'on nomme

γ ce que devient l'équation (2) par les substitutions des valeurs particulières de R' , R'' , Δ' , Δ'' , D ,

l'on aura

$$(4) \quad f dR' + g d\Delta' + f' dR'' + g' d\Delta'' + h dD - \gamma = 0.$$

Détermination

Détermination des Équations qui sont indépendantes de la nature de la trajectoire des Comètes.

(19.) J'ai annoncé que les équations qui résolvent le Problème des Comètes, se partagent naturellement en deux classes. Les unes sont indépendantes de la nature de la trajectoire particulière que décrit la Comète & de la force centrale qui l'anime; elles supposent uniquement que la Comète se meut dans un même plan. Les autres équations au contraire, sont dépendantes de la nature de la trajectoire spécifique de la Comète. Comme cette distinction m'a paru jeter beaucoup de jour sur les questions que je me propose d'examiner, & mettre un ordre naturel dans les discussions auxquelles je dois me livrer, j'ai cru devoir l'adopter. Je vais donc m'occuper d'abord des équations indépendantes de la nature des trajectoires des Comètes, & des questions qui en sont les corollaires.

De la relation entre l'inclinaison du plan de l'orbite de la Comète sur l'Écliptique, la position du nœud ascendant & la distance de la Comète à la Terre, à l'instant de l'observation.

(20.) Soit

R le rayon vecteur de la Comète;

I l'angle d'inclinaison du plan de l'orbite sur l'Écliptique;

u l'angle du rayon vecteur de la Comète avec la ligne des nœuds; cet angle est compté sur le plan de l'orbite de la Comète, en partant du nœud ascendant, & en suivant le sens du mouvement de cet astre dans son orbite;

ζ la longitude du nœud ascendant de la Comète;

T la distance du Soleil à la Terre;

Δ la distance de la Comète à la Terre;

A la longitude du Soleil;

B la longitude géocentrique de la Comète;

L la latitude géocentrique de la Comète.

Mém. 1779.

Fig. 3. Soit $\gamma \odot \alpha \times$ l'Écliptique rapportée à la sphère des fixes; S le Soleil; EeT l'orbite de la Terre; T le lieu de la Terre dans son orbite; NSn la ligne des nœuds; N le nœud ascendant; C le lieu de la Comète dans son orbite; SC le rayon vecteur de la Comète; C' la projection de la Comète sur l'Écliptique; CC' la distance perpendiculaire de la Comète au plan de l'Écliptique; CM la perpendiculaire abaissée de la Comète sur la ligne des nœuds dans le plan de son orbite; $C'M$ la perpendiculaire abaissée de la projection C' de la Comète sur la ligne des nœuds dans le plan de l'Écliptique; Tm la perpendiculaire abaissée de la Terre sur la ligne des nœuds; TC la distance de la Comète à la Terre, ESe le diamètre de l'orbite terrestre passant par le premier point d'Ariès. Par la Terre T , menons une parallèle indéfinie Tt' au diamètre ESe de l'orbite de la Terre, passant par le premier point d'Ariès, & une autre parallèle Tt à la ligne NSn des nœuds de la Comète. Prenons le point t tel que Mt soit le prolongement de $C'M$, & que par conséquent $C'Mt$ soit une droite perpendiculaire à la ligne Tt .

Il est clair que puisque l'angle $MSC = u$, & que $SC = R$, l'on a $CM = R \sin. u$; $MS = R \cos. u$; d'ailleurs puisque l'angle $CMC' = I$, & que le triangle CMC' est rectangle en C' , l'on a $CC' = R \sin. u \sin. I$; $C'M = R \sin. u \cos. I$; enfin puisque $TC = \Delta$, que l'angle $CTC' = L$, & que le triangle CTC' est rectangle en C' , l'on a $CC' = \Delta \sin. L$; comparant les deux valeurs de CC' , l'on aura

$$(1) R \sin. u \sin. I - \Delta \sin. L = 0.$$

Maintenant, puisque les droites Tt , NSn sont parallèles, on a

$$Mt = mT = T \sin. (TSm);$$

$$tC' = Mt + MC' = T \sin. (TSm) + R \sin. u \cos. I.$$

De plus, l'angle tTC' est évidemment égal à la longitude

géocentrique de la Comète moins la longitude du nœud ascendant, puisqu'en effet il est égal à l'angle $C'Tt$ moins l'angle tTt . Par une raison semblable, l'angle STt est égal à la longitude du Soleil moins la longitude du nœud ascendant de la Comète; donc angle $STt = \text{angle } TSm = A - \zeta$; donc $T \sin. (TSm) = T \sin. (A - \zeta)$; donc $tC' = T \sin. (A - \zeta) + R \sin. u \cos. I$. De plus, à cause du triangle tTC' rectangle en t , on a

$$TC' \sin. (C'Tt) - Ct = 0;$$

d'ailleurs l'angle $(C'Tt) = B - \zeta$, & $TC' = \Delta \cos. L$; donc

$$(2) \Delta \cos. L \sin. (B - \zeta) - T \sin. (A - \zeta) - R \sin. u \cos. I = 0;$$

ou enfin, à cause de $R \sin. u = \frac{\Delta \sin. L}{\sin. I}$,

$$(3) \text{tang. } I [\Delta \cos. L \sin. (B - \zeta) - T \sin. (A - \zeta)] - \Delta \sin. L = 0.$$

Au moyen de cette dernière équation, lorsque l'on connoîtra la distance de la Comète à la Terre & la position du nœud, l'on déterminera l'inclinaison de l'orbite; & réciproquement, si l'on connoissoit l'inclinaison de l'orbite & la position du nœud, l'on détermineroit la distance de la Comète à la Terre.

Détermination de l'inclinaison de l'orbite & de la position du nœud ascendant, lorsque l'on connoît les distances de la Comète à la Terre à l'instant de deux observations.

(21.) Il est évident que, pour chaque observation, l'on a des équations de la forme précédente. Supposons donc que l'on ait trois observations, & que l'on nomme

Δ', A', B', T', L' , les quantités qui appartiennent à la 1.^{re} observation,

$\Delta'', A'', B'', T'', L''$, les quantités qui appartiennent à la 2.^{re} observation,

$\Delta''', A''', B''', T''', L'''$, les quantités qui appartiennent à la 3.^{re} observation,

l'on aura les trois équations suivantes,

$$(1) \text{tang. } I [\Delta' \cos. L' \sin. (B' - \zeta) - T' \sin. (A' - \zeta)] - \Delta' \sin. L' = 0;$$

$$(2) \text{tang. } I [\Delta'' \cos. L'' \sin. (B'' - \zeta) - T'' \sin. (A'' - \zeta)] - \Delta'' \sin. L'' = 0;$$

$$(3) \text{tang. } I [\Delta''' \cos. L''' \sin. (B''' - \zeta) - T''' \sin. (A''' - \zeta)] - \Delta''' \sin. L''' = 0;$$

I ij

ou, ce qui revient au même,

$$(4) \text{ tang. } I [(\Delta' \text{ cof. } L' \text{ fin. } B' - T' \text{ fin. } A') \text{ cof. } \zeta \\ - (\Delta' \text{ cof. } L' \text{ cof. } B' - T' \text{ cof. } A') \text{ fin. } \zeta] - \Delta' \text{ fin. } L' = 0;$$

$$(5) \text{ tang. } I [(\Delta'' \text{ cof. } L'' \text{ fin. } B'' - T'' \text{ fin. } A'') \text{ cof. } \zeta \\ - (\Delta'' \text{ cof. } L'' \text{ cof. } B'' - T'' \text{ cof. } A'') \text{ fin. } \zeta] - \Delta'' \text{ fin. } L'' = 0;$$

$$(6) \text{ tang. } I [(\Delta''' \text{ cof. } L''' \text{ fin. } B''' - T''' \text{ fin. } A''') \text{ cof. } \zeta \\ - (\Delta''' \text{ cof. } L''' \text{ cof. } B''' - T''' \text{ cof. } A''') \text{ fin. } \zeta] - \Delta''' \text{ fin. } L''' = 0.$$

Combinons maintenant ces équations deux à deux; c'est-à-dire, la quatrième avec la cinquième, & cette même quatrième avec la sixième, l'on aura

$$(7) [\Delta' \text{ fin. } L'' (\Delta' \text{ cof. } L' \text{ fin. } B' - T' \text{ fin. } A') \\ - \Delta' \text{ fin. } L' (\Delta'' \text{ cof. } L'' \text{ fin. } B'' - T'' \text{ fin. } A'')] \text{ cof. } \zeta \\ - [\Delta'' \text{ fin. } L'' (\Delta' \text{ cof. } L' \text{ cof. } B' - T' \text{ cof. } A') \\ - \Delta' \text{ fin. } L' (\Delta'' \text{ cof. } L'' \text{ cof. } B'' - T'' \text{ cof. } A'')] \text{ fin. } \zeta = 0;$$

$$(8) [\Delta''' \text{ fin. } L''' (\Delta' \text{ cof. } L' \text{ fin. } B' - T' \text{ fin. } A') \\ - \Delta' \text{ fin. } L' (\Delta''' \text{ cof. } L''' \text{ fin. } B''' - T''' \text{ fin. } A''')] \text{ cof. } \zeta \\ - [\Delta''' \text{ fin. } L''' (\Delta' \text{ cof. } L' \text{ cof. } B' - T' \text{ cof. } A') \\ - \Delta' \text{ fin. } L' (\Delta''' \text{ cof. } L''' \text{ cof. } B''' - T''' \text{ cof. } A''')] \text{ fin. } \zeta = 0;$$

ou, ce qui revient au même,

$$(9) \text{ tang. } \zeta = \frac{\Delta'' \text{ fin. } L'' (\Delta' \text{ cof. } L' \text{ fin. } B' - T' \text{ fin. } A') - \Delta' \text{ fin. } L' (\Delta'' \text{ cof. } L'' \text{ fin. } B'' - T'' \text{ fin. } A'')}{\Delta'' \text{ fin. } L'' (\Delta' \text{ cof. } L' \text{ cof. } B' - T' \text{ cof. } A') - \Delta' \text{ fin. } L' (\Delta'' \text{ cof. } L'' \text{ cof. } B'' - T'' \text{ cof. } A'')};$$

$$(10) \text{ tang. } \zeta = \frac{\Delta''' \text{ fin. } L''' (\Delta' \text{ cof. } L' \text{ fin. } B' - T' \text{ fin. } A') - \Delta' \text{ fin. } L' (\Delta''' \text{ cof. } L''' \text{ fin. } B''' - T''' \text{ fin. } A''')}{\Delta''' \text{ fin. } L''' (\Delta' \text{ cof. } L' \text{ cof. } B' - T' \text{ cof. } A') - \Delta' \text{ fin. } L' (\Delta''' \text{ cof. } L''' \text{ cof. } B''' - T''' \text{ cof. } A''')}.$$

Au moyen des équations précédentes, si l'on connoît les distances de la Comète à la Terre à l'instant de deux observations, on déterminera tout de suite la position du plan de son orbite, quelle que soit la nature de sa trajectoire: en effet, les équations donneront la position du nœud ascendant & l'inclinaison du plan de l'orbite.

(22.) L'espèce de l'angle ζ n'est point arbitraire, & cet angle est donné spécifiquement par les équations du §. 21. Il doit être employé tel qu'il est donné par l'analyse;

c'est-à-dire, qu'il est compris entre 0^d & 90^d , si le numérateur & le dénominateur de son expression sont tous deux positifs ; il est compris entre 90^d & 180^d , si le numérateur est positif & le dénominateur négatif ; il est compris entre 180^d & 270^d , si le numérateur & le dénominateur sont tous deux négatifs ; il est compris entre 270^d & 360^d , si le numérateur est négatif & le dénominateur positif. Cette remarque s'applique en général à tous les angles donnés par une tangente dont l'expression renferme un numérateur & un dénominateur.

Nous ferons une exception à la règle précédente, relativement à l'inclinaison du plan de l'orbite : en effet, cette inclinaison étant déterminée par sa tangente, il s'ensuivroit, d'après la règle précédente, que cette inclinaison pourroit avoir toutes les valeurs depuis 0^d jusqu'à 360^d . Si cependant l'on fait attention qu'un plan qui fait, par exemple, avec un second plan, un angle de 200^d , n'est que le prolongement du plan qui fait avec ce même second plan, un angle de 20^d ; on pourra ne supposer à l'inclinaison du plan de l'orbite, que des valeurs plus petites que 180^d . Si donc *tang. I* est positive, l'inclinaison sera entre 0^d & 90^d , & la Comète sera directe ; si *tang. I* est négative, l'inclinaison sera entre 90^d & 180^d , & la Comète sera rétrograde. Continuons nos recherches.

(23.) Il est évident qu'il y a un nombre infini de valeurs de Δ' , Δ'' , Δ''' , qui rendent nulles les équations (7) & (8) du §. 21, puisque ces équations renfermant chacune deux variables, il faudroit avoir deux nouvelles équations pour parvenir à une solution déterminée ; on peut donc demander, lorsqu'une fois ces équations sont satisfaites par des valeurs particulières de Δ' , Δ'' , Δ''' , quelle doit être la relation entre les variations de Δ' , Δ'' , Δ''' , pour que les équations demeurent toujours satisfaites. Rien n'est plus simple que la solution de ce Problème : en effet,

si l'on différencie les équations (7) & (8) du §. 21, l'on aura

$$(1) [\Delta'' \operatorname{cof}. L' \sin. L'' \sin. (B' - \zeta) - \Delta'' \sin. L' \operatorname{cof}. L'' \sin. (B'' - \zeta) + T'' \sin. L' \sin. (A'' - \zeta)] d\Delta' - [\Delta' \sin. L' \operatorname{cof}. L'' \sin. (B'' - \zeta) - \Delta' \operatorname{cof}. L' \sin. L'' \sin. (B' - \zeta) + T' \sin. L'' \sin. (A' - \zeta)] d\Delta'' = 0;$$

$$(2) [\Delta''' \operatorname{cof}. L' \sin. L''' \sin. (B' - \zeta) - \Delta''' \sin. L' \operatorname{cof}. L''' \sin. (B''' - \zeta) + T''' \sin. L' \sin. (A''' - \zeta)] d\Delta' - [\Delta' \sin. L' \operatorname{cof}. L''' \sin. (B''' - \zeta) - \Delta' \operatorname{cof}. L' \sin. L''' \sin. (B' - \zeta) + T' \sin. L''' \sin. (A' - \zeta)] d\Delta''' = 0.$$

Il n'est pas nécessaire que les équations (7) & (8) du §. 21, soient rigoureusement satisfaites par la substitution des différentes valeurs de Δ' , Δ'' , Δ''' , pour que l'on puisse employer des équations de la forme précédente; l'on peut même supposer quelque erreur dans la position du nœud. En en mot, si l'on nomme

$d\zeta$ l'erreur sur la position du nœud exprimée en secondes de degrés,

π' ce que devient l'équation (7) du §. 21, par les substitutions des valeurs de Δ' , Δ'' , ζ ,

π'' ce que devient l'équation (8) du §. 21, par les substitutions des valeurs de Δ' , Δ''' , ζ ,

l'on aura

$$(3) [\Delta'' \operatorname{cof}. L' \sin. L'' \sin. (B' - \zeta) - \Delta'' \sin. L' \operatorname{cof}. L'' \sin. (B'' - \zeta) + T'' \sin. L' \sin. (A'' - \zeta)] d\Delta' - [\Delta' \sin. L' \operatorname{cof}. L'' \sin. (B'' - \zeta) - \Delta' \operatorname{cof}. L' \sin. L'' \sin. (B' - \zeta) + T' \sin. L'' \sin. (A' - \zeta)] d\Delta'' + [\Delta'' T' \sin. L'' \operatorname{cof}. (A' - \zeta) - \Delta' T'' \sin. L' \operatorname{cof}. (A'' - \zeta)] d\Delta'' - \Delta' \Delta'' (\operatorname{cof}. L' \sin. L'' \operatorname{cof}. (B' - \zeta) - \sin. L' \operatorname{cof}. L'' \operatorname{cof}. (B'' - \zeta)) \frac{d\zeta}{206265''} - \pi' = 0;$$

$$(4) [\Delta''' \operatorname{cof}. L' \sin. L''' \sin. (B' - \zeta) - \Delta''' \sin. L' \operatorname{cof}. L''' \sin. (B''' - \zeta) + T''' \sin. L' \sin. (A''' - \zeta)] d\Delta' - [\Delta' \sin. L' \operatorname{cof}. L''' \sin. (B''' - \zeta) - \Delta' \operatorname{cof}. L' \sin. L''' \sin. (B' - \zeta) + T' \sin. L''' \sin. (A' - \zeta)] d\Delta''' + [\Delta''' T' \sin. L''' \operatorname{cof}. (A' - \zeta) - \Delta' T''' \sin. L' \operatorname{cof}. (A''' - \zeta)] d\Delta''' - \Delta' \Delta''' (\operatorname{cof}. L' \sin. L''' \operatorname{cof}. (B' - \zeta) - \sin. L' \operatorname{cof}. L''' \operatorname{cof}. (B''' - \zeta)) \frac{d\zeta}{206265''} - \pi'' = 0.$$

De la relation entre les distances de la Comète à la Terre, correspondantes aux Observations prises trois à trois.

(24.) Si l'on combine les équations (9) & (10) du §. 21, l'on aura

$$\left. \begin{aligned} & [\Delta' \sin. L'' (\Delta' \cos. L' \sin. B' - T' \sin. A') \\ & - \Delta' \sin. L' (\Delta'' \cos. L'' \sin. B'' - T'' \sin. A'')]] \\ & \times [\Delta'' \sin. L''' (\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A') \\ & - \Delta' \sin. L' (\Delta''' \cos. L''' \cos. B''' - T''' \cos. A''')]] \\ & - [\Delta'' \sin. L''' (\Delta' \cos. L' \sin. B' - T' \sin. A') \\ & - \Delta' \sin. L' (\Delta''' \cos. L''' \sin. B''' - T''' \sin. A''')]] \\ & \times [\Delta' \sin. L'' (\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A') \\ & - \Delta' \sin. L' (\Delta'' \cos. L'' \cos. B'' - T'' \cos. A'')]] \end{aligned} \right\} = 0.$$

Cette dernière équation peut être mise sous la forme suivante,

$$\left. \begin{aligned} & \Delta' \sin. L' [(\Delta'' \cos. L'' \sin. B'' - T'' \sin. A'') \times (\Delta''' \cos. L''' \cos. B''' - T''' \cos. A''')] \\ & - (\Delta'' \cos. L'' \sin. B'' - T'' \sin. A'') \times (\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A')] \\ & + \Delta' \sin. L'' [(\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A') \times (\Delta''' \cos. L''' \sin. B''' - T''' \sin. A''')] \\ & - (\Delta' \cos. L' \sin. B' - T' \sin. A') \times (\Delta'' \cos. L'' \cos. B'' - T'' \cos. A'')] \\ & + \Delta'' \sin. L''' [(\Delta' \cos. L' \sin. B' - T' \sin. A') \times (\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A') \\ & - (\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A') \times (\Delta'' \cos. L'' \sin. B'' - T'' \sin. A'')] \end{aligned} \right\} = 0,$$

ou enfin,

$$\left. \begin{aligned} & \Delta' \sin. L' [\Delta'' \Delta''' \cos. L'' \cos. L''' \sin. (B'' - B''') - \Delta'' \cos. L'' T''' \sin. (B'' - A''')] \\ & - \Delta'' \cos. L'' T'' \sin. (A'' - B''') + T'' T''' \sin. (A'' - A''')]] \\ & + \Delta' \sin. L'' [\Delta' \Delta''' \cos. L' \cos. L''' \sin. (B''' - B') - \Delta' \cos. L' T''' \sin. (A''' - B')] \\ & - \Delta'' \cos. L''' T' \sin. (B''' - A') + T' T''' \sin. (A''' - A')]] \\ & + \Delta'' \sin. L''' [\Delta' \Delta'' \cos. L' \cos. L'' \sin. (B' - B'') - \Delta' \cos. L' T'' \sin. (B' - A'')] \\ & - \Delta' \cos. L'' T' \sin. (A' - B'') + T' T'' \sin. (A' - A'')] \end{aligned} \right\} = 0,$$

Si donc l'on suppose

$$\begin{aligned} C &= \sin. L' \cos. L'' \cos. L''' \sin. (B'' - B''') + \sin. L'' \cos. L' \cos. L''' \sin. (B''' - B') \\ &\quad + \sin. L''' \cos. L' \cos. L'' \sin. (B' - B''), \\ D &= T''' [\sin. L' \cos. L'' \sin. (B'' - A''') + \sin. L'' \cos. L' \sin. (A''' - B')], \\ E &= T'' [\sin. L' \cos. L''' \sin. (A'' - B''') + \sin. L''' \cos. L' \sin. (B' - A'')], \\ F &= T' [\sin. L'' \cos. L''' \sin. (B''' - A') + \sin. L''' \cos. L'' \sin. (A' - B'')], \end{aligned}$$

$$G = T'' T''' \sin. L' \sin. (A'' - A'''),$$

$$H = T' T''' \sin. L'' \sin. (A''' - A'),$$

$$K = T' T'' \sin. L'' \sin. (A' - A''),$$

l'on aura

$$(1) C \Delta' \Delta'' \Delta''' - D' \Delta' \Delta'' - E' \Delta' \Delta''' - F \Delta'' \Delta''' + G \Delta' \\ + H \Delta'' + K \Delta''' = 0.$$

Que l'équation qui résout le Problème des Comètes se rabaisse au second degré, lorsque l'on connoît d'ailleurs les rapports des distances de la Comète à la Terre, correspondantes à trois observations.

(25.) Au moyen de l'équation (1) du *paragraphe précédent*, on voit que dans tous les cas, l'équation qui résout le Problème des Comètes se rabaisse au second degré, lorsque l'on a d'ailleurs des équations de la forme suivante,

$$\Delta''' = P \Delta', \Delta'' = P' \Delta',$$

P, P' étant des quantités connues. En effet, si dans l'équation du *paragraphe précédent* l'on substitue $P \Delta'$ à Δ''' , $P' \Delta'$ à Δ'' , elle deviendra, à cause de la division par Δ' ,

$$(1) P P' C \Delta'^2 - (P' D' + P E' + P P' F) \Delta' + G + P' H + P K = 0.$$

Des usages de l'Équation (1) du §. 24.

(26.) L'équation du §. 24 est une des plus importantes de cette théorie; & l'on ne doit employer dans le calcul, aucunes distances de la Comète à la Terre qui ne satisferoient point à cette équation. En effet, une des conditions principales à remplir, est que la Comète se meuve dans un même plan; or cette condition n'auroit pas lieu, si les distances employées ne rendoient pas nulle l'équation dont il s'agit. Comme cette équation est rigoureuse, qu'elle s'applique à toutes les distances, & qu'elle est indépendante de la nature de la trajectoire de la Comète, on doit sentir l'utilité de la méthode. Supposons, en effet, que l'on calcule des observations très-éloignées, & que l'on soit en doute sur la nature de

de la trajectoire; il faut avant tout, constater si les distances que l'on emploie, donnent un plan unique pour le plan de l'orbite.

Un second usage, non moins utile de l'équation précédente, est la facilité de connoître la distance intermédiaire Δ'' , lorsque l'on connoît les distances extrêmes Δ' , Δ''' . Les Astronomes qui ont calculé des orbites de Comètes, savent combien, en général, il est utile d'avoir exactement cette seconde distance intermédiaire: or il est évident qu'elle se déduit avec la plus grande facilité de l'équation (1) du §. 24. En effet, on tire de cette équation,

$$(1) \Delta'' = \frac{E' \Delta' \Delta''' - G \Delta' - K \Delta'''}{C \Delta' \Delta''' - D' \Delta' - F \Delta''' + H}.$$

(27.) Indépendamment des usages précédens, les équations dont nous nous occupons, peuvent résoudre beaucoup d'autres questions importantes. Nous avons vu, par exemple (§. 25) que lorsque l'on connoît le rapport des distances de la Comète à la Terre, lors de trois observations, l'on peut déterminer l'une quelconque de ces distances par une équation du second degré; & nous avons donné cette équation. On peut être curieux maintenant de voir combien les erreurs sur les rapports des distances peuvent faire varier les résultats.

Pour y parvenir, je différencie l'équation (1) du §. 25; & j'ai, en conservant toutes les définitions des paragraphes précédens,

$$(1) (2 P P' C \Delta' - P' D' - P E' - P P' F) d \Delta' \\ + (P' C \Delta'^2 - E' \Delta' - P F \Delta' + K) d P \\ + (P C \Delta'^2 - D' \Delta' - P F \Delta' + H) d P' = 0.$$

L'on a donc la relation entre les variations des rapports des distances, & la variation de la distance conclue par l'équation (1) du §. 25.

(28.) Il est évident qu'il y a un nombre infini de valeurs de Δ' , Δ'' , Δ''' qui rendent nulle l'équation (1) du §. 24, puisque cette équation renfermant trois variables, il faudroit

Mém. 1779.

K

avoir deux nouvelles équations, pour parvenir à une solution déterminée; lors donc que cette équation est satisfaite par des valeurs particulières de Δ' , Δ'' , Δ''' , on peut demander, quelle doit être la relation entre les variations de Δ' , Δ'' , Δ''' , pour que l'équation demeure toujours satisfaite? Rien n'est plus simple que la solution de ce Problème. En effet, si l'on différencie l'équation (1) du §. 24, l'on aura

$$(1) \quad (C \Delta'' \Delta''' - E' \Delta''' - D' \Delta'' + G) d\Delta' \\ + (C \Delta' \Delta''' - F \Delta''' - D' \Delta' + H) d\Delta'' \\ + (C \Delta' \Delta'' - E' \Delta' - F \Delta'' + K) d\Delta''' = 0.$$

Il n'est pas même nécessaire que l'équation (1) du §. 24, soit rigoureusement satisfaite par la substitution des différentes valeurs de Δ' , Δ'' , Δ''' , pour que l'on puisse employer une équation de la forme précédente; & si l'on nomme

α ce qui devient l'équation (1) du §. 24 par les substitutions des valeurs de Δ' , Δ'' , Δ''' ,

l'on aura

$$(2) \quad (C \Delta'' \Delta''' - E' \Delta''' - D' \Delta'' + G) d\Delta' \\ + (C \Delta' \Delta''' - F \Delta''' - D' \Delta' + H) d\Delta'' \\ + (C \Delta' \Delta'' - E' \Delta' - F \Delta'' + K) d\Delta''' - \alpha = 0.$$

Remarque sur les Équations du §. 21.

(29.) Si, par exemple, dans l'équation (8) du §. 21, l'on substitue à Δ''' , la valeur $P \Delta'$, elle deviendra

$$(1) \quad [P \sin. L''' (\Delta' \cos. L' \sin. B' - T' \sin. A') \\ - \sin. L' (P \Delta' \cos. L''' \sin. B''' - T''' \sin. A''')]] \cos. \zeta \\ - [P \sin. L''' (\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A') \\ - \sin. L' (P \Delta' \cos. L''' \cos. B''' - T''' \cos. A''')]] \sin. \zeta = 0.$$

On voit donc que si l'on connoissoit d'avance la position du nœud, & le rapport des distances de la Comète à la Terre correspondantes à deux observations, l'on connoîtroit la première distance par une simple équation du premier degré. En général, les relations entre les quantités P , Δ' , ζ , qui entrent dans l'équation (1), sont du premier degré, & par conséquent faciles à résoudre.

Si l'on différencie cette dernière équation, & que l'on nomme

θ ce qu'elle devient par les substitutions des valeurs hypothétiques de Δ' , ζ , P ,

$d\zeta$ l'erreur sur la position du nœud exprimée en secondes de degrés,

dP l'erreur du rapport des distances Δ' , Δ'' ,

l'on aura

$$\begin{aligned}
 (2) \{ & P \Delta' \cos. L' \sin. L'' \sin. (B' - \zeta) - P \Delta' \sin. L' \cos. L'' \sin. (B'' - \zeta) \\
 & + T'' \sin. L' \sin. (A'' - \zeta) - P[\Delta' \sin. L' \cos. L'' \sin. (B'' - \zeta) \\
 & - \Delta' \cos. L' \sin. L'' \sin. (B' - \zeta) + T' \sin. L'' \sin. (A' - \zeta)] \} d\Delta' \\
 & - [\Delta' \sin. L' \cos. L'' \sin. (B'' - \zeta) - \Delta' \cos. L' \sin. L'' \sin. (B' - \zeta) \\
 & + T' \sin. L'' \sin. (A' - \zeta)] \Delta' dP + \{ P \Delta' T' \sin. L'' \cos. (A' - \zeta) \\
 & - \Delta' T'' \sin. L' \cos. (A'' - \zeta) - P \Delta'^2 [\cos. L' \sin. L'' \cos. (B' - \zeta) \\
 & - \sin. L' \cos. L'' \cos. (B'' - \zeta)] \} \frac{d\zeta}{206265''} - \theta = 0.
 \end{aligned}$$

Ces équations trouveront leur application par la suite. J'ai cru ne pouvoir trop les multiplier, attendu leur usage pour faciliter la détermination de la position du plan des Comètes.

De la forme la plus générale que l'on peut donner à l'Équation (2) du §. 28.

(30.) On pourroit donner une forme plus générale à l'équation (2) du §. 28, & faire entrer dans le calcul, les erreurs des observations; c'est-à-dire, que supposant satisfaite l'équation (1) du §. 24, on peut demander quelle doit être la relation entre les variations de Δ' , Δ'' , Δ''' , & les erreurs des observations pour que l'équation demeure toujours satisfaite?

Pour résoudre cette question, je reprends l'équation (1) du §. 24, & je la différencie de toutes les manières; il est aisé de voir que l'on parviendra à l'équation suivante,

K ij

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (C \Delta' \Delta'' - E' \Delta' - F \Delta'' + K) d\Delta''' \\
 & + (C \Delta'' \Delta''' - E' \Delta''' - D' \Delta'' + G) d\Delta' \\
 & + (C \Delta' \Delta''' - F \Delta''' - D' \Delta' + H) d\Delta'' \\
 & + \Delta' \Delta'' \Delta''' dC - \Delta' \Delta'' dD' - \Delta' \Delta''' dE' \\
 & - \Delta'' \Delta''' dF + \Delta' dG + \Delta'' dH + \Delta''' dK - a = 0;
 \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}
 dC = & [\text{cof. } L' \text{ cof. } L'' \text{ cof. } L''' \text{ fin. } (B'' - B''') \\
 & - \text{fin. } L' \text{ fin. } L'' \text{ cof. } L''' \text{ fin. } (B''' - B') \\
 & - \text{fin. } L' \text{ cof. } L'' \text{ fin. } L''' \text{ fin. } (B' - B'')] \frac{dL'}{206265''} \\
 & - [\text{fin. } L' \text{ fin. } L'' \text{ cof. } L''' \text{ fin. } (B'' - B''') \\
 & - \text{cof. } L' \text{ cof. } L'' \text{ cof. } L''' \text{ fin. } (B''' - B') \\
 & + \text{cof. } L' \text{ fin. } L'' \text{ fin. } L''' \text{ fin. } (B' - B'')] \frac{dL''}{206265''} \\
 & - [\text{fin. } L' \text{ cof. } L'' \text{ fin. } L''' \text{ fin. } (B'' - B''') \\
 & + \text{cof. } L' \text{ fin. } L'' \text{ fin. } L''' \text{ fin. } (B''' - B') \\
 & - \text{cof. } L' \text{ cof. } L'' \text{ cof. } L''' \text{ fin. } (B' - B'')] \frac{dL'''}{206265''} \\
 & + [\text{fin. } L' \text{ cof. } L'' \text{ cof. } L''' \text{ cof. } (B'' - B''') \\
 & - \text{fin. } L''' \text{ cof. } L' \text{ cof. } L'' \text{ cof. } (B' - B'')] \frac{dB'}{206265''} \\
 & + [\text{fin. } L''' \text{ cof. } L' \text{ cof. } L'' \text{ cof. } (B' - B'')] \\
 & - \text{fin. } L'' \text{ cof. } L' \text{ cof. } L''' \text{ cof. } (B''' - B')] \frac{dB''}{206265''} \\
 & + [\text{fin. } L'' \text{ cof. } L' \text{ cof. } L''' \text{ cof. } (B''' - B') \\
 & - \text{fin. } L' \text{ cof. } L'' \text{ cof. } L''' \text{ cof. } (B'' - B''')] \frac{dB'''}{206265''}, \\
 dD' = & T''' [\text{cof. } L' \text{ cof. } L'' \text{ fin. } (B'' - A'') - \text{fin. } L' \text{ fin. } L'' \text{ fin. } (A''' - B')] \frac{dL'}{206265''} \\
 & + T''' [\text{cof. } L' \text{ cof. } L'' \text{ fin. } (A''' - B') - \text{fin. } L' \text{ fin. } L'' \text{ fin. } (B'' - A'')] \frac{dL''}{206265''} \\
 & + T''' \text{ fin. } L' \text{ cof. } L'' \text{ cof. } (B'' - A'') \frac{dB''}{206265''} \\
 & - T''' \text{ fin. } L'' \text{ cof. } L' \text{ cof. } (A''' - B') \frac{dB'''}{206265''}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dE &= T'' [\cos. L' \cos. L''' \sin. (A'' - B''') - \sin. L' \sin. L''' \sin. (B' - A'')] \frac{dL'}{206265''} \\
&+ T'' [\cos. L''' \cos. L' \sin. (B' - A'') - \sin. L' \sin. L''' \sin. (A'' - B''')] \frac{dL''}{206265''} \\
&+ T'' [\sin. L''' \cos. L' \cos. (B' - A'')] \frac{dB'}{206265''} \\
&- T'' \sin. L' \cos. L''' \cos. (A'' - B''') \frac{dB''}{206265''}, \\
dF &= T' [\cos. L'' \cos. L''' \sin. (B''' - A') - \sin. L'' \sin. L''' \sin. (A' - B''')] \frac{dL''}{206265''} \\
&+ T' [\cos. L'' \cos. L''' \sin. (A' - B''') - \sin. L'' \sin. L''' \sin. (B''' - A')] \frac{dL'''}{206265''} \\
&+ T' [\sin. L'' \cos. L''' \cos. (B''' - A')] \frac{dB'''}{206265''} \\
&- T' \cos. L'' \sin. L''' \cos. (A' - B'') \frac{dB''}{206265''}, \\
dG &= T'' T''' \cos. L' \sin. (A'' - A''') \frac{dL'}{206265''}, \\
dH &= T' T''' \cos. L'' \sin. (A''' - A') \frac{dL''}{206265''}, \\
dK &= T' T'' \cos. L''' \sin. (A' - A'') \frac{dL'''}{206265''}.
\end{aligned}$$

Au moyen de ces équations, l'on pourra apprécier l'influence des observations sur les résultats. Il est superflu d'avertir que dL' , dL'' , dL''' , dB' , dB'' , dB''' , sont les erreurs des observations évaluées en secondes de degré.

Qu'il existe entre les distances successives de la Comète à la Terre, des équations de la forme de celles dont il a été question dans le §. 25.

(31.) Si l'on considère trois observations successives, je vais faire voir qu'il existe entre les distances correspondantes de la Comète à la Terre, des équations de la forme suivante,

$$\Delta'' = P' \Delta', \quad \Delta''' = P \Delta',$$

P & P' étant des quantités connues. Il n'est pas même indispensable que les observations aient été faites dans des

intervalles très-prochains, pourvu toutefois que l'on puisse lier les observations éloignées par des observations prochaines. Je ne m'astreindrai donc pas pour résoudre le Problème des Comètes, à ne considérer rigoureusement que trois observations; j'en emploierai réellement quatre ou même un plus grand nombre; je combinerai les observations successives trois à trois; j'en conclurai les distances correspondantes de la Comète à la Terre; en un mot, je ferai résulter de ces premières observations un système de deux observations, & je les comparerai à une observation éloignée pour rectifier les élémens.

Dans le calcul des élémens de l'orbite, j'emploierai toujours la première & la dernière observation faite dans des intervalles proches, lorsqu'il s'agira de la comparer à l'observation éloignée dont il vient d'être question; j'appellerai

$\Delta', R', T', A', B', L'$, les quantités qui appartiennent à la première observation;

$\Delta'', R'', T'', A'', B'', L''$, les quantités qui appartiennent à la dernière des observations faites dans des intervalles proches.

Je nommerai

$\Delta''', R''', T''', A''', B''', L'''$, les quantités analogues de l'observation qu'il est nécessaire d'introduire pour déterminer les rapports de Δ' à Δ'' , de Δ' à Δ''' .

Je nommerai enfin

$\Delta'''' , R'''' , T'''' , A'''' , B'''' , L''''$, les quantités qui appartiennent à la quatrième observation éloignée;

t le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observation Δ' & Δ'' ;

t' le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observation Δ'' & Δ''' ;

s le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observation Δ' & Δ''' .

Dans ces dernières définitions, j'ai désigné chacune des observations par la valeur de Δ correspondante; ainsi, par exemple, j'ai nommé observation Δ' , la première observation; observation Δ'' , la seconde observation; & ainsi de suite. J'emploierai toujours cette désignation.

(32.) Soit

$$\mu' = \sin. L'' \cos. L' \sin. (B'' - A'') - \sin. L'' \cos. L'' \sin. (B'' - A'');$$

$$\mu'' = \sin. L'' \cos. L' \sin. (B' - A') - \sin. L' \cos. L'' \sin. (B'' - A'');$$

$$\mu''' = \sin. L'' \cos. L' \sin. (B' - A') - \sin. L' \cos. L'' \sin. (B'' - A'');$$

on conclura facilement de la savante analyse de M. de la Grange, les équations suivantes,

$$(1) \iota' \mu'' \Delta' - \mathfrak{S} \mu' \Delta'' = 0,$$

$$(2) \iota' \mu''' \Delta' - \iota \mu' \Delta''' = 0,$$

$$(3) \iota \mu'' \Delta''' - \mathfrak{S} \mu''' \Delta'' = 0.$$

Si donc l'on suppose

$$(4) P = \frac{\iota' \mu'''}{\iota \mu'},$$

$$(5) P' = \frac{\iota' \mu''}{\mathfrak{S} \mu'},$$

l'on aura

$$(6) \Delta'' - P' \Delta';$$

$$(7) \Delta''' - P \Delta'.$$

J'aurois pu renvoyer pour la démonstration de ces propositions, à l'Ouvrage même de M. de la Grange; mais comme l'énoncé ne se trouve pas précisément dans l'Ouvrage dont il s'agit, qui d'ailleurs pourroit n'être pas entre les mains du Lecteur, j'ai cru que l'on verroit avec plaisir un abrégé de son analyse; j'ai pensé aussi, que pour ne pas interrompre la suite des propositions relatives à la détermination des orbites des Comètes, il convenoit de renvoyer cette discussion à la fin du Mémoire.

On peut donc, quant à présent, regarder les équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) comme autant de Lemmes dont on aura la démonstration.

(33.) Quoique les déterminations précédentes soient fondées sur des considérations qui supposent des observations peu éloignées entr'elles, il est cependant possible d'employer sans danger des observations notablement distantes, pourvu

toutefois que l'on ait des observations intermédiaires qui lient ensemble ces observations éloignées. Je serois même tenté de croire que cette manière d'envisager le Problème est préférable dans la pratique, attendu que la méthode acquiert par-là le plus grand degré d'exactitude qu'elle puisse avoir, & que d'ailleurs les erreurs des observations se compensent.

Pour me faire entendre, je suppose que l'observation Δ''' soit notablement éloignée de l'observation Δ' ; & qu'il en est de même de l'observation Δ'' ; j'imagine d'ailleurs que l'on a des observations intermédiaires. Je remarque qu'en général si des quantités $\Delta', \epsilon, \epsilon', \epsilon'', \epsilon''', \&c.$ sont telles que l'on ait $\Delta' : \epsilon :: m : n$; $\epsilon : \epsilon' :: m' : n'$; $\epsilon' : \epsilon'' :: m'' : n''$; $\epsilon'' : \epsilon''' :: m''' : n'''$, & ainsi de suite; l'on aura $\Delta'n = \epsilon m$; $\Delta'n' = \epsilon' m'$; $\Delta'n n' = \epsilon'' m m'$, & ainsi de suite. Soient donc

$\Delta', \epsilon, \epsilon', \epsilon'', \epsilon''', \&c.$ Δ''' les observations que je désigne par les distances $\Delta', \epsilon, \epsilon', \epsilon'', \epsilon''', \&c.$ de la Comète à la Terre, lors de ces observations;

$\epsilon, \epsilon', \epsilon'', \epsilon''', \&c.$ les distances correspondantes aux observations intermédiaires entre l'observ. Δ' & l'observ. Δ''' .

Par les équations du *paragraphe précédent*, je détermine les rapports entre les distances $\Delta', \epsilon; \epsilon', \epsilon'', \&c. \Delta''; \epsilon''', \epsilon''''$, &c. Δ''' , & j'ai, en nommant $\frac{n}{m}, \frac{n'}{m'}, \frac{n''}{m''}, \&c.$ ces rapports successifs,

$$(1) \Delta''' = \frac{n n' n'' n''', \&c.}{m m' m'' m''', \&c.}, \Delta', \quad (2) \Delta'' = \frac{n n' n'', \&c.}{m m' m'', \&c.}, \Delta'.$$

On voit par-là que quoique les observations $\Delta', \Delta'', \Delta'''$ soient éloignées entr'elles, le véritable esprit de la méthode est conservé sans augmenter infiniment le calcul.

En général, soit que l'on se contente d'évaluer les quantités P, P' au moyen des équations (4) & (5) du §. 32, ce qui peut être inexact, soit que l'on suppose

$$(3) P = \frac{n n' n''}{m m' m''}, \&c. \quad (4) P = \frac{n n' n'' n'''}{m m' m'' m'''}, \&c.,$$

je

je supposerai toujours que l'on a

$$(5) \Delta'' = P'\Delta', \quad (6) \Delta''' = P\Delta'.$$

Détermination des valeurs de Δ' , Δ'' , Δ''' .

Première Méthode pour avoir ces valeurs.

(34.) Le but que nous nous sommes proposés dans les dernières recherches, a été de connoître les valeurs de Δ' , Δ'' , Δ''' ; & si nous avons donné les rapports entre ces quantités, nous n'avons regardé ces déterminations que comme un acheminement à la connoissance de ces valeurs; il faut donc nous occuper plus particulièrement de ce dernier objet. Nous remarquerons ici, qu'il suffira de connoître la valeur de Δ' , puisque quand cette valeur sera connue, on conclura facilement les valeurs de Δ'' & Δ''' , au moyen des équations (5) & (6) du §. 33.

(35.) J'emprunterai la première valeur de Δ' de l'équation (1) du §. 25. Comme l'équation dont elle se déduit est rigoureuse, quels que soient les intervalles entre les observations, elle peut s'appliquer à des observations éloignées entr'elles, pourvu toutefois, que l'on évalue les quantités P , P' , au moyen des équations du §. 33; & dans tous les cas, les résultats présentent le même degré d'exactitude que les évaluations des quantités P , P' . Si donc l'on conserve les définitions du §. 24, l'on aura l'équation suivante,

$$(1) PPC\Delta'' - (PD' + PE' + PPF)\Delta' + G + PH + PK = 0.$$

Cette équation n'est que du second degré, & par-là, elle a l'avantage de pouvoir être résolue par les méthodes ordinaires; mais en même temps elle présente une difficulté qu'il s'agit d'éclaircir. Voici comment on peut présenter la question.

Les deux racines de l'équation satisfont-elles au Problème des Comètes?

Pour résoudre cette difficulté, on se rappellera que pour
Mém. 1779. L

déterminer l'orbite des Comètes, il faut satisfaire à deux conditions ; la première, que la trajectoire soit dans un même plan ; la seconde, que la corde comprise entre les deux rayons vecteurs extrêmes soutende un arc qui puisse être décrit en vertu des forces centrales qui animent la Comète. L'équation (1) est absolument indépendante de la nature des forces centrales, puisque l'équation (1) du §. 24 ne dépend nullement de ces forces, & que les valeurs de P, P' , en sont également indépendantes. Lors donc que l'on a satisfait à cette équation, l'on n'a encore rempli qu'une des conditions, celle que la trajectoire soit dans un même plan, & cette condition admet deux solutions. Mais si l'on veut que la corde comprise entre les deux rayons vecteurs extrêmes, soutende un arc qui puisse être décrit en vertu des forces centrales ; il faut que cette corde puisse avoir pour expression celle que je vais développer dans les paragraphes suivans. Ce ne sont donc que les valeurs communes entre l'équation (1) du *présent paragraphe*, & une nouvelle équation que je vais déterminer, qui résolvent véritablement le Problème, puisque ces valeurs sont les seules qui réunissent toutes les conditions nécessaires. Cette proposition demande cependant quelque explication, ainsi que nous le ferons voir dans le §. 42.

Seconde Méthode.

(36.) Voici une seconde approximation de Δ' , tirée des propriétés de la parabole, & qui est analogue à la *Méthode des Principes mathématiques*. Cette méthode est le complément de la précédente ; & elle me paroît préférable dans la pratique, en ce qu'elle permet d'employer des observations plus éloignées entr'elles, pourvu toutefois, que l'on ait l'attention d'évaluer les quantités P', P , au moyen des équations (3) & (4) du §. 33.

Il suit du §. 15, que si l'on nomme

c la corde interceptée entre les rayons vecteurs R', R'' ,

on a

$$(1) \Delta'^2 + \Delta''^2 - 2 \Delta' \Delta'' [\cos. L' \cos. L'' \cos. (B''' - B') + \sin. L' \sin. L''] \\ - 2 \Delta' \cos. L' [T' \cos. (B' - A') - T'' \cos. (B' - A'')] \\ - 2 \Delta'' \cos. L'' [T'' \cos. (B''' - A'') - T' \cos. (B''' - A')] \\ + T'^2 + T''^2 - 2 T' T'' \cos. (A''' - A') - c^2 = 0.$$

Mais $\Delta'' = P \Delta'$; donc, si l'on suppose

$$F = 1 + P^2 - 2 P [\cos. L' \cos. L'' \cos. (B''' - B') + \sin. L' \sin. L''], \\ G = \cos. L' [T' \cos. (B' - A') - T'' \cos. (B' - A'')] \\ - P \cos. L'' [T'' \cos. (B''' - A'') - T' \cos. (B''' - A')], \\ H = T'^2 - 2 T' T'' \cos. (A''' - A') + T''^2,$$

l'on aura

$$(2) \Delta' (\Delta' - \frac{1}{F} G) + \frac{1}{F} (H - c^2) = 0.$$

Maintenant, si l'on suppose

$$R' = \sqrt{[\Delta' (\Delta' - 2 T' \cos. L' \cos. (B' - A')) + T'^2]},$$

$$R'' = \sqrt{[\Delta' (P^2 \Delta' - 2 P T'' \cos. L'' \cos. (B''' - A'')) + T''^2]},$$

Δ = le nombre de minutes de temps écoulées entre les observations,

r la moyenne distance du Soleil à la Terre,

s l'espace que la Terre décrit dans son orbite, pendant une minute de temps, lorsqu'elle est à sa moyenne distance du Soleil,

& que l'on détermine convenablement une quantité Ω , que j'introduis dans le calcul, pour l'éliminer ensuite, l'on aura

$$(3) c^2 = \frac{4 \Delta^2 s^2 r}{R' + R''} (1 + \Omega);$$

done

$$(4) \Delta' (\Delta' - \frac{1}{F} G) + \frac{1}{F} [H - \frac{4 \Delta^2 s^2 r}{R' + R''} (1 + \Omega)] = 0.$$

Il ne s'agit plus que d'évaluer convenablement la quantité Ω .

(37.) Si l'on nomme

c la corde de la parabole,

R', R'' les rayons vecteurs extrêmes,

p le rayon vecteur correspondant au sommet du diamètre qui coupe la corde en deux parties égales,

x la flèche comprise sur le rayon vecteur p , entre la corde & le sommet du diamètre,

84 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
l'on a, d'après Newton,

$$(1) x = \frac{c^2}{16\rho}; \quad (2) \rho = \frac{1}{2}(R' + R'') - x;$$

$$(3) c = \frac{3s\sqrt{2}\sqrt{r}}{\sqrt{(\frac{R' + R''}{2} - \frac{1}{2}x)}}.$$

Des équations (1.) & (2), l'on tire

$$x = \frac{R' + R'' - \sqrt{[(R' + R'')^2 - c^2]}}{4};$$

& si l'on porte cette valeur de x dans l'équation (3), l'on aura

$$c^2 = \frac{24 s^2 s^2 r}{5(R' + R'') + \sqrt{[(R' + R'')^2 - c^2]}};$$

donc en réduisant en série, l'on aura

$$(4) c^2 = \frac{4 s^2 s^2 r}{R' + R''} \left(1 + \frac{1}{5} \frac{3 s^2 s^2 r}{(R' + R'')^2}\right);$$

& cette approximation est très-grande, même pour une corde assez considérable.

Si l'on suppose que les intervalles entre les observations, sont assez petits pour que dans les équations (2) & (3) du *présent paragraphe*, l'on puisse négliger la quantité x ,

vis-à-vis de la quantité $\frac{R' + R''}{2}$, l'on aura $c^2 = \frac{2 s^2 s^2 r}{\rho}$;

mais

$$\rho = \sqrt{\Delta' [P'^2 \Delta' - 2 P' T'' \cos L'' \cos (B'' - A'')] + T''^2};$$

l'équation (4) du §. 36 deviendra donc

$$(5) \Delta' (\Delta' - \frac{2}{F} G) + \frac{1}{F} \left\{ H - \frac{2 s^2 s^2 r}{\sqrt{\Delta' [P'^2 \Delta' - 2 P' T'' \cos L'' \cos (B'' - A'')] + T''^2}} \right\} = 0.$$

Nous remarquerons seulement que dans ce cas, la formule perd l'avantage de pouvoir être appliquée à des observations éloignées entr'elles.

Nous remarquerons enfin, que comme la révolution sidérale de la Terre est de $365^h 6^m 9^s 11''$, on a

$$\text{Log. } s = 5,0772198; \quad \text{Log. } s^2 r = 20,1544396.$$

(38.) Si dans l'équation (1) du §. 36, l'on substitue à c^2 la valeur tirée de l'équation (4) du §. 37, elle deviendra

$$\begin{aligned} (1) \Delta'^2 + \Delta''^2 - 2 \Delta' \Delta'' [\cos. L' \cos. L'' \cos. (B''' - B') + \sin. L' \sin. L''] \\ - 2 \Delta' \cos. L' [T' \cos. (B' - A') - T'' \cos. (B' - A'')] \\ - 2 \Delta'' \cos. L'' [T'' \cos. (B''' - A'') - T' \cos. (B''' - A')] \\ + T'^2 + T''^2 - 2 T' T'' \cos. (A''' - A') \\ - \frac{4 S^2 s^2 r}{R' + R''} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{S^2 s^2 r}{(R' + R'')^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

Si l'on différencie cette équation, & que l'on suppose

$$\begin{aligned} f &= \cos. L' \cos. L'' \cos. (B''' - B') + \sin. L' \sin. L'', \\ g &= \cos. L' [T' \cos. (B' - A') - T'' \cos. (B' - A'')], \\ g' &= \cos. L'' [T'' \cos. (B''' - A'') - T' \cos. (B''' - A')], \\ h &= \frac{2 S^2 s^2 r}{(R' + R'')^2} \left[1 + \frac{4}{3} \frac{S^2 s^2 r}{(R' + R'')^2} \right], \end{aligned}$$

l'on aura

$$(2) (\Delta' - f \Delta'' - g) d\Delta' + (\Delta'' - f \Delta' - g') d\Delta'' + h dR' + h dR'' = 0.$$

Il n'est pas même nécessaire que l'équation (1) soit rigoureusement satisfaite par la substitution des différentes valeurs de Δ' , Δ'' , R' , R'' , &c, pour que l'on puisse employer une équation de la forme précédente; & si l'on nomme

γ' ce que devient l'équation (1) par les substitutions des valeurs particulières de R' , R'' , Δ' , Δ'' , &c,

l'on aura

$$(3) (\Delta' - f \Delta'' - g) d\Delta' + (\Delta'' - f \Delta' - g') d\Delta'' + h dR' + h dR'' - \gamma' = 0,$$

*Détermination des rayons vecteurs R' , R'' , R''' , R'''' , &c.
correspondans aux distances Δ' , Δ'' , Δ''' , Δ'''' , &c.
de la Comète à la Terre.*

(39.) Lorsque l'on connoît les distances Δ' , Δ'' , Δ''' , &c.

86. MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
de la Comète à la Terre, il est facile de déterminer les
rayons vecteurs correspondans.

Soient

R' le rayon vecteur de la Comète correspondant à la distance Δ' ;

R'' le rayon vecteur de la Comète correspondant à la distance Δ'' ;

R''' le rayon vecteur de la Comète correspondant à la distance Δ''' ;

R'''' le rayon vecteur de la Comète correspondant à la distance Δ'''' ;

& conservons les définitions précédentes de T' , T'' ,
 T''' , T'''' , &c. l'on a

$$(1) R' = \sqrt{[T'^2 + \Delta'^2 - 2 \Delta' T' \cos. L' \cos. (B' - A')]};$$

$$(2) R'' = \sqrt{[T''^2 + \Delta''^2 - 2 \Delta'' T'' \cos. L'' \cos. (B'' - A'')]};$$

$$(3) R''' = \sqrt{[T'''^2 + \Delta'''^2 - 2 \Delta''' T''' \cos. L''' \cos. (B''' - A''')]};$$

$$(4) R'''' = \sqrt{[T''''^2 + \Delta''''^2 - 2 \Delta'''' T'''' \cos. L'''' \cos. (B'''' - A'')]}.$$

Maintenant si l'on différencie ces équations, & que l'on
suppose

$$m' = \Delta' - T' \cos. L' \cos. (B' - A'),$$

$$m'' = \Delta'' - T'' \cos. L'' \cos. (B'' - A''),$$

$$m''' = \Delta''' - T''' \cos. L''' \cos. (B''' - A'''),$$

$$m'''' = \Delta'''' - T'''' \cos. L'''' \cos. (B'''' - A''),$$

l'on aura

$$(5) R' d R' - m' d \Delta' = 0;$$

$$(6) R'' d R'' - m'' d \Delta'' = 0;$$

$$(7) R''' d R''' - m''' d \Delta''' = 0;$$

$$(8) R'''' d R'''' - m'''' d \Delta'''' = 0.$$

*Méthode pour faciliter la résolution de l'équation (4)
du paragraphe 36.*

(40.) L'équation (4) du §. 36 présente quelques diffi-
cultés dans la pratique. En effet, quoique sous la forme du
second degré, elle est néanmoins d'un degré plus élevé; ce

qui peut faire naître quelques embarras dans l'usage de cette équation. Il est donc à propos d'avoir une méthode qui fasse trouver tout de suite la véritable valeur de Δ' , lorsque cette valeur sera à peu-près connue.

Pour y parvenir, je reprends l'équation (3) du §. 38; je substitue à Δ''' & à $d\Delta'''$ leurs valeurs $P\Delta'$, $Pd\Delta'$; je substitue pareillement à dR' & à dR''' , leurs valeurs $\frac{m'd\Delta'}{R'}$, $\frac{m''d\Delta'}{R''}$; bien entendu que l'on supposera, comme dans le §. 36,

$$R' = \sqrt{[\Delta' \{ \Delta' - 2 T' \cos L' \cos (B' - A') \} + T'^2]},$$

$$R'' = \sqrt{[\Delta' \{ P^2 \Delta' - 2 P T'' \cos L'' \cos (B'' - A'') \} + T''^2]},$$

& que dans ces dernières expressions, l'on prendra pour Δ' la valeur approchée, déjà connue par la supposition. Au moyen de ces substitutions, l'équation (3) du §. 38 deviendra

$$(1) [(1 + P^2 - 2 f P) \Delta' - g - P g' + h (\frac{m'}{R'} + \frac{m'' P}{R''})] d\Delta' - \gamma' = 0,$$

d'où l'on conclura tout de suite la valeur de $d\Delta'$, & par conséquent la véritable valeur de Δ' .

On pourroit même donner à cette dernière équation une forme plus générale, en faisant varier le rapport P ; l'on auroit alors $d\Delta'' = Pd\Delta' + \Delta'dP$, $dR'' = \frac{m''}{R''} (Pd\Delta' + \Delta'dP)$; & l'équation (1) deviendrait

$$(2) [(1 + P^2 - 2 f P) \Delta' - g - P g' + h (\frac{m'}{R'} + \frac{m''}{R''} P)] d\Delta' \\ + [(P - f + \frac{h m''}{R''}) \Delta' - g'] \Delta' dP - \gamma' = 0.$$

De l'angle compris sur le plan de la trajectoire, entre les rayons vecteurs extrêmes R' , R'' .

(41.) Si l'on nomme

N l'angle compris entre les rayons vecteurs extrêmes R' , R'' ,

on aura (S. 17),

$$(1) \ 4 R' R'' \sin. \frac{1}{2} N + (R''' - R')^2 - c^2 = 0;$$

bien entendu que si les intervalles entre les observations ne sont pas fort grands, on pourra supposer sans erreur sensible,

$$(2) \ c^2 = \frac{4 S^2 s^2 r^2}{R' + R'''} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{S^2 s^2 r^2}{(R' + R''')^2} \right).$$

Cette dernière équation est fondée sur une approximation de la corde, & par conséquent la valeur de $\sin. \frac{1}{2} N$ n'est elle-même qu'approchée. Voici une expression rigoureuse du même angle N , & qui est indépendante de la nature de la trajectoire,

$$(3) \ 2 R' R''' \sinus \frac{1}{2} N - R' R''' + T' T''' \cosinus (A''' - A') \\ - T' \Delta''' \cos. L''' \cos. (B''' - A') - T''' \Delta' \cos. L' \cos. (B' - A''') \\ + \Delta' \Delta''' [\cos. L' \cos. L''' \cos. (B''' - B') + \sin. L' \sin. L'''] = 0.$$

(42.) Il suit de ce qui vient d'être démontré dans les paragraphes précédens, qu'il est possible que les équations (1) du S. 35, & (4) du S. 36, n'aient pas, rigoureusement parlant, des valeurs communes. En effet, l'équation (4) du S. 36 est fondée sur des propriétés de la parabole; elle suppose donc que l'arc décrit par la Comète, s'identifie sensiblement avec un arc de parabole; l'équation (1) du S. 35, au contraire, est absolument indépendante de la trajectoire. De plus, cette dernière équation dépend beaucoup plus de l'exactitude des valeurs de P, P' , que l'équation du S. 36: enfin les erreurs des latitudes de la Lune influent d'une manière bien plus sensible sur l'équation (1) du S. 35, que sur l'équation (4) du S. 36. Ces raisons réunies doivent donc modifier la proposition qui termine le S. 35, & tendent toutes à faire préférer l'équation (4) du S. 36.

*Des Équations dépendantes de la nature de la trajectoire
parabolique des Comètes; & des Questions
qui en sont les Corollaires.*

(43.) Dans les paragraphes précédens, nous avons distingué les équations indépendantes de la nature de la trajectoire

trajectoire des Comètes, d'avec celles qui sont dépendantes de cette trajectoire, & nous nous sommes occupés particulièrement des questions qui supposent uniquement que le mouvement des Comètes se fait dans un même plan; nous devons maintenant résoudre celles dans lesquelles on doit faire entrer la considération particulière de la trajectoire.

Dans cette partie du Mémoire, nous donnerons des méthodes pour résoudre quelques questions que nous avons déjà résolues par d'autres méthodes; nous n'avons pas cru cependant devoir négliger ces solutions, & nous avons pensé que l'on verroit avec plaisir les différentes manières d'envisager les mêmes Problèmes.

*De l'anomalie de la Comète à l'instant des observations;
de la distance périhélie; & de l'instant du passage
par le périhélie.*

(44-) Si l'on nomme

R' le rayon vecteur de la Comète,

D la distance périhélie,

ν' l'angle traversé depuis le périhélie jusqu'à l'instant de la première observation,

R'' le rayon vecteur de la Comète à l'instant de la troisième observation,

ν'' l'angle traversé depuis le périhélie jusqu'à l'instant de la troisième observation,

N l'angle compris entre les deux rayons R' , R'' ,

il est évident que l'on a (S. 4)

$$(1) R' (1 + \cos. \nu') - 2 D = 0,$$

$$(2) R'' (1 + \cos. \nu'') - 2 D = 0,$$

$$(3) \nu'' = \nu' + N.$$

Si l'on compare les équations (1) & (2), l'on aura

$$R' (1 + \cos. \nu') - R'' (1 + \cos. \nu'') = 0,$$

ou, à cause de $\nu'' = \nu' + N$,

$$R' (1 + \cos. \nu') - R'' [1 + \cos. (\nu' + N)] = 0;$$

Mém. 1779.

M

ou, enfin

$$R' - R'' + R''' \sin. N \sin. v' + (R' - R'' \cos. N) \cos. v' = 0.$$

Soit maintenant

$$M \text{ un angle tel que l'on ait (4) } \tan. M = \frac{R' - R'' \cos. N}{R''' \sin. N};$$

l'équation précédente deviendra

$$(5) \sin. (v' + M) = \frac{(R''' - R') \cos. M}{R''' \sin. N}.$$

Cette équation fera connoître l'anomalie de la Comète à l'instant de la première observation.

L'espèce de l'angle M n'est point arbitraire; & cet angle est déterminé spécifiquement par l'équation (4) du *présent paragraphe*; il doit être employé tel qu'il est donné par l'analyse. Il faut relire, au surplus, ce que nous avons dit à ce sujet dans le §. 22.

La détermination de la distance périhélie ne présente plus maintenant aucune difficulté; en effet, puisque l'on connoît le rayon vecteur de la Comète & son anomalie, à l'instant de la première observation, l'on conclura tout de suite la distance périhélie, au moyen de l'équation (1)

On déterminera pareillement l'instant du passage de la Comète par le périhélie, au moyen de l'équation suivante,

(6) Nombre de minutes de temps écoulées entre l'instant du passage de la Comète par le périhélie & la première observation

$$= \frac{1}{4} (R' + 2D) \sqrt{R' - D} \frac{157846^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}};$$

Quoique cette dernière équation ne donne par elle-même aucune lumière sur la question de savoir si, à l'instant de la première observation, la Comète tend à son périhélie, ou si elle s'en éloigne, puisque la forme de l'équation est absolument la même dans les deux cas, il est cependant évident que l'on ne peut point être embarrassé sur la solution de cette difficulté. En effet, puisque l'on connoît l'anomalie de

la Comète lors de la première observation, on sait si la Comète s'éloignoit du périhélie, ou si elle s'en approchoit lors de la première observation.

(45.) Dans l'équation (5) du §. 44, l'expression de $\sin. (v' + M)$ appartient également à deux angles. Géométriquement parlant, il n'y a aucune raison pour exclure l'un plutôt que l'autre; toutes les deux anomalies commencent deux arcs terminés par des rayons vecteurs de même longueur, & éloignés entr'eux d'un même angle N pris dans le même sens. Ces deux suppositions donnent à la vérité des distances périhéliees différentes, & par conséquent des paraboles également différentes. Mais quoique les deux paraboles satisfassent géométriquement aux deux conditions d'où l'on a déduit l'anomalie, il n'est pourtant pas exact de dire qu'elles satisfont astronomiquement au Problème; en effet, des deux anomalies données par l'équation du second degré, l'une est toujours telle que l'angle v' étant moindre que 180 degrés, l'angle $v' + N$ est plus grand que 180 degrés; il faudroit donc pour que cette solution eût lieu, que la Comète pût passer d'une branche de la parabole à l'autre branche, par l'aphélie; ce qui est impossible.

Examen de la légitimité de la première supposition sur la valeur de Δ' employée dans le Calcul.

(46.) Pour prononcer sur la légitimité de la valeur de Δ' employée dans les calculs, il faut avoir une méthode qui puisse faire juger si la parabole que l'on vient de déterminer, a pu être décrite dans l'intervalle des observations. Rien n'est plus simple que cette méthode: voici en quoi elle consiste.

Soit

Δ le nombre de minutes de temps écoulées entre la première & la dernière observation.

Nous avons vu que l'on a

$$(1) \Delta = [(R'' + 2D) \sqrt{(R'' - D)} \mp (R' + 2D) \sqrt{(R' - D)}] \div \frac{157846' +}{4r^{\frac{1}{2}}} \div M \text{ ij}$$

on verra donc si, substituant dans cette équation les valeurs de R'' , R' , D trouvées précédemment, l'équation est satisfaite. Dans le premier cas, le Problème est complètement résolu; la double condition que la trajectoire de la Comète soit dans un même plan, & que ce soit une parabole, est remplie, & il n'y a plus rien à chercher; dans le second cas, les deux conditions ne sont pas encore satisfaites, & il faut chercher à les remplir.

Nous avons vu §. 9. ce que signifient les deux suites de signes de l'équation (*); je ne répéterai point ce que j'ai dit à ce sujet.

*Détermination de la longitude héliocentrique de la Comète,
& du sens de son mouvement.*

(47.) Nous connoissons à peu-près les véritables distances de la Comète à la Terre, lors des observations calculées; nous devons maintenant donner une méthode pour connoître le sens du mouvement de la Comète, vu du Soleil; ainsi que sa longitude héliocentrique.

Fig. 2. Pour y parvenir, du Soleil S & par la projection C' de la Comète sur le plan de l'Écliptique, menons le rayon vecteur accourci SC' , & conservons les constructions du §. 13; il est évident que si de la projection C' de la Comète sur l'Écliptique, nous abaïssons sur le diamètre Ee de l'orbite de la Terre, passant par le premier point d'Ariès, la perpendiculaire $C'P$; la ligne SP est celle que nous avons nommée x , & la droite PC' est celle que nous avons nommée y . De plus, l'angle PSC' est égal à la longitude de la Comète, vue du Soleil, augmentée de 180^d ; donc

$$\text{Tangente (long. héliocent. de la Comète} + 180^d) = \frac{y}{x};$$

donc

$$\text{Tangente (longitude héliocentrique de la Comète)} = \frac{-y}{x}.$$

Si, dans cette dernière expression, l'on substitue à $-x$ &

à — y , leurs valeurs tirées des équations (1) & (2) du §. 43, l'on aura

$$\text{Tangente (long. héliocent. de la Comète)} = \frac{\Delta \cos. L \sin. B - T \sin. A}{\Delta \cos. L \cos. B - T \cos. A}.$$

Cette équation a lieu pour toutes les observations; si donc l'on a deux observations consécutives de la Comète, & que l'on désigne par Δ' , B' , L' , T' , A' , les quantités qui appartiennent à la première observation; par Δ'' , B'' , L'' , T'' , A'' , les quantités qui appartiennent à la seconde observation, l'on aura

$$(1) \text{ Tang. (long. héliocent. de la Comète)} = \frac{\Delta' \cos. L' \sin. B' - T' \sin. A'}{\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A'};$$

$$(2) \text{ Tang. (long. héliocent. de la Comète)} = \frac{\Delta'' \cos. L'' \sin. B'' - T'' \sin. A''}{\Delta'' \cos. L'' \cos. B'' - T'' \cos. A''}.$$

Il ne s'agit que de vérifier si la seconde équation donne une longitude plus grande ou plus petite que la première. Dans le premier cas, la Comète est directe; dans le second cas, elle est rétrograde.

De la distance du périhélie de la Comète au nœud ascendant, comptée sur l'orbite.

(48.) Soit

R le rayon vecteur de la Comète;

I l'angle d'inclinaison du plan de l'orbite sur l'Écliptique;

α l'angle du rayon vecteur de la Comète avec la ligne des nœuds; cet angle est compté sur le plan de l'orbite de la Comète, en partant du nœud ascendant, & en suivant le sens du mouvement de cet Astre dans son orbite;

Ω la distance du périhélie de la Comète au nœud ascendant; cet angle est compté sur le plan de l'orbite, en suivant le sens du mouvement de la Comète;

Δ la distance de la Comète à la Terre;

A la longitude du Soleil;

B la longitude géocentrique de la Comète;

L la latitude géocentrique de la Comète;

94 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

il est évident que pour chaque observation, on a d'abord une équation de la forme suivante,

$$R [1 + \cos(u - \Omega)] - 2D = 0.$$

De plus, on a (5. 20 équation (1))

$$R \sin. u \sin. I - \Delta \sin. L = 0.$$

Si donc l'on compare la première & la troisième observations, on aura les équations suivantes,

$$(1) R' [1 + \cos(u' - \Omega)] - 2D = 0;$$

$$(2) R'' [1 + \cos(u'' - \Omega)] - 2D = 0;$$

$$(3) R' \sin. u' \sin. I - \Delta' \sin. L' = 0;$$

$$(4) R'' \sin. u'' \sin. I - \Delta'' \sin. L'' = 0.$$

Des équations (3) & (4), l'on tire

$$\Delta' R'' \sin. L' \sin. u'' - \Delta'' R' \sin. L'' \sin. u' = 0.$$

Maintenant si l'on nomme

u' l'anomalie de la Comète lors de la 1.^{re} observation,

u'' l'anomalie de la Comète lors de la 2.^e observation,

N l'angle compris entre les deux rayons vecteurs R' , R'' ,

il est évident qu'il y a la même différence entre u'' & u' qu'entre u''' & u' , & l'on aura

$$(5) u'' = u' + N.$$

Donc

$$(6) \Delta' R'' \sin. L' \sin. (u' + N) - \Delta'' R' \sin. L'' \sin. u' = 0;$$

mais $\sin. (u' + N) = \sin. u' \cos. N + \sin. N \cos. u'$; donc

$$(7) \text{tangente } u' = \frac{R'' \Delta' \sin. L' \sin. N}{R' \Delta'' \sin. L'' - R'' \Delta' \sin. L' \cos. N}.$$

Nous connoissons maintenant la valeur de u' qui répond à la première observation; on conclura donc la position du périhélie au moyen de l'équation

$$(8) \cos. (u' - \Omega) = \frac{2D}{R^2} - 1,$$

ou plus simplement, au moyen de l'équation

$$(9) \Omega = u' - v'.$$

*De l'inclinaison du plan de l'orbite de la Comète
sur l'Écliptique.*

(49.) Quoique nous ayons déjà donné une méthode pour conclure l'inclinaison de l'orbite de la Comète sur l'Écliptique, on ne sera pas fâché de voir avec quelle facilité elle se déduit des équations précédentes : en effet, de l'équation (3) du §. 48, l'on tire tout de suite

$$(1) \sin. I = \frac{\Delta' \sin. L'}{R' \sin. u'}.$$

Nous remarquerons que $\sin. I$ appartient à deux angles ; on choisira le plus petit de ces angles, si la Comète est directe ; on choisira le plus grand, si la Comète est rétrograde.

*Du lieu du Nœud ascendant de la Comète sur l'Écliptique,
& de la longitude du Périhélie.*

(50.) Nous avons déjà donné une méthode pour déterminer le lieu du nœud ascendant de la Comète sur l'Écliptique ; voici une seconde solution du même Problème.

Par la Terre T menons une parallèle indéfinie Tt' au diamètre ESe de l'orbite de la Terre, passant par le premier point d'Ariès ; & une autre parallèle Tt à la ligne des nœuds. Prenons le point t tel que Mt soit le prolongement de $C'M$, & que par conséquent $C'Mt$ soit perpendiculaire à la ligne Tt ; on aura (§. 20).

$$MC' = R \sin. u \cos. I;$$

$$Mt = mT = T \sin. (TSm);$$

$$C't = Mt + MC' = T \sin. (TSm) + R \sin. u \cos. I.$$

$$TC' = \Delta \cos. L;$$

$$TC' \sin. (C'Tt) - C't = 0.$$

De plus, l'angle $C'Tt$ est évidemment égal à la longitude,

Fig. 3.

géocentrique de la Comète moins la longitude du nœud ascendant, puisqu'en effet, il est égal à l'angle $C'T'$ moins l'angle tT' ; par la même raison, l'angle STt est égal à la longitude du Soleil moins la longitude du nœud ascendant de la Comète. Si donc l'on nomme

ζ la longitude du nœud ascendant de la Comète,

A la longitude du Soleil,

B la longitude géocentrique de la Comète,

l'on aura

$$\text{angle } STt = \text{angle } TSm = A - \zeta; \quad \text{angle } C'Tt = B - \zeta;$$

donc

$$T \sin. (TSm) = T \sin. (A - \zeta);$$

donc

$$Ct = T \sin. (A - \zeta) + R \sin. \pi \cos. I;$$

donc en rapportant l'équation à la première observation,

$$(1) R' \sin. u' \cos. I + T' \sin. (A' - \zeta) - \Delta' \cos. L' \sin. (B' - \zeta) = 0;$$

$$\text{ou enfin, à cause de } R' \sin. u' = \frac{\Delta' \sin. L'}{\sin. I},$$

$$(2) \Delta' \sin. L' \cotang. I + T' \sin. (A' - \zeta) - \Delta' \cos. L' \sin. (B' - \zeta) = 0.$$

(51.) L'équation (2) du *paragraphe précédent* peut être mise sous la forme suivante,

$$\Delta' \sin. L' \cotang. I + (T' \sin. A' - \Delta' \cos. L' \sin. B') \cos. \zeta - (T' \cos. A' - \Delta' \cos. L' \cos. B') \sin. \zeta = 0.$$

Soit maintenant

$$M \text{ un angle tel que l'on ait } (1) \tan. M = \frac{\Delta' \cos. L' \sin. B' - T' \sin. A'}{\Delta' \cos. L' \cos. B' - T' \cos. A'};$$

l'équation précédente deviendra

$$(2) \sin. (\zeta - M) = \frac{\Delta' \sin. L' \cotang. I \sin. M}{T' \sin. A' - \Delta' \cos. L' \sin. B'}.$$

Nous remarquerons que l'angle M est égal à la longitude héliocentrique de la Comète, que nous avons déterminée (S. 47).

(52.) Lorsque l'on connoitra la longitude du nœud ascendant sur l'Écliptique, il sera facile de déterminer la longitude du

du périhélie. En effet, nous avons déterminé (S. 48) la distance du périhélie de la Comète à son nœud, comptée sur l'orbite & prise dans le sens du mouvement de la Comète. On ajoutera cette distance à la longitude du nœud ascendant, si la Comète est directe; on soustraira cette distance de la longitude du nœud ascendant, si la Comète est rétrograde; & l'on aura ce que l'on appelle la *longitude du périhélie*.

(53.) Dans l'équation (2) du S. 51, l'expression de $\sin. (\zeta - M)$ appartient à deux angles, & il ne paroît d'abord aucune raison pour exclure l'un de ces angles. Si cependant l'on fait réflexion que l'une des deux latitudes géocentriques de la Comète n'entre point dans la formule qui détermine la position du nœud, on verra que les deux angles ne satisfont point astronomiquement au Problème; & l'on ne sera point embarrassé sur le choix. On exclura celui des deux angles qui supposeroit, par exemple, que la seconde latitude géocentrique seroit plus grande que la première, tandis que les observations la donneroient plus petite; & réciproquement.

Examen de ce qui a lieu lorsque l'on combine une Observation éloignée avec les premières Observations.

(54.) Par les méthodes précédentes, nous avons déterminé les élémens qui représentent les premières observations; & ces élémens ne peuvent manquer, par la manière dont ils sont déduits, de convenir à peu-près à la véritable parabole; il s'agit maintenant de vérifier si ces élémens satisfont à une observation éloignée.

Pour y parvenir, on remarquera que relativement à cette observation éloignée, l'on a toutes les mêmes équations qui ont lieu pour les premières observations; l'on a donc, les équations suivantes,

- (1) $R''' = T''' + \Delta''' - 2 \Delta''' T''' \cos. L''' \cos. (B''' - A''')$;
- (2) $R''' \sin. u''' \sin. I - \Delta''' \sin. L''' = 0$;
- (3) $R''' \sin. u''' \cos. I + T''' \sin. (A''' - \zeta) - \Delta''' \cos. L''' \sin. (B''' - \zeta) = 0$.

Mém. 1779.

N

Dans ces équations, I & ζ sont des quantités connues, puisqu'elles ont été déterminées précédemment; de plus, les angles A''' , B''' , L''' & le rayon T''' dépendent de la dernière observation.

Des équations (2) & (3), l'on tire

$$(4) \Delta''' \sin. L''' \cotang. I + T''' \sin. (A''' - \zeta) - \Delta''' \cos. L''' \sin. (B''' - \zeta) = 0;$$

on déterminera donc Δ''' au moyen de cette dernière équation, & l'on connoîtra R''' au moyen de l'équation (1).

(55.) L'équation (4) du *paragraphe précédent*, renferme la latitude & la longitude de la Comète à l'instant de la dernière observation. On fait cependant qu'un seul de ces élémens doit déterminer le rayon vecteur de la Comète, & sa distance à la Terre, de sorte que l'équation (4) introduit dans le Problème plus de conditions qu'il n'est nécessaire; il est vrai que si les observations sont exactes, cette condition superflue ne présente aucun inconvénient. Quoi qu'il en soit, je vais donner les formules qui résoudreont la question en n'employant qu'une des deux observations.

Fig. 3. Pour parvenir à ce but, je remarque que l'angle tTC' est égal à la longitude géocentrique de la Comète moins la longitude du nœud; cet angle est donc égal à $B''' - \zeta$. De plus, à cause du triangle tTC' rectangle en t ,

$$Tt \tan. (tTC') - C't = 0;$$

$$\text{donc } Tt \tan. (B''' - \zeta) - C't = 0;$$

mais (5. 50)

$$C't = T''' \sin. (A''' - \zeta) + R''' \sin. u''' \cos. I.$$

$$\text{De plus, } Tt = MS + Sm;$$

$$MS = R''' \cos. u'''; Sm = T''' \cos. (A''' - \zeta);$$

$$\text{donc } Tt = R''' \cos. u''' + T''' \cos. (A''' - \zeta);$$

donc

$$[R'' \cos. u''' + T'' \cos. (A'' - \zeta)] \tan. (B'' - \zeta) - T'' \sin. (A'' - \zeta) - R'' \sin. u''' \cos. I = 0.$$

Mais $\tan. (B'' - \zeta) = \frac{\sin. (B'' - \zeta)}{\cos. (B'' - \zeta)}$; donc

$$R'' [\cos. u''' \sin. (B'' - \zeta) - \sin. u''' \cos. I \cos. (B'' - \zeta)] + T'' [\cos. (A'' - \zeta) \sin. (B'' - \zeta) - \sin. (A'' - \zeta) \cos. (B'' - \zeta)] = 0.$$

De plus,

$$\cos. (A'' - \zeta) \sin. (B'' - \zeta) - \sin. (A'' - \zeta) \cos. (B'' - \zeta) = \sin. (B'' - A'');$$

donc

$$(1) R'' [\cos. u''' \sin. (B'' - \zeta) - \sin. u''' \cos. I \cos. (B'' - \zeta)] + T'' \sin. (B'' - A'') = 0.$$

D'ailleurs,

$$(2) R'' [1 + \cos. (u''' - \Omega)] - 2D = 0;$$

donc $R'' = \frac{2D}{1 + \cos. \Omega \cos. u''' + \sin. \Omega \sin. u'''}$.

Donc enfin, si l'on nomme

$$M \text{ un angle tel que l'on ait } (3) \tan. M = \frac{2D \sin. (B'' - \zeta) + T'' \sin. (B'' - A'') \cos. \Omega}{2D \cos. I \cos. (B'' - \zeta) - T'' \sin. (B'' - A'') / \sin. \Omega}$$

l'on aura

$$(4) \sin. (u''' - M) = \frac{T'' \sin. (B'' - A'') \sin. M}{2D \sin. (B'' - \zeta) + T'' \cos. \Omega \sin. (B'' - A'')}.$$

L'on connoîtra donc la valeur de u''' , d'où l'on conclura la valeur de R'' , au moyen de l'équation (1).

(56.) L'équation précédente donne deux valeurs de u''' ; on ne peut jamais être embarrassé sur le choix de ces valeurs; on prendra celle qui rend nulle l'équation (2) du §. 54; on sent aisément la raison de ce procédé. En effet, la dernière équation que nous avons résolue étant indépendante de la latitude de la Comète, appartient indifféremment aux

deux cas de la latitude australe & de la latitude boréale : il faut donc une nouvelle considération pour exclure l'une des deux solutions.

(57.) Si toutes les observations dont on a fait usage dans le cours de ces calculs, étoient également exactes, la valeur de R''' déduite par la méthode précédente, seroit égale à celle que l'on conclut des équations du §. 54; mais s'il s'est glissé quelque inexactitude dans ces observations, les deux équations ne peuvent pas être à la fois rigoureusement satisfaites : la comparaison des deux résultats apprendra donc quelle foi l'on doit ajouter aux observations.

(58.) Indépendamment des méthodes précédentes, on peut déterminer la distance de la Comète à la Terre, lors de la dernière observation, par la formule du §. 24.

Comme dans les recherches suivantes, je ne considérerai plus que trois observations, 1.^o la première de toutes les observations; 2.^o celle qui résulte de la comparaison des observations prochaines (§. 31); 3.^o l'observation éloignée dont il vient d'être question; pour éviter la multiplicité des accens, je nommerai

$R', \Delta', T', A', B', L',$ &c. les quantités relatives à la première observation;

$R'', \Delta'', T'', A'', B'', L'',$ &c. les quantités relatives à la seconde observation; c'est-à-dire à celle qui résulte de la comparaison des observations prochaines, & que je laisse dans le calcul;

$R''', \Delta''', T''', A''', B''', L''',$ &c. les quantités relatives à la troisième observation éloignée.

On déterminera donc facilement la distance de la Comète à la Terre, correspondante à la dernière observation, au moyen de l'équation suivante (§. 24),

$$(1) \Delta''' = \frac{D' \Delta' \Delta'' - G \Delta' - H \Delta''}{C \Delta' \Delta'' - E' \Delta' - F \Delta'' - R'}$$

Cette manière de déterminer les distances de la Comète à la Terre, a l'avantage de rendre nulles les équations de la forme de celles du §. 24.

Détermination des véritables élémens de la Comète.

(59.) Les élémens déduits des calculs précédens, ne peuvent manquer d'être approchés; mais il est très-probable qu'ils ne sont point rigoureusement exacts; il faut donc d'abord s'assurer de la légitimité des premières suppositions.

Si l'on nomme

D la distance périhélie de la Comète,

$R', \Delta', T', A', B', L'$, &c. les quantités relatives à la première observation,

$R'', \Delta'', T'', A'', B'', L''$, &c. les quantités relatives à la seconde observation,

$R''', \Delta''', T''', A''', B''', L'''$, &c. les quantités relatives à la troisième observation,

t le nombre de minutes de temps écoulées entre la première & la seconde observation;

t' le nombre de minutes écoulées entre la seconde & la troisième observation,

τ le nombre de minutes que l'on conclut de l'équation suivante,

$$(1) \tau = [(R'' + 2D) \sqrt{R'' - D} \mp (R' + 2D) \sqrt{R' - D}] \frac{157846' \frac{1}{2}}{4r^{\frac{1}{2}}},$$

τ' le nombre de minutes que l'on conclut de l'équation suivante,

$$(2) \tau' = [(R''' + 2D) \sqrt{R''' - D} \mp (R'' + 2D) \sqrt{R'' - D}] \frac{157846' \frac{1}{2}}{4r^{\frac{1}{2}}},$$

les déterminations ne seront rigoureuses qu'autant que l'on aura $\tau = t$, $\tau' = t'$. Dans tout autre cas, les élémens ne seront qu'approchés; il est alors nécessaire d'avoir une méthode pour parvenir à la connoissance des véritables élémens.

Nous avons vu, §. 9, ce que signifient les deux suites de signes; je ne répéterai point ce que j'ai dit à ce sujet.

(60.) Puisque l'on connoît à peu-près les valeurs de D , R' , R'' , R''' ; si l'on différencie les équations (1) & (2) du paragraphe précédent, & que l'on suppose

$$(1) \quad d\tau = t - \tau; \quad (2) \quad d\tau' = t' - \tau';$$

il est évident que l'on aura les relations entre les quantités dD , dR' , dR'' , dR''' , $d\tau$, $d\tau'$, qui satisfont au Problème. Soit donc

$$a = \pm \frac{R \sqrt{R'' - D}}{r^{\frac{1}{2}}};$$

$$a' = \pm \frac{R'' \sqrt{R''' - D}}{r^{\frac{1}{2}}};$$

$$b = - \frac{R' \sqrt{R' - D}}{r^{\frac{1}{2}}};$$

$$b' = - \frac{R''' \sqrt{R''' - D}}{r^{\frac{1}{2}}};$$

$$c = - \frac{(R'' - 2D) \sqrt{R' - D} \mp (R - 2D) \sqrt{R'' - D}}{r^{\frac{1}{2}}};$$

$$c' = - \frac{(R''' - 2D) \sqrt{R'' - D} \mp (R' - 2D) \sqrt{R''' - D}}{r^{\frac{1}{2}}};$$

$$e = \frac{2}{3} \frac{4 \sqrt{R' - D} \sqrt{R'' - D}}{157846^{\frac{1}{2}}};$$

$$e' = \frac{2}{3} \frac{4 \sqrt{R'' - D} \sqrt{R''' - D}}{157846^{\frac{1}{2}}};$$

l'on aura

$$(3) \quad a dR' + b dR'' + c dD + e r d\tau = 0,$$

$$(4) \quad a' dR'' + b' dR''' + c' dD + e' r d\tau' = 0.$$

L'équation (3) résulte de la comparaison du véritable temps écoulé entre les deux premières observations, & celui que l'on détermine par l'équation (1) du §. 59; l'équation (4)

résulte de la comparaison du véritable temps écoulé entre la seconde & la troisième observation, & celui que l'on détermine par l'équation (2) du §. 59.

Les valeurs de a & de c , de a' & de c' , ont un double signe; on emploiera les signes supérieurs, lorsque dans l'intervalle des deux observations que l'on combine, la Comète n'aura point passé par le périhélie; on emploiera les signes inférieurs dans le cas contraire.

(61.) Des équations (3) & (4) du §. 60, l'on tire

$$(1) a'c'dR' + (bc' - a'c)dR'' - b'cdR''' + c'drd\tau - c'cd\tau' = 0.$$

Mais si l'on conserve les définitions de m' , m'' , m''' du §. 39, l'on a

$$dR' = \frac{m'd\Delta'}{R'}; \quad dR'' = \frac{m''d\Delta''}{R''}; \quad dR''' = \frac{m'''d\Delta'''}{R'''};$$

donc

$$(2) \frac{a'c'm'}{R'}d\Delta' + (bc' - a'c)\frac{m''d\Delta''}{R''} - \frac{b'cm''d\Delta''}{R''} + c'drd\tau - c'cd\tau' = 0.$$

Cette équation est une de celles qu'il faut satisfaire pour avoir les véritables élémens; il n'est plus question maintenant que d'avoir les relations entre $d\Delta'$, $d\Delta''$, $d\Delta'''$.

(62.) Pour avoir la relation entre $d\Delta'$ & $d\Delta''$, je fais usage de l'équation (3) du §. 38, dans laquelle je change Δ''' , R''' , A''' , B''' , L''' , T''' en Δ'' , R'' , A'' , B'' , L'' , T'' , &c; j'ai donc

$$(1) (\Delta' - f\Delta'' - g)d\Delta' + (\Delta'' - f\Delta' - g')d\Delta'' + h dR' + h dR'' - \gamma' = 0;$$

$$\text{mais} \quad dR' = \frac{m'd\Delta'}{R'}; \quad dR'' = \frac{m''d\Delta''}{R''};$$

donc, si l'on suppose

$$M = \Delta' - f\Delta'' - g + \frac{m'h}{R'},$$

$$M' = \Delta'' - f\Delta' - g' + \frac{m''h}{R''},$$

l'on aura

$$(2) M d\Delta' + M' d\Delta'' - \gamma' = 0.$$

Quant à la relation entre $d\Delta'''$ & $d\Delta'$, je la tirerai de

l'équation (1) du §. 28, dans laquelle je supposerai

$$d\Delta'' = -\frac{M}{M'} d\Delta' + \frac{\gamma'}{M'}.$$

Si donc l'on suppose

$$l = C\Delta'\Delta'' - E'\Delta' - F\Delta'' + K,$$

$$\lambda = C\Delta''\Delta''' - E'\Delta'' - D'\Delta''' + G,$$

$$\lambda' = C\Delta'\Delta''' - F\Delta''' - D'\Delta' + H,$$

l'on aura

$$(3) \quad l d\Delta''' + \left(\lambda - \frac{\lambda' M}{M'}\right) d\Delta' + \frac{\lambda' \gamma'}{M'} - a = 0.$$

Il est superflu d'avertir que si les équations (1) des §§. 24 & 38, étoient satisfaites, par les suppositions particulières, sur Δ' , Δ'' , Δ''' ; R' , R'' , R''' , &c. les quantités γ' & a disparaîtroient dans les résultats.

(63.) Maintenant si l'on substitue ces valeurs de $d\Delta''$ & de $d\Delta'''$ dans l'équation (2) du §. 61, elle deviendra

$$(1) \quad \left[\frac{a'c'm'}{R'} - (b'c' - d'c) \frac{Mm''}{M'R''} + \frac{b'cm''}{lR''} \left(\lambda - \frac{\lambda' M}{M'} \right) \right] d\Delta' \\ + (b'c' - d'c) \frac{\gamma'm''}{M'R''} + \frac{b'cm''}{lR''} \left(\frac{\lambda' \gamma'}{M'} - a \right) + \epsilon' \tau d\tau - \epsilon' \tau d\tau = 0;$$

& le Problème est résolu. En effet, si l'on nomme

ϑ' , ϑ'' , ϑ''' , ρ' , ρ'' , ρ''' les trois distances de la Terre à la Comète, & les trois rayons vecteurs trouvés précédemment, que l'on ne doit plus regarder que comme des approximations,

Δ' , Δ'' , Δ''' , R' , R'' , R''' les trois véritables distances de la Terre à la Comète, & les trois véritables rayons vecteurs,

l'on aura

$$(2) \quad \Delta' = \vartheta' + d\Delta';$$

$$(3) \quad \Delta'' = \vartheta'' - \frac{M}{M'} d\Delta' + \frac{\gamma'}{M'};$$

$$(4) \quad \Delta''' = \vartheta''' - \left\{ \frac{\lambda - \frac{\lambda' M}{M'}}{l} \right\} d\Delta' - \frac{\lambda' \gamma'}{lM'} + \frac{a}{l};$$

$$(5) R' = \rho' + \frac{m' d \Delta'}{\rho'};$$

$$(6) R'' = \rho'' - \frac{m''}{\rho''} \frac{M}{M'} d \Delta' + \frac{m''}{\rho''} \frac{\gamma'}{M'};$$

$$(7) R''' = \rho''' - \frac{m'''}{\rho'''} \left(\lambda - \frac{\lambda' M}{M'} \right) d \Delta' - \frac{m'''}{\rho'''} \left(\frac{\lambda' \gamma'}{M'} - a \right).$$

& comme $d \Delta'$ est connu par la première équation, on connoîtra les trois véritables distances de la Comète à la Terre, & les trois rayons vecteurs correspondans aux trois observations.

(64.) On connoîtra pareillement la véritable distance périhélie, au moyen de l'équation suivante,

$$(6) D = \rho' - \left(\frac{a}{c} \frac{m'}{\rho'} - \frac{b m'' M}{c \rho'' M'} \right) d \Delta' - \frac{b m'' \gamma'}{c \rho'' M'} - \frac{a r d \tau}{c}.$$

Dans cette équation,

ρ' est l'ancienne expression de la distance périhélie.

Cette équation se conclut facilement de l'équation (1) du §. 60, dans laquelle on a substitué à $d R'$ & à $d R''$ leurs valeurs en $d \Delta'$.

(65.) La détermination des véritables élémens n'a plus aucune difficulté; la distance en temps de la première observation au passage par le périhélie, sera donnée par l'équation (6) du §. 44; l'inclinaison du plan de l'orbite de la Comète sur l'Écliptique, & la distance du périhélie de la Comète au nœud ascendant, comptée sur l'Écliptique, seront données par les équations (8) & (1) des §§. 48 & 49; on pourra même se passer de l'équation (1) du §. 17 pour déterminer l'angle N , que l'on fera résulter, si l'on veut, de la différence des angles v'' , v' , calculés par les équations suivantes,

$$(1) R' (1 + \cos. v') - 2 D = 0;$$

$$(2) R'' (1 + \cos. v'') - 2 D = 0.$$

On déterminera enfin la longitude du nœud ascendant de la Comète, par les équations du §. 51.

Mém. 1779.

O

(66.) Dans ces dernières recherches, pour avoir la relation entre $d\Delta'$ & $d\Delta''$, j'ai comparé la première & la seconde observation, & j'y ai appliqué l'équation (3) du §. 38; dans les premières recherches, au contraire, j'ai appliqué la même analyse à la première & à la troisième observation. J'ai cru devoir faire cette permutation. En effet, l'équation du §. 38, quoique précise dans un grand intervalle de temps, n'est pas absolument rigoureuse; si donc l'intervalle entre la première & la dernière observation, est considérable, ainsi qu'on peut le supposer dans les dernières recherches, il a été à propos d'appliquer l'équation du §. 38 à des intervalles moins considérables, c'est-à-dire à la première & à la seconde observation. Dans nos premières recherches, au contraire, comme les rapports des distances de la Comète à la Terre, exigeoient que les intervalles entre les observations ne fussent pas très-longs, & que d'ailleurs il falloit éviter, autant qu'il étoit possible, d'avoir à conclure de très-grandes quantités, par la comparaison de petits élémens, j'ai cru devoir préférer de comparer entr'elles la première & la troisième observation.

De l'influence des Erreurs des Observations sur les Résultats.

(67.) Il est possible que les observations ne soient pas rigoureusement exactes; & l'on peut demander l'influence des erreurs des observations sur les résultats. Rien n'est plus simple que ce Problème; il se résout par l'équation (1) du §. 30.

Détermination de la latitude & de la longitude géocentriques de la Comète à un instant quelconque, lorsque l'on connoît les Élémens.

(68.) La détermination de la latitude & de la longitude géocentriques de la Comète à un instant quelconque, ne présente aucune difficulté, lorsque l'on connoît les élémens. Je vais terminer ce qui regarde le calcul des Comètes dans la parabole, par l'application de mes formules à ces questions.

Nous appellerons

- R' le rayon vecteur de la Comète à l'instant dont il s'agit;
 u' l'anomalie de la Comète à cet instant;
 Δ' la distance de la Comète à la Terre;
 A' la longitude du Soleil;
 T' le rayon vecteur de la Terre;
 ζ la longitude du nœud ascendant;
 I l'inclinaison de l'orbite;
 D la distance périhélie;
 Ω la distance du périhélie de la Comète au nœud ascendant, comptée sur le plan de l'orbite de la Comète, en suivant le sens du mouvement de la Comète;
 u' l'angle du rayon vecteur de la Comète avec la ligne des nœuds; cet angle est compté sur le plan de l'orbite, en partant du nœud ascendant, & en suivant le sens du mouvement de la Comète;
 B' la longitude géocentrique de la Comète qu'il s'agit de déterminer;
 L' la latitude géocentrique;
 X le nombre de minutes écoulées depuis le passage de la Comète par son périhélie.

(69.) Il suit des constructions du §. 55, que l'on a l'équation suivante,

$$(1) R' [\cos. u' \sin. (B' - \zeta) - \sin. u' \cos. I \cos. (B' - \zeta)] + T' \sin. (B' - A') = 0;$$

mais

$$\sin. (B' - \zeta) = \sin. B' \cos. \zeta - \cos. B' \sin. \zeta;$$

$$\cos. (B' - \zeta) = \cos. B' \cos. \zeta + \sin. B' \sin. \zeta;$$

$$\sin. (B' - A') = \sin. B' \cos. A' - \cos. B' \sin. A';$$

donc

$$(2) \text{ tang. } B' = \frac{R' (\cos. u' \sin. \zeta + \sin. u' \cos. I \cos. \zeta) + T' \sin. A'}{R' (\cos. u' \cos. \zeta - \sin. u' \cos. I \sin. \zeta) + T' \cos. A'};$$

on connoîtra donc la longitude demandée, lorsque l'on aura déterminé R' & u' .

(70.) On connoîtra pareillement la latitude demandée. En effet, il suit des §§. 49 & 50, que l'on a les équations suivantes,

$$R' \sin. u' \sin. I - \Delta' \sin. L' = 0 ;$$

$$R' \sin. u' \cos. I + T' \sin. (A' - \zeta) - \Delta' \cos. L' \sin. (B' - \zeta) = 0.$$

Si dans ces équations, l'on élimine la quantité Δ' , l'on aura

$$(1) \tan. L' = \frac{R' \sin. u' \sin. I \sin. (B' - \zeta)}{R' \sin. u' \cos. I + T' \sin. (A' - \zeta)}.$$

Quant à la distance de la Comète à la Terre, on la déterminera par l'équation suivante,

$$(2) \Delta' = \frac{R' \sin. u' \sin. I}{\sin. L'}.$$

Dans l'usage de ces formules, les angles A' , B' , ζ , sont comptés depuis 0^d jusqu'à 360^d , à commencer du premier point d'*Ariès*; l'angle u' est compté sur le plan de l'orbite de la Comète, en partant du nœud ascendant, & en suivant le sens du mouvement de cet Astre; $\sin. I$ est toujours positif; mais $\cos. I$ est négatif si la Comète est rétrograde; enfin, $\tan. L'$ négative indique que la latitude de la Comète est australe.

Il ne s'agit plus maintenant que de déterminer l'angle u' & le rayon vecteur R' .

(71.) Pour déterminer maintenant l'angle u' & le rayon vecteur R' , je remarque que l'on a [§. 48, équation (9)]

$$(1) u' - \Omega - v' = 0;$$

l'on connoîtra donc u' lorsque l'on aura déterminé v' .

Nous avons vu [§. 44, équations (1) & (6)] que

$$(2) R' (1 + \cos. v') - 2 D = 0,$$

$$(3) X = (R' + 2 D) \sqrt{(R' - D) \frac{157846^{\frac{1}{2}}}{4 \cdot 1^{\frac{1}{2}}}}.$$

Au moyen de cette dernière équation, dans laquelle tout est connu, à l'exception de R' , on déterminera facilement R' , par la résolution d'une équation du troisième degré. En

effet, si l'on suppose $\sqrt{R' - D} = y$, l'équation (3) deviendra

$$(4) \ y^3 + 3Dy - \frac{4r^{\frac{1}{2}}X}{157846\frac{1}{2}} = 0.$$

L'on déterminera ensuite l'angle v' au moyen de l'équation (2), l'angle u' au moyen de l'équation (1), & les questions proposées seront résolues.

Nous remarquerons ici, que l'équation (4) conduit facilement à l'équation connue,

$$(5) \ \text{tang.}^3 \frac{v'}{2} + 3 \text{ tang.} \frac{v'}{2} - \frac{4r^{\frac{1}{2}}}{D^{\frac{1}{2}}} \frac{X}{157846\frac{1}{2}} = 0.$$

En effet, puisque $1 + \text{cof.} v' = 2 \text{ cof.}^2 \frac{v'}{2}$, l'équation (2) devient

$$(6) \ R' \text{ cof.}^2 \frac{v'}{2} - D = 0;$$

donc

$$y = \sqrt{R' - D} = D^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1 - \text{cof.}^2 \frac{v'}{2}}}{\text{cof.} \frac{v'}{2}} = \frac{D^{\frac{1}{2}} \sin. \frac{v'}{2}}{\text{cof.} \frac{v'}{2}} = D^{\frac{1}{2}} \text{ tang.} \frac{v'}{2};$$

l'équation (5) est donc démontrée.

(72.) On peut s'épargner la résolution de l'équation (5) du §. 71, au moyen de la Table connue en Astronomie, sous le nom de *Table générale du mouvement des Comètes*, & qui se trouve dans l'Astronomie de M. de la Lande, *III. Volume*, page 335. Au moyen de cette Table, on trouvera facilement l'anomalie v' d'une Comète, lorsque l'on connoîtra le temps écoulé depuis son passage par le périhélie; l'on conclura ensuite R' par le moyen de l'équation (2) du *paragraphe précédent*, & la valeur de u' au moyen de l'équation (1) du même paragraphe. On pourra même s'assurer si la Table ne renferme point quelque inexactitude, en reportant dans l'équation (5) la valeur de $\text{tang.} \frac{v'}{2}$ trouvée précédemment.

110. MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Si l'équation est satisfaite, les calculs sont exacts. Si l'équation n'est pas satisfaite; comme on ne peut manquer d'être très-près de la solution, on trouvera facilement la véritable valeur qui satisfait à la question. En effet, si l'on nomme

v l'angle conclu de la Table générale du mouvement des Comètes,
 $d.v.$ l'erreur sur l'angle exprimée en secondes de degré,

x le nombre de minutes que l'on conclut de l'équation (5) en y
 substituant la tangente de l'angle $\frac{v}{2}$ déduit de la Table
 générale du mouvement des Comètes,

X le véritable nombre de minutes écoulées depuis le passage
 par le périhélie jusqu'à l'instant pour lequel on calcule,
 on aura

$$(1) v' = v + dv,$$

dv ayant d'ailleurs pour expression,

$$(2) dv = \frac{8r^{\frac{1}{2}}}{3D^{\frac{1}{2}}} \cos^4 \frac{v}{2} \frac{(X - x)}{157846^{\frac{1}{2}}} 206265''.$$

*Sur un cas particulier où le Problème rigoureux se résout
 sans faire usage des rapports des §§. 31 & suivans,
 & sans néanmoins employer des équations d'un degré
 supérieur au quatrième.*

(73.) Je dois parler ici d'un cas singulier, lorsque duquel le
 Problème général se résout rigoureusement, sans faire usage
 des rapports des §§. 31 & suivans, & sans employer des
 équations d'un degré supérieur au quatrième; c'est celui où
 la Comète auroit été observée dans les deux nœuds. En voici
 l'analyse, d'après mes formules.

Soit

R' le rayon vecteur, lors de la première observation;

v' l'anomalie de la Comète;

A' la longitude du Soleil;

- B' la longitude géocentrique de la Comète ;
 T' le rayon vecteur de la Terre ;
 R'' le rayon vecteur, lors de la seconde observation ;
 v'' l'anomalie de la Comète ;
 A' la longitude du Soleil ;
 B'' la longitude géocentrique de la Comète ;
 T'' le rayon vecteur de la Terre ;
 ζ la longitude du nœud ascendant ;
 I l'inclinaison de l'orbite ;
 t le nombre de minutes écoulées entre les deux observations ;
 D la distance périhélie ;
 r la distance moyenne du Soleil à la Terre.

Il suit de nos recherches, que l'on a les équations suivantes,

- (1) $R'(1 + \cos. v') - 2D = 0$,
 (2) $R''(1 + \cos. v'') - 2D = 0$,
 (3) $t = [(R'' + 2D)\sqrt{(R'' - D)} + (R' + 2D)\sqrt{(R' - D)}] \frac{157846^{\frac{1}{2}}}{4r^{\frac{1}{2}}}$,
 (4) $\pm R' \sin. (B' - \zeta) + T' \sin. (B' - A') = 0$,
 (5) $\mp R'' \sin. (B'' - \zeta) + T'' \sin. (B'' - A'') = 0$.

Dans l'équation (3) j'ai mis le signe *plus*, parce que dans l'intervalle des deux observations, la Comète a essentiellement passé par le périhélie. Quant aux équations (4) & (5), elles ne sont autre chose que des équations semblables à l'équation (1) du §. 55 ; en observant toutefois, que dans ces équations, la condition des observations faites dans les nœuds, a nécessité celle de $\sin. u = 0$, & celle de $\cos. u = \pm 1$; c'est-à-dire $\cos. u = 1$ pour l'une des observations, celle qui a eu lieu dans le nœud ascendant, & $\cos. u = -1$ pour l'observation qui a eu lieu dans le nœud descendant. Au reste, on ne peut jamais être embarrassé sur le choix des signes, car l'on sait toujours laquelle de la première ou de la seconde observation a été faite dans le nœud ascendant.

112 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

(74.) Je reprends les équations (1) & (2) du §. 73, & je remarque, qu'attendu que les anomalies de la Comète diffèrent de 180 degrés lors des deux observations, l'on a $\cos. v'' = - \cos. v'$; donc

$$(1) R' - R'' + (R' + R'') \cos. v' = 0.$$

Je substitue cette valeur de $\cos. v'$ dans l'équation (1) du §. 73, & j'en tire

$$(2) D = \frac{R' R''}{R' + R''}.$$

Je substitue cette valeur de D dans l'équation (3) du §. 73, &, à cause de

$$(R' + 2D) \sqrt{(R' - D)} = \frac{R'^3 + 3 R' R''}{(R' + R'')^{\frac{1}{2}}},$$

$$(R'' + 2D) \sqrt{(R'' - D)} = \frac{R''^3 + 3 R'' R'}{(R' + R'')^{\frac{1}{2}}}.$$

& par conséquent de

$$(R' + 2D) \sqrt{(R' - D)} + (R'' + 2D) \sqrt{(R'' - D)} = (R' + R'')^{\frac{3}{2}},$$

$$\text{j'ai } R' + R'' = r \left(\frac{4'}{157846'} \right)^{\frac{1}{2}};$$

donc si l'on suppose

$$M = r \left(\frac{4'}{157846'} \right)^{\frac{1}{2}},$$

l'on aura

$$(3) R' + R'' - M = 0.$$

(75.) Je reprends les équations (4) & (5) du §. 73, & j'en tire

$$R' = \pm \frac{T' \sin. (B' - A')}{\sin. (B' - \zeta)}, \quad R'' = \pm \frac{T'' \sin. (B'' - A'')}{\sin. (B'' - \zeta)};$$

donc

$$(1) R' + R'' = \mp \frac{T' \sin. (B' - A')}{\sin. (B' - \zeta)} \pm \frac{T'' \sin. (B'' - A'')}{\sin. (B'' - \zeta)};$$

donc enfin

$$(2) M \sin. (B' - \zeta) \sin. (B'' - \zeta) \pm T' \sin. (B' - A') \sin. (B'' - \zeta) \mp T'' \sin. (B'' - A'') \sin. (B' - \zeta) = 0.$$

Soit

Soit maintenant

b la différence des angles B'' , B' , de sorte que l'on ait $B'' = B' + b$;

l'équation (2) deviendra

$$(3) M \sin. (B' - \zeta) \sin. (B' - \zeta + b) \pm T' \sin. (B' - A') \sin. (B' - \zeta + b) \\ \mp T'' \sin. (B'' - A'') \sin. (B' - \zeta) = 0.$$

Mais

$$\sin. (B' - \zeta + b) = \sin. (B' - \zeta) \cos. b + \cos. (B' - \zeta) \sin. b;$$

donc enfin, en divisant l'équation par $\sin. (B' - \zeta)$,

$$(4) M [\sin. (B' - \zeta) \cos. b + \cos. (B' - \zeta) \sin. b] \\ \pm T' \sin. (B' - A') \sin. b \cotangente (B' - \zeta) \\ \pm T' \sin. (B' - A') \cos. b \mp T'' \sin. (B'' - A'') = 0;$$

équation qui donnera la position du nœud. Lorsque cette position sera déterminée, on connoîtra facilement les rayons vecteurs correspondans aux observations, & en général tous les élémens de la Comète, à l'exception toutefois de l'inclinaison de l'orbite, qui ne pourra être déterminée que par une troisième observation. Dans les équations précédentes, la première suite de signes suppose que lors de la première observation, la Comète étoit dans son nœud ascendant; il faudroit employer la seconde suite si l'on étoit dans le cas contraire.

(76.) L'équation (4) du §. 75 paroît promettre quatre valeurs différentes, qui peuvent satisfaire au Problème, puisque cette équation est du quatrième degré; on pourroit donc penser, au premier coup-d'œil, que l'on a quatre paraboles; mais cette conclusion seroit précipitée. En effet, je vais faire voir que deux des valeurs données par l'équation (4) du §. 75 n'appartiennent point à la question, & que par conséquent, il n'y a que deux paraboles qui satisfassent aux deux premières observations.

Mém. 1779.

P.

Fig. 4. Pour y parvenir, soit Nn la ligne des nœuds; S le Soleil; N le lieu de la Comète, lors de la première observation; n le lieu de la Comète, lors de la seconde observation; T le lieu de la Terre, lors de la première observation; T' le lieu de la Terre, lors de la seconde observation; TN la direction du rayon visuel, dans lequel la Comète est vue, lors de la première observation; $T'n$ la direction du rayon visuel, lors de la seconde observation.

Il est évident, que d'après cette construction, $SN = R'$, $Sn = R''$, & que $SN + Sn$ est une quantité connue; il est également évident, que si l'on supposoit un Observateur immobile placé au point t , intersection des lignes TN , $T'n$, cet Observateur rapporteroit la Comète aux mêmes points du Ciel, lors des deux observations, que l'Observateur placé sur la Terre, & qui a passé de T en T' ; on sent également, qu'il est facile de déduire des observations, la position du point t , intersection des deux rayons visuels, & l'angle Ntn de ces rayons. Le Problème se réduit donc à l'énoncé suivant.

Étant donnée sur un plan, la position d'un point t , par rapport à un point S pris sur le même plan, & l'angle Ntn formé au point t par deux droites indéfinies tN , tn ; déterminer quelle doit être la position des lignes NSn , $N'Sn'$, passant par le point S , pour que les droites Nn , Nn' , comprises dans l'angle Ntn , soient égales à une quantité donnée!

Or il est aisé de démontrer qu'il n'y a que deux lignes qui satisfassent à la question; il n'y a donc que deux paraboles qui puissent convenir aux deux premières observations, & il faudra une troisième observation pour déterminer celle des deux paraboles qu'il conviendra de choisir, ainsi que l'inclinaison du plan de l'orbite.

(77.) Il reste maintenant à faire voir quel Problème se trouve résolu par les autres racines de l'équation (4) du § 75. Cette difficulté s'éclaircit facilement par les considérations du paragraphe précédent. En effet, nous avons

demandé à la Géométrie quelle devoit être la position des Fig. 4.
lignes NSn , $N'Sn'$, passant par le point S , & terminées
par les droites indéfinies $T'tn$, TtN , pour que la partie
 Nn , $N'n'$, &c, de ces droites, interceptée entre les droites
 $T'tn$, TtN , fût égale à une quantité donnée? La Géométrie
a donc dû donner la solution du Problème, soit que les
parties Nn , $N'n'$ fussent comprises dans l'angle Ntn , soit
qu'elles fussent comprises dans l'angle NtT' , ou dans l'angle
 ntT . La Géométrie résout donc tous les cas, quoique l'Astro-
nomie restreigne la question au cas particulier où les parties
 Nn , $N'n'$ sont comprises dans l'angle Ntn ; au reste, on ne
peut jamais être embarrassé sur le choix de ces valeurs.
En effet, nous avons vu (§§. 74 & 75) que si l'on suppose

$$M = r \left(\frac{4}{157846' + 1} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ l'on a } R' + R'' - M = 0; \text{ que}$$

$$\text{de plus, } R' = \pm \frac{T' \sin.(B' - A')}{\sin.(B' - \zeta)}, R'' = \pm \frac{T'' \sin.(B'' - A'')}{\sin.(B'' - \zeta)}.$$

Les valeurs de ζ qui satisfont au Problème astronomique,
sont donc celles qui, substituées dans les expressions corré-
latives R' & de R'' , donnent $R' + R'' = M$.

SECONDE PARTIE,

*Dans laquelle l'on ne suppose pas que les orbites
des Comètes sont paraboliques.*

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

(78.) On peut étendre les principes développés dans ce
Mémoire, au cas où l'on ne supposeroit pas que les orbites
des Comètes sont paraboliques; on verra que, sans compli-
quer infiniment le calcul, il est aisé d'appliquer aux
observations, le calcul dans l'ellipse, & de chercher par-là
à concilier des observations qui ne s'accorderoient pas dans
l'hypothèse parabolique. Avant de passer au développement
de la méthode, je commencerai par établir quelques propo-
sitions, dont je ferai usage par la suite.

Équation polaire à l'ellipse par rapport au foyer.

(79.) Soit

- Fig. 5. β le demi-grand axe AC d'une ellipse;
 F le foyer que je prends pour le pôle de l'ellipse;
 C le centre;
 E la distance FC du foyer au centre de l'ellipse;
 $4D$ le paramètre du grand axe;
 R le rayon vecteur FM ;
 ν l'angle du rayon vecteur avec le grand axe; le point A correspondant à l'apside inférieure est l'origine de l'angle.

Si l'on prend une troisième proportionnelle CD à FC & AC , cette troisième proportionnelle, qui aura pour expression $\frac{\beta^2}{E}$, sera la distance DC de la directrice DE au centre C de l'ellipse. Par la propriété de l'ellipse, si d'un point M de la courbe l'on abaisse sur la ligne DE la perpendiculaire MH , on a toujours cette proportion, $MH:FM::AD:AF$. Si du même point M l'on abaisse sur AF la perpendiculaire MN , on aura, en vertu des constructions précédentes, $FN = R \cos. \nu$; d'ailleurs, $AF = AC - FC = \beta - E$; $AD = DC - AC = \frac{\beta^2}{E} - \beta$; mais $MH = AF + AD - FN$; donc $MH = \beta - E + \frac{\beta^2}{E} - \beta - R \cos. \nu = \frac{\beta^2 - E^2 - ER \cos. \nu}{E}$; donc la proportion $MH:FM::AD:AF$, donne $R(E \cos. \nu + \beta) - (\beta^2 - E^2) = 0$; mais $\frac{\beta^2 - E^2}{\beta} = 2D$, puisque, par la propriété de l'ellipse, $\sqrt{\beta^2 - E^2} =$ demi-petit axe, & que $4D$ est le paramètre du grand axe; on aura donc

$$(1) R(1 + \frac{E}{\beta} \cos. \nu) - 2D = 0.$$

(80.) Si l'on cherche pareillement la distance FA du

foyer à l'apside inférieure, on aura, en vertu des constructions Fig. 5. précédentes,

$$(1) FA = \frac{2D}{1 + \frac{E}{\beta}},$$

puisque en effet FA est le rayon vecteur qui répond à $\cos. v = 1$.

De l'équation polaire aux sections coniques par rapport au foyer.

(81.) Si l'on cherche l'équation polaire à l'hyperbole par rapport au foyer, on trouvera les mêmes équations que pour l'ellipse; on aura donc généralement

$$(1) R(1 + \frac{E}{\beta} \cos. v) - 2D = 0,$$

$$(2) FA = \frac{2\beta D}{\beta + E},$$

bien entendu que dans le cas de l'ellipse, β surpasse E ; dans le cas de la parabole, $\beta = E$; dans le cas de l'hyperbole, β est moindre que E .

Du temps que les Comètes emploient à décrire leurs trajectoires.

(82.) On fait que dans toute trajectoire décrite en vertu d'une force centrale, les aires parcourues par le rayon vecteur sont proportionnelles au temps employé à parcourir ces aires. Donc dans toute courbe, si l'on nomme

R le rayon vecteur,

v l'angle traversé,

X le temps que nous supposons exprimé en minutes,

X sera proportionnel à $\int \frac{R^2 dv}{1}$, puisque cette dernière expression est celle de l'aire parcourue.

118 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

On démontre de plus, que si l'on nomme

ρ un coefficient constant qu'il s'agira de déterminer,

D le paramètre de la trajectoire de la Planète attirée,

on aura, dans le cas de la force centrale en raison inverse du carré des distances,

$$(1) \rho X = \frac{1}{\sqrt{D}} \int \frac{R^2 dv}{2};$$

on connoîtra donc le nombre de minutes de temps employées par la Comète à parcourir les différentes anomalies, lorsque l'on aura l'intégrale de $\frac{R^2 dv}{2}$, & que l'on connoîtra ρ .

(83.) Reprenons l'équation générale aux sections coniques, on aura, en différenciant cette équation,

$$(1) \frac{2 D dR}{R} - \frac{E}{\beta} R \sin. v dv = 0.$$

De plus, à cause de l'équation (1) §. 81, & que d'ailleurs (§. 79) $\beta^2 - E^2 - 2\beta D = 0$, on aura

$$(2) \frac{E}{\beta} R \sin. v = 2 \sqrt{D \left(R - D - \frac{R^2}{2\beta} \right)};$$

donc
$$dv = \frac{D dR}{R \sqrt{D \left(R - D - \frac{R^2}{2\beta} \right)}}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (1) du §. 82, elle deviendra

$$(3) \rho X = \int \frac{R dR}{2 \sqrt{R - D - \frac{R^2}{2\beta}}};$$

donc, en intégrant,

$$(4) \rho X = \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \arcsin. \left[\frac{R - \beta}{\sqrt{\beta^2 - 2\beta D}} \right] - \beta \sqrt{R - D - \frac{R^2}{2\beta}} + \text{constante}.$$

Mais puisque $\beta^2 - E^2 - 2\beta D = 0$, $\sqrt{\beta^2 - 2\beta D} = E$; donc enfin

$$(5) \rho X = \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \arcsin. \left(\frac{R - \beta}{E} \right) - \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \sqrt{2\beta R - 2\beta D - R^2} + \text{constante}.$$

Il ne s'agit que d'ajouter convenablement la constante.

(84.) Pour ajouter convenablement la constante, je remarque que si l'on veut que le temps X soit compté depuis le passage de la Comète par le périhélie, ce temps doit être nul lorsque le rayon vecteur est égal à la distance du foyer à l'apside inférieure, c'est-à-dire, lorsque $R = \beta - E$; mais si dans l'équation (5) du *paragraphe précédent* l'on substitue $\beta - E$ à R , & que l'on suppose $X = 0$, l'on aura, à cause de $R = \beta - E$, & de $\beta^2 - 2\beta D - E^2 = 0$,

$$\frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \frac{\text{arc}(\sin. - 1)}{\sin. \text{ total}} + \text{const.} = 0; \text{ donc const.} = -\frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \frac{\text{arc } 270^d}{\sin. \text{ total}}$$

donc

$$(1) \rho X = \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\text{arc} \sin. \left[\left(\frac{R - \beta}{E} \right) / \sin. \text{ total} \right] - \text{arc } 270^d}{\sin. \text{ total}} \right\} - \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \sqrt{(2\beta R - 2\beta D - R^2)}.$$

Je remarque enfin, que si l'on nomme

un arc dont le sinus égale $\frac{R - \beta}{E} \times \sin. \text{ total}$, & qui ait par conséquent pour expression de son cosinus, $\frac{\sqrt{(2\beta R - 2\beta D - R^2)}}{E} \times \sin. \text{ total}$,

l'équation précédente deviendra

$$(2) \rho X = \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \left(\frac{\text{arc } \xi - \text{arc } 270^d}{\sin. \text{ total}} \right) - \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \frac{E \cos. \xi}{\sin. \text{ total}}.$$

(85.) Arrêtons-nous un moment sur l'usage de cette dernière équation, & suivons une Comète pendant une révolution.

Lors du périhélie, $R = \beta - E$; $\sin. \xi = -1$; $\xi = 270^d$, $\cos. \xi = 0$.

Depuis le périhélie jusqu'à l'extrémité du petit axe, l'arc ξ doit être compris entre 270^d & 360^d , son cosinus est positif.

A l'extrémité du petit axe, $R = \beta$; l'arc $\xi = 360^\circ$; son cosinus = sin. total.

Depuis l'extrémité du petit axe jusqu'à l'aphélie, l'arc ξ est compris entre 360° & $360^\circ + 90^\circ$; son cosinus est positif.

Lors de l'aphélie, l'arc ξ est de $360^\circ + 90^\circ$; son cosinus = 0.

Depuis l'extrémité du grand axe jusqu'à l'extrémité du petit axe dans la seconde branche de la trajectoire, l'arc ξ est compris entre $360^\circ + 90^\circ$ & $360^\circ + 180^\circ$; son cosinus est négatif.

A l'extrémité du petit axe, l'arc ξ est de $360^\circ + 180^\circ$; son cosinus = — sin. total.

Depuis l'extrémité du petit axe jusqu'au périhélie, l'arc ξ est compris entre $360^\circ + 180^\circ$ & $360^\circ + 270^\circ$; son cosinus est négatif.

Détermination du coefficient ρ .

(86.) Les recherches précédentes fournissent un moyen facile d'évaluer la quantité ρ . En effet, appliquons l'équation (2) du §. 84 à la Terre; & nommons

r le demi-grand axe de l'orbite terrestre.

Il est évident que si l'on suppose que la Terre ait fait une révolution entière depuis son périhélie, l'on aura

$\rho X = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \frac{\text{arc } 360^\circ}{\text{sin. total}}$; mais la révolution sidérale de la Terre est de $365^{\text{h}} 6^{\text{m}} 9^{\text{s}} 11''$, ou de $525969\frac{1}{6}$; donc

$$(1) \rho = \frac{2 \times 355}{113 \times 525969\frac{1}{6} \sqrt{2}} r^{\frac{3}{2}}.$$

Si l'on substitue cette valeur dans l'équation (2) du §. 84, elle deviendra

$$(2) rX = \frac{113 \times 525969\frac{1}{6}}{2 \times 355} \left[\frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\text{arc } \xi - \text{arc } 270^\circ}{\text{sin. total}} \right) - \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} E \frac{\text{cos. } \xi}{\text{sin. total}} \right].$$

Au

(87.) Au moyen de la valeur de ρ du §. 86, combinée avec l'équation (1) du §. 82, on peut facilement déterminer le temps qu'une Comète dont la distance périhélie est égale à la moyenne distance du Soleil à la Terre, emploie à parcourir 90 degrés d'anomalie. Nous avons dit (§. 7) que ce temps égale $109^j 14^h 46' \frac{1}{3}$, ou $157846' \frac{1}{3}$; en voici la démonstration.

Si l'on substitue dans l'équation (1) du §. 82, la valeur de ρ du *paragraphe précédent*, elle deviendra

$$(1) \frac{2 \times 355 \times r^{\frac{1}{2}}}{113 \times 525969' \frac{1}{3} \sqrt{2}} X = \frac{1}{\sqrt{D}} \int \frac{R^2 d\theta}{2}.$$

Nous avons vu (§. 5) que, relativement à la parabole,

$$\int \frac{R^2 d\theta}{2} = \frac{1}{3} D^{\frac{1}{2}} (R + 2D) \sqrt{(R - D)};$$

l'équation (1) devient donc

$$(2) \frac{2 \times 355 \times r^{\frac{1}{2}}}{113 \times 525969' \frac{1}{3} \sqrt{2}} X = \frac{1}{3} (R + 2D) \sqrt{(R - D)}.$$

Si donc l'on suppose $D = r$, $R = 2r$, puisque, par l'hypothèse, la distance périhélie est égale à la moyenne distance du Soleil à la Terre, & que d'ailleurs le rayon vecteur est double de la distance périhélie, lorsque l'anomalie est de 90 degrés; l'on aura, pour expression du temps employé par la Comète à parcourir 90 degrés d'anomalie,

$$X = \frac{2 \sqrt{2} \times 113 \times 525969' \frac{1}{3}}{3 \times 355} = 157846' \frac{1}{3}.$$

De la relation entre l'anomalie moyenne & l'anomalie vraie.

(88.) L'équation (2) du §. 86, peut servir à convertir l'anomalie vraie en anomalie moyenne, & réciproquement; ou si l'on veut, étant donné l'angle ν du rayon vecteur avec le grand axe, compté depuis le périhélie, elle peut faire connoître le temps écoulé depuis le passage de la Planète par le périhélie; & réciproquement. En effet, à cause de l'équation

$$(1) R \left(1 + \frac{E}{\beta} \cos. \nu\right) - 2D = 0;$$

Mém. 1779,

Q

étant donné l'angle ν on conclura tout de suite la valeur de R ; & par conséquent la valeur de l'arc ξ , au moyen de l'équation

$$(2) \sin. \xi = \frac{R - \beta}{E} \sin. \text{total.}$$

On connoitra donc le temps écoulé depuis le périhélie, au moyen de l'équation (2) du §. 86.

Si au contraire le temps étoit donné, il faudroit conclure d'abord l'arc ξ , au moyen de l'équation (2) du §. 86, qui à la vérité est transcendante, mais qui le résout facilement par les Tables des sinus. On concluroit ensuite la valeur de R par l'équation (2) du présent paragraphe; & enfin l'angle ν du rayon vecteur avec le grand axe, compté depuis le périhélie, par l'équation (1) du même paragraphe.

Du temps employé par la Comète à parcourir les différens arcs de sa trajectoire.

(89.) Il est facile maintenant de connoître le temps employé par la Comète à parcourir les différens arcs de la trajectoire. Soit en effet

R' le rayon vecteur correspondant au commencement de l'arc;

R'' le rayon vecteur correspondant à la fin de l'arc;

ξ' l'arc dont le sinus $= \frac{R' - \beta}{E} \sin. \text{total.}$, & dont le

$$\cos. = \frac{\sqrt{(2\beta R' - 2\beta D - R'^2)} \sin. \text{total.}}{E};$$

ξ'' l'arc dont le sinus $= \frac{R'' - \beta}{E} \sin. \text{total.}$, & dont le

$$\cos. = \frac{\sqrt{(2\beta R'' - 2\beta D - R''^2)} \sin. \text{total.}}{E};$$

t le nombre de minutes de temps employées à parcourir l'arc de la trajectoire, compris entre les rayons vecteurs R'', R' ;

l'on aura évidemment

$$(1) t = \frac{113 \times 525969^{\frac{1}{2}}}{2 \times 355} \left[\frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\text{arc } \xi'' - \text{arc } \xi'}{\sin. \text{total.}} \right) - \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} E \left(\frac{\cos. \xi'' - \cos. \xi'}{\sin. \text{total.}} \right) \right]$$

Dans l'usage de cette formule, l'arc ξ'' doit être toujours plus grand que l'arc ξ' . Il faut d'ailleurs appliquer à chacun de ces arcs les remarques du §. 85.

De la relation entre la différentielle du temps écoulé entre deux observations & les variations des élémens de l'ellipse.

(90.) Il peut être intéressant de connoître la relation entre la différentielle du temps écoulé entre deux observations & les variations des élémens de l'ellipse. Pour résoudre cette question, je nommerai

dt la différentielle du temps;

dR' , dR'' , dD , $d\beta$, les variations des rayons vecteurs & des élémens de la trajectoire elliptique.

Je remarque d'abord, qu'à cause de $\beta^2 - 2\beta D - E^2 = 0$, l'on a $(\beta - D)d\beta - \beta dD - E dE = 0$. J'observe ensuite que si l'on différencie l'équation (1) du §. 89, l'on aura

$$(1) r dt = \frac{1132535969^{\frac{1}{2}}}{2 \times 355} \left\{ \left[\frac{1}{2} \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} (\text{arc } \xi'' - \text{arc } \xi') - \frac{E}{\beta^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}}} (\text{cof. } \xi'' - \text{cof. } \xi') \right] d\beta \right. \\ \left. + \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} (d \text{arc } \xi'' - d \text{arc } \xi') - \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} (d E \text{ cof. } \xi'' - d E \text{ cof. } \xi') \right\}.$$

Mais

$$\begin{aligned} d E \text{ cof. } \xi' &= \frac{(R' - D)}{E \text{ cof. } \xi'} d\beta + \frac{(R - R')}{E \text{ cof. } \xi'} dR' - \frac{\beta dD}{E \text{ cof. } \xi'}; \\ d E \text{ cof. } \xi'' &= \frac{(R'' - D)}{E \text{ cof. } \xi''} d\beta + \frac{(\beta - R'')}{E \text{ cof. } \xi''} dR'' - \frac{\beta dD}{E \text{ cof. } \xi''}; \\ d \text{arc } \xi' &= \frac{dR'}{E \text{ cof. } \xi'} + \frac{[R'D - \beta(R' - D)]}{E^3 \text{ cof. } \xi'} d\beta + \frac{(R' - \beta)\beta}{E^3 \text{ cof. } \xi'} dD; \\ d \text{arc } \xi'' &= \frac{dR''}{E \text{ cof. } \xi''} + \frac{[R''D - \beta(R'' - D)]}{E^3 \text{ cof. } \xi''} d\beta + \frac{(R'' - \beta)\beta}{E^3 \text{ cof. } \xi''} dD. \end{aligned}$$

Q ij

Soit donc

$$\begin{aligned} a' &= - \frac{113 \times 525969' \frac{1}{2}}{2 \times 355} \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \frac{R'}{E \cos. \xi'}; \\ a'' &= + \frac{113 \times 525969' \frac{1}{2}}{2 \times 355} \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \frac{R''}{E \cos. \xi''}; \\ b &= + \frac{113 \times 525969' \frac{1}{2}}{2 \times 355} \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \times \frac{\beta^2}{E^2} \left[\frac{(R'' - 2D)}{\cos. \xi''} - \frac{(R' - 2D)}{\cos. \xi'} \right]; \\ c &= + \frac{113 \times 525969' \frac{1}{2}}{2 \times 355} \left\{ \left[\frac{1}{2} \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} (\text{arc } \xi'' - \text{arc } \xi') - \frac{1}{2} \frac{E}{\beta^{\frac{1}{2}} r^{\frac{1}{2}}} (\cos. \xi'' - \cos. \xi') \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{(3R'' + 2\beta - 2D)D - 2\beta R''}{E^2 \cos. \xi''} - \frac{(3R' + 2\beta - 2D)D - 2\beta R'}{E^2 \cos. \xi'} \right] \right\} \end{aligned}$$

l'on aura

$$(2) \quad a'dR' + a''dR'' + b dD + c d\beta - r dt = 0.$$

Il faut appliquer à cette formule les remarques du §. 85.

Remarque sur un usage de l'équation (1) du §. 89, lorsque la trajectoire de la Comète est très-alongée.

(91). Je ne puis m'empêcher de présenter une remarque sur un usage de l'équation du §. 89, lorsque le grand axe de l'orbite de la Comète est très-grand, & que par conséquent la trajectoire diffère peu de la parabole dans la portion que l'on calcule. Dans ce cas, cette équation donne d'une manière approchée la valeur du grand axe de la section, lorsque l'on emploie des Observations faites de part & d'autre du périhélie. En effet, reprenons l'équation, & supposons $E = \beta$, ce qui est sensiblement vrai, nous aurons

$$(1) \quad c = \frac{113 \times 525969' \frac{1}{2}}{2 \times 355} \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\text{arc } \xi'' - \text{arc } \xi' - \cos. \xi'' + \cos. \xi'}{\sin. \text{ total}} \right).$$

Si l'on différencie cette équation, l'on aura

$$(2) dt = \frac{113 \times 525969^{\frac{1}{2}}}{2 \times 355} \left[\frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\text{arc } \xi'' - \text{arc } \xi' - \text{cof. } \xi'' + \text{cof. } \xi'}{\text{fin. total}} \right) d\beta \right. \\ \left. + \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{d \text{arc } \xi'' - d \text{arc } \xi' + \frac{\text{fin. } \xi'' d \text{arc } \xi'' - \text{fin. } \xi' d \text{arc } \xi'}{\text{fin. total}} \right) \right];$$

Mais dans la supposition que nous calculons, les arcs ξ' , ξ'' diffèrent peu de 270° ; bien entendu (S. 85) que ξ' est un peu moindre que 270° , & que ξ'' est un peu plus grand que 270° . Or, dans ces deux cas, les cosinus de ξ' & de ξ'' ont un signe différent, & les sinus de ξ' & de ξ'' au contraire sont tous deux négatifs & très-près d'être égaux au sinus total. Donc la variation de t , due à la variation des arcs ξ' , ξ'' , se détruit, pour ainsi dire, ou du moins est infiniment petite par rapport à celle qui résulte de la variation du grand axe β . L'équation (1) est donc presque indépendante des valeurs des arcs ξ' , ξ'' ; cette équation est donc propre à faire connoître d'une manière approchée la valeur du grand axe de la section.

(92.) La solution précédente suppose que les observations que l'on compare, ont été faites de part & d'autre du périhélie; & l'analyse seroit moins concluante, si les observations avoient été faites du même côté du périhélie. Voici maintenant une équation que l'on peut employer dans ce dernier cas, & qui ne réussiroit pas dans le premier, attendu que la constante que l'on seroit alors obligé d'ajouter, feroit reparaître le grand axe de la section sous une forme embarrassante.

Je remarque, d'après l'analyse du S. 83, que l'équation (1) du S. 89, peut être mise sous la forme suivante,

$$(1) dt = \int \frac{R'' dR''}{2 \sqrt{(R'' - D - \frac{R''^2}{2\beta})}} - \int \frac{R' dR'}{2 \sqrt{(R' - D - \frac{R'^2}{2\beta})}}.$$

Les orbites des Comètes étant des ellipses très-alongées, la fraction $\frac{1}{\beta}$ est nécessairement très-petite; on peut donc

négliger son carré & ses puissances supérieures. Si l'on développe l'équation (1), d'après ces principes, l'on aura

$$(2) \rho t = \int \frac{R'' d R''}{2 \sqrt{(R'' - D)}} - \frac{1}{8\beta} \int \frac{R''^3 d R''}{(R'' - D)^{\frac{3}{2}}} - \int \frac{R' d R'}{2 \sqrt{(R' - D)}} \\ + \frac{1}{8\beta} \int \frac{R'^3 d R'}{(R' - D)^{\frac{3}{2}}};$$

donc, en intégrant,

$$(3) \rho t = \frac{(R'' - D)^{\frac{1}{2}} (R'' + 2D)}{3} - \frac{(R' - D)^{\frac{1}{2}} (R' + 2D)}{3} \\ + \frac{1}{8\beta} \left[\frac{\frac{1}{3}(R' - D)^3 + 2D(R' - D)^2 + 6D^2(R' - D) - 2D^3}{\sqrt{(R' - D)}} \right] \\ - \frac{1}{8\beta} \left[\frac{\frac{1}{3}(R'' - D)^3 + 2D(R'' - D)^2 + 6D^2(R'' - D) - 2D^3}{\sqrt{(R'' - D)}} \right],$$

& il n'y a point de constante à ajouter dans le cas que nous considérons, puisque $t = 0$ lorsque $R'' = R'$. Supposons donc, qu'en substituant pour D, R', R'' , leurs valeurs tirées d'une parabole très-approchée, & qu'en faisant $\frac{1}{\beta} = 0$, l'équation précédente ne soit pas exactement satisfaite, de sorte que l'on ait, par exemple,

$$(4) \frac{(R'' - D)^{\frac{1}{2}} (R'' + 2D)}{3} - \frac{(R' - D)^{\frac{1}{2}} (R' + 2D)}{3} = \rho \tau,$$

l'on substituera cette valeur dans l'équation (3), & elle deviendra

$$(5) \rho(t - \tau) - \frac{1}{8\beta} \left[\frac{\frac{1}{3}(R' - D)^3 + 2D(R' - D)^2 + 6D^2(R' - D) - 2D^3}{\sqrt{(R' - D)}} \right] \\ + \frac{1}{8\beta} \left[\frac{\frac{1}{3}(R'' - D)^3 + 2D(R'' - D)^2 + 6D^2(R'' - D) - 2D^3}{\sqrt{(R'' - D)}} \right] = 0,$$

ce qui donnera une approximation de la valeur de β .

De l'expression de la corde dans la trajectoire elliptique.

(93.) Nous avons donné (S. 18) l'expression de la corde de la parabole comprise entre deux rayons vecteurs

R', R'' , en valeurs de ces rayons vecteurs & de la distance périhélie; nous devons maintenant faire voir ce que devient cette expression dans le cas de l'orbite elliptique.

Pour y parvenir, nommons

R', R'' , les rayons vecteurs qui comprennent la corde dont il s'agit,

N l'angle compris entre ces rayons vecteurs,

v', v'' , les anomalies correspondantes aux rayons vecteurs R', R'' ,

c la corde,

ξ l'arc dont le sinus $= \frac{R' - \beta}{E}$ sinus total, & dont le

$$\text{cosinus} = \frac{\sqrt{(2\beta R' - 2\beta D - R'^2)}}{E} \text{ sin. total,}$$

ξ'' l'arc dont le sinus $= \frac{R'' - \beta}{E}$ sinus total, & dont le

$$\text{cosinus} = \frac{\sqrt{(2\beta R'' - 2\beta D - R''^2)}}{E} \text{ sin. total.}$$

Je remarque d'abord (S. 10) que l'on a

$$(1) c^2 = R'^2 + R''^2 - 2 R' R'' \cos. N.$$

De plus,

$$(2) N = v'' - v';$$

donc

$$R' R'' \cos. N = R' R'' \cos. v'' \cos. v' + R' R'' \sin. v'' \sin. v'.$$

Mais, en vertu de l'équation générale aux sections coniques (S. 81) & de l'équation (2) du S. 83,

$$R' R'' \cos. v'' \cos. v' = \frac{\beta^2}{E^2} [4 D^2 - 2 D (R' + R'') + R' R''];$$

$$R' R'' \sin. v' \sin. v'' = \frac{2 \beta D}{E^2} \sqrt{(2 \beta R' - 2 \beta D - R'^2)}$$

$$\sqrt{(2 \beta R'' - 2 \beta D - R''^2)} = 2 \beta D \frac{\cos. \xi' \cos. \xi''}{\sin.^2 \text{ total}}; \text{ donc}$$

$$(3) c^2 = R'^2 + R''^2 - \frac{2 \beta^2}{E^2} [4 D^2 - 2 D (R' + R'') + R' R''] - 4 \beta D \frac{\cos. \xi' \cos. \xi''}{\sin.^2 \text{ total}}.$$

Si l'on compare cette valeur de c^2 avec celle du S. 15, que l'on conserve toutes les définitions de T', T'', A', A'' ,

$\Delta', \Delta'', L', L'', B', B''$, du même paragraphe, que l'on continue de supposer le sinus total $= 1$, on aura la relation suivante entre les élémens de l'ellipse, & les observations prises deux à deux,

$$(4) \frac{\beta^2}{E^2} [4 D^2 - 2 D (R' + R'') + R' R''] + 2 \beta D \cos. \xi' \cos. \xi'' \\ - T' T'' \cos. (A'' - A') + T' \Delta'' \cos. L'' \cos. (B'' - A') \\ + T'' \Delta' \cos. L' \cos. (B' - A'') - \Delta' \Delta'' [\cos. L' \cos. L'' \\ \cos. (B'' - B') + \sin. L' \sin. L''] = 0.$$

Dans ces formules, l'on doit appliquer aux arcs ξ', ξ'' & aux signes de leurs cosinus, les remarques du §. 85.

(94.) Je remarque d'abord que l'équation (4) du paragraphe précédent peut être mise sous la forme suivante,

$$(1) \frac{\beta^2}{E^2} [4 D^2 - 2 D (R' + R'') + R' R'' + \frac{2 D}{\beta} E^2 \cos. \xi' \cos. \xi''] \\ - T' T'' \cos. (A'' - A') + T' \Delta'' \cos. (B'' - A') \\ + T'' \Delta' \cos. L' \cos. (B' - A'') - \Delta' \Delta'' [\cos. L' \cos. L'' \\ \cos. (B'' - B') + \sin. L' \sin. L''] = 0.$$

De plus, si l'on suppose, comme dans le §. 39,

$$m' = \Delta' - T' \cos. L' \cos. (B' - A'), \\ m'' = \Delta'' - T'' \cos. L'' \cos. (B'' - A''),$$

l'on a $R' d R' - m' d \Delta' = 0$; $R'' d R'' - m'' d \Delta'' = 0$. Enfin, à cause de $\beta^2 - 2 \beta D - E^2 = 0$, & de $(\beta - D) d \beta - \beta d D - E d E = 0$, l'on a

$$d \frac{\beta^2}{E^2} = \frac{2 \beta^2}{E^2} d D - \frac{2 \beta^2 D}{E^2} d \beta;$$

d'ailleurs

$$d E \cos. \xi' = \frac{(R' - D) d \beta}{E \cos. \xi'} + \frac{(\beta - R') d R'}{E \cos. \xi'} - \frac{\beta d D}{E \cos. \xi'}; \\ d E \cos. \xi'' = \frac{(R'' - D) d \beta}{E \cos. \xi''} + \frac{(\beta - R'') d R''}{E \cos. \xi''} - \frac{\beta d D}{E \cos. \xi''}.$$

Si

Si donc l'on suppose

$$f = + \frac{\beta^2}{E^2} \left[R'' - 2D + \frac{2D}{\beta} (\beta - R') \frac{\text{cof. } \xi''}{\text{cof. } \xi'} \right] \\ + \frac{R'}{m'} \{ T'' \text{ cof. } L' \text{ cof. } (B' - A'') \\ - \Delta'' [\text{cof. } L' \text{ cof. } L'' \text{ cof. } (B'' - B') \\ + \sin. L' \sin. L''] \},$$

$$g = + \frac{\beta^2}{E^2} \left[R' - 2D + \frac{2D}{\beta} (\beta - R'') \frac{\text{cof. } \xi'}{\text{cof. } \xi''} \right] \\ + \frac{R''}{m''} \{ T' \text{ cof. } L'' \text{ cof. } (B'' - A') \\ - \Delta' [\text{cof. } L' \text{ cof. } L'' \text{ cof. } (B'' - B') \\ + \sin. L' \sin. L''] \},$$

$$h = + \frac{2\beta^2}{E^2} [4D^2 - 2D(R' + R'') + R'R''] \\ + \frac{\beta^2}{E^2} [8D - 2(R' + R'') + 2\beta \text{cof. } \xi' \text{cof. } \xi'' \\ - 2D \left(\frac{\text{cof. } \xi'}{\text{cof. } \xi''} + \frac{\text{cof. } \xi''}{\text{cof. } \xi'} \right)],$$

$$l = - \frac{2\beta^2 D}{E^2} [4D^2 - 2D(R' + R'') + R'R''] \\ + \frac{\beta^2}{E^2} \{ - 2D \text{cof. } \xi' \text{cof. } \xi'' \\ + \frac{2D}{\beta} [(R' - D) \frac{\text{cof. } \xi''}{\text{cof. } \xi'} + (R'' - D) \frac{\text{cof. } \xi'}{\text{cof. } \xi''}] \},$$

l'on aura

$$(2) f dR' + g dR'' + h dD + l d\beta = 0.$$

Il n'est pas nécessaire que l'équation (1) soit rigoureusement satisfaite par la substitution des différentes valeurs de β , E , D , R' , R'' , &c. pour que l'on puisse employer une équation de la forme précédente; & si l'on nomme

λ ce que devient l'équation (1) par la substitution des valeurs ci-dessus,

l'on aura

$$(3) f dR' + g dR'' + h dD + l d\beta - \lambda = 0.$$

Mém. 1779.

R

Du Calcul des trajectoires des Comètes, en supposant leurs orbites elliptiques.

(95.) Je vais faire voir maintenant comme on peut calculer les orbites des Comètes, en les supposant elliptiques. Il est superflu d'avertir que l'on ne doit entreprendre ce calcul que quand l'hypothèse parabolique se refuse d'une manière sensible à représenter les observations; car s'il n'y avoit que quelques légères différences entre les observations & les résultats, difficilement pourroit-on se flatter de recueillir un fruit bien satisfaisant d'un travail très-pénible. Au reste, ce que je vais exposer, est l'analyse rigoureuse de la détermination des orbites des Planètes; & sous ce point de vue, mon travail peut mériter quelque attention.

Dans ces recherches, je nommerai

- $\Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta''', \&c.$ les distances de la Comète à la Terre;
- $R', R'', R''', R''', \&c.$ les rayons vecteurs;
- $B', B'', B''', B''', \&c.$ les longitudes géocentriques de la Comète;
- $A', A'', A''', A''', \&c.$ les longitudes du Soleil;
- $L', L'', L''', L''', \&c.$ les latitudes géocentriques de la Comète;
- $v', v'', v''', v''', \&c.$ les anomalies de la Comète;
- N l'angle compris sur le plan de l'orbite de la Comète entre les rayons vecteurs R', R'' ;
- N' l'angle compris entre les rayons vecteurs R', R'' ;
- N'' l'angle compris entre les rayons vecteurs R', R'' ;

& ainsi de suite. Je supposerai donc que l'on a les équations suivantes,

$$(1) v'' = v' + N,$$

$$(2) v''' = v' + N',$$

$$(3) v''' = v' + N'',$$

& ainsi de suite.

Je supposerai que l'on connoît trois distances de la Comète à la Terre; ou du moins deux distances correspondantes à deux bonnes observations, & que l'on combine ces deux observations avec une troisième, également exacte. En effet

cette dernière condition équivaut à la connoissance de trois distances de la Comète à la Terre ; puisque la troisième distance se conclut des deux premières, au moyen de l'équation (1) du §. 26. Je proposerai, §. 106 & suiv. quelques vues sur les méthodes qui doivent être employées de préférence, pour connoître ces distances.

Lorsque l'on connoîtra les trois distances de la Comète à la Terre, on conclura facilement les rayons vecteurs, au moyen des équations du §. 39. On conclura les différens angles N , N' , N'' , au moyen des équations des §§. 16 & 17 ; on déterminera enfin le lieu du nœud ascendant & l'inclinaison de l'orbite, par les équations du §. 21. Nous pouvons donc supposer toutes ces quantités connues.

(96.) Si l'on combine trois observations, il est évident que l'on aura les équations suivantes,

$$(1) R' \left(1 + \frac{E}{\beta} \cos. v' \right) - 2 D = 0,$$

$$(2) R'' \left(1 + \frac{E}{\beta} \cos. v'' \right) - 2 D = 0,$$

$$(3) R''' \left(1 + \frac{E}{\beta} \cos. v''' \right) - 2 D = 0.$$

De ces équations, l'on tire

$$(4) R' \left(\frac{\beta}{E} + \cos. v' \right) - R'' \left(\frac{\beta}{E} + \cos. v'' \right) = 0,$$

$$(5) R' \left(\frac{\beta}{E} + \cos. v' \right) - R''' \left(\frac{\beta}{E} + \cos. v''' \right) = 0;$$

& de ces deux dernières, l'on conclura

$$(6) (R''' - R'') R' \cos. v' - (R''' - R') R'' \cos. v'' + (R'' - R') R''' \cos. v''' = 0;$$

donc enfin, puisque $\cos. v'' = \cos. v' \cos. N - \sin. v' \sin. N$,
 $\cos. v''' = \cos. v' \cos. N' - \sin. v' \sin. N'$,

$$(7) [(R''' - R') R'' \sin. N - (R'' - R') R''' \sin. N'] \tan. v' + (R''' - R'') R' - (R''' - R') R'' \cos. N + (R'' - R') R''' \cos. N' = 0.$$

(97.) Si l'on combinait un plus grand nombre d'observations, l'on auroit par une analyse semblable,

$$(1) R''' (1 + \frac{E}{\beta} \cos. v''') - 2 D = 0,$$

$$(2) R''' (1 + \frac{E}{\beta} \cos. v''') - 2 D = 0,$$

$$(3) R' (\frac{\beta}{E} + \cos. v') - R'' (\frac{\beta}{E} + \cos. v'') = 0;$$

$$(4) R' (\frac{\beta}{E} + \cos. v') - R''' (\frac{\beta}{E} + \cos. v''') = 0,$$

$$(5) (R''' - R'') R' \cos. v' - (R''' - R') R'' \cos. v'' + (R'' - R') R''' \cos. v''' = 0,$$

$$(6) (R''' - R'') R' \cos. v' - (R''' - R') R'' \cos. v'' + (R'' - R') R''' \cos. v''' = 0,$$

$$(7) [(R''' - R'') R' \sin. N - (R'' - R') R''' \sin. N''] \tan. v' \\ + (R''' - R'') R' - (R''' - R') R'' \cos. N + (R'' - R') R''' \cos. N'' = 0,$$

$$(8) [(R''' - R'') R' \sin. N - (R'' - R') R''' \sin. N''] \tan. v' \\ + (R''' - R'') R' - (R''' - R') R'' \cos. N + (R'' - R') R''' \cos. N'' = 0,$$

& ainsi de suite.

(98.) Au moyen de l'équation (7) du §. 96, l'on déterminera v' ; l'on conclura v'' & v''' au moyen des équations

(1) & (2) du §. 95; l'on conclura $\frac{\beta}{E}$, au moyen de l'équation (4) du §. 96; D au moyen de l'équation (1) du même paragraphe; & E au moyen de l'équation

$$(1) \beta^2 - 2 \beta D - E^2 = 0,$$

dans laquelle la valeur absolue de D & le rapport de β à E sont donnés. Nous remarquerons que

β est le demi-grand axe de la trajectoire;

E est la distance du foyer au centre de la trajectoire;

$\sqrt{2 \beta D}$ est le demi-petit axe.

Quant à la distance périhélie, elle n'est point égale à D , comme dans la parabole, mais on a

$$(2) \text{ distance périhélie} = \beta - E.$$

(99.) La détermination des autres élémens de l'orbite ne présente aucune difficulté; l'équation (2) du §. 84 fera

connoître l'instant du passage par le périhélie; & si l'on nomme, comme dans le §. 48,

μ' l'angle du rayon vecteur de la Comète avec la ligne des nœuds lors de la première observation; cet angle est compté sur le plan de la Comète, en partant du nœud ascendant, & en suivant le sens du mouvement de cet Astre dans son orbite,

Ω la distance du périhélie de la Comète au nœud ascendant; cet angle est compté sur le plan de l'orbite, en suivant le sens du mouvement de la Comète,

on aura (§. 48)

$$(1) \operatorname{tang.} \mu' = \frac{R'' \Delta' \sin. L' \sin. N}{R' \Delta'' \sin. L'' - R'' \Delta' \sin. L' \cos. N},$$

$$(2) \mu' - \Omega - \nu' = 0.$$

REMARQUE sur les solutions précédentes.

(100.) Si l'on connoissoit d'avance le temps de la révolution de l'Astre dont on cherche la trajectoire, on concluroit facilement le grand axe de cette trajectoire; puisque, dans le cas de la force centrale, en raison inverse du carré des distances, les cubes des grands axes sont comme les carrés des temps périodiques. Comme cette circonstance apporte une simplification dans les calculs, nous allons nous en occuper.

Nous avons vu (§. 96) que l'on a les équations suivantes,

$$(1) R' \left(1 + \frac{E}{\beta} \cos. \nu' \right) - 2D = 0,$$

$$(2) R' \left(\frac{\beta}{E} + \cos. \nu' \right) - R'' \left(\frac{\beta}{E} + \cos. \nu'' \right) = 0;$$

d'ailleurs

$$(3) \beta^2 - 2\beta D - E^2 = 0,$$

$$(4) \nu'' = \nu' + N,$$

& par conséquent $\cos. \nu'' = \cos. \nu' \cos. N - \sin. \nu' \sin. N$.
De ces équations, l'on tire

$$(5) (R' - R'')^2 \beta + [(R'' \cos. N - R') \cos. v' - R'' \sin. N \sin. v']^2 (R' - \beta) + R'(R' - R'') \cos. v' [(R'' \cos. N - R') \cos. v' - R'' \sin. N \sin. v'] = 0;$$

on n'aura donc besoin que de deux observations pour déterminer l'anomalie correspondante à la première observation; l'on déterminera ensuite v'' au moyen de l'équation (4), E au moyen de l'équation (2), & enfin D au moyen de l'équation (3).

(101.) Les mêmes recherches font voir que, pour déterminer l'orbite elliptique d'une Comète, par des équations purement algébriques, il est nécessaire d'avoir cinq observations. Astronomiquement parlant, ce nombre d'observations n'est point nécessaire, & la question peut être résolue avec trois observations; mais alors il faut avoir recours aux équations entre le temps & les élémens de l'ellipse, équations qui sont transcendantes. On peut au contraire résoudre algébriquement le Problème par cinq observations. En effet, si l'on compare l'équation (7) du §. 96, avec les équations (7) & (8) du §. 97, il en résultera deux équations entre R', R'', R''', R'''' , N, N', N'', N''', N'''' ; mais au moyen des équations des §§. 16 & 17, il est évident que l'on peut éliminer $\sin. N, \sin. N', \sin. N'', \sin. N''', \sin. N''''$, $\cos. N, \cos. N', \cos. N'', \cos. N''', \cos. N''''$; l'on aura donc alors deux équations entre $\Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta''''$; & comme le §. 24 fournit encore trois autres équations entre $\Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta''''$, & que l'on ne peut en tirer d'ailleurs, il faut cinq observations pour déterminer algébriquement l'orbite elliptique d'une Comète.

Détermination des véritables élémens de la Comète.

(102.) Nous connoissons maintenant, à très-peu-près, les véritables élémens de l'orbite de la Comète, & nous voulons nous assurer si ces suppositions sont rigoureuses.

Pour y parvenir, conservons toutes les définitions précédentes, & nommons

t le nombre de minutes de temps écoulées réellement entre la première & la seconde observation ;

\mathfrak{A} le nombre de minutes de temps écoulées entre la première & la troisième observation ;

τ } le nombre de minutes de temps que l'on conclut des
 τ' } équations suivantes ;

$$(1) \tau = \frac{113 \times 525969' \div}{2 \times 355} \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\text{arc} \xi'' - \text{arc} \xi'}{\sin. \text{total}} \right) - \frac{\beta^{\frac{1}{2}} E}{r^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\text{cof.} \xi'' - \text{cof.} \xi'}{\sin. \text{total}} \right)] ;$$

$$(2) \tau' = \frac{113 \times 525969' \div}{2 \times 355} \frac{\beta^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\text{arc} \xi'' - \text{arc} \xi'}{\sin. \text{total}} \right) - \frac{\beta^{\frac{1}{2}} E}{r^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\text{cof.} \xi'' - \text{cof.} \xi'}{\sin. \text{total}} \right)] .$$

Il est évident que les élémens ne seront rigoureux qu'autant que l'on aura $\tau = t$, $\tau' = \mathfrak{A}$. Dans tout autre cas, les élémens ne seront qu'approchés.

Maintenant si l'on différencie les équations (1) & (2) ; que l'on emploie pour l'équation (1) les valeurs de d' , d'' , b , & du §. 20 ; que l'on fasse usage des valeurs analogues d' , d''' , b' , d' pour l'équation (2), & que l'on suppose

$$(3) d\tau = t - \tau ; \quad (4) d\tau' = \mathfrak{A} - \tau' ;$$

l'on aura

$$(5) d'dR' + a''dR'' + b'dD + d\beta - r d\tau = 0 ;$$

$$(6) d'dR' + a'''dR''' + b'dD + d\beta - r d\tau' = 0 .$$

Maintenant si l'on conserve les définitions des quantités C, D, E', F, G, H, K du §. 24, & que l'on nomme, comme dans le §. 28,

ce que devient l'équation (1) du §. 24, par la substitution des valeurs $\Delta', \Delta'', \Delta'''$ employées dans les calculs précédens ;

que l'on conserve les définitions de m', m'', m''' du §. 39, & que l'on suppose

$$M = (C\Delta''\Delta''' - E'\Delta''' - D'\Delta'' + G) \frac{R'}{m'};$$

$$M' = (C\Delta'\Delta''' - F\Delta''' - D'\Delta' + H) \frac{R''}{m''};$$

$$M'' = (C\Delta'\Delta'' - E'\Delta' - F\Delta'' + K) \frac{R'''}{m'''};$$

l'on aura

$$(7) M dR' + M' dR'' + M'' dR''' - \alpha = 0.$$

Enfin, si l'on porte les mêmes valeurs de β , E , D , R' , R'' , &c. dans l'équation (1) du §. 94, & dans une équation analogue résultante de la comparaison de la première & de la troisième observation; que l'on nomme

λ ce que devient la première équation par la substitution des valeurs ci-dessus;

λ' ce que devient la seconde équation par une substitution analogue;

que l'on conserve les expressions de f , g , h , l , du §. 94, & que l'on forme des valeurs analogues f' , g' , h' , l' , pour la seconde équation; l'on aura

$$(8) f dR' + g dR'' + h dD + l d\beta - \lambda = 0,$$

$$(9) f' dR' + g' dR'' + h' dD + l' d\beta - \lambda' = 0.$$

Il ne s'agit que d'éliminer entre les équations (5), (6), (7), (8) & (9).

(103.) De la combinaison des équations (5) & (6) du paragraphe précédent, l'on tire

$$(1) d\beta = \frac{d(b - b') dR' - a'b' dR'' + a''b dR''' + b'r d\tau - b'r d\tau'}{b'a - b'a'}$$

$$(2) dD = \frac{d(b' - b) dR' + a''b' dR'' - a'b dR''' - b'r d\tau + b'r d\tau'}{b'a - b'a'}$$

De

De la combinaison des équations (8) & (9), l'on tire pareillement

$$(3) \quad d\beta = \frac{(f'h - fh') dR' - g'h dR'' + g'h dR''' + h'\lambda - h\lambda'}{h'l - h'l'},$$

$$(4) \quad dD = \frac{(f'l' - f'l) dR' + g'l' dR'' - g'l dR''' + \lambda'l - \lambda l'}{h'l - h'l'}.$$

Maintenant si l'on égale les deux valeurs de $d\beta$ & de dD , & que l'on suppose

$$P' = (b'e - b'e')(f'h - fh') - (h'l - h'l')(d'b - d'b),$$

$$Q' = a''b'(h'l - h'l') - g'h(b'e - b'e'),$$

$$S' = g'h(b'e - b'e') - a'''b(h'l - h'l'),$$

$$p' = (b'e - b'e')(h'\lambda - h\lambda'),$$

$$q' = (h'l - h'l') b',$$

$$s' = (h'l - h'l') b,$$

$$P'' = (b'e - b'e')(f'l' - f'l) - (h'l - h'l')(d'e' - d'e'),$$

$$Q'' = (b'e - b'e') g'l' - (h'l - h'l') a''e',$$

$$S'' = (h'l - h'l') a'''e' - (b'e - b'e') g'l,$$

$$p'' = (b'e - b'e')(\lambda'l - \lambda l'),$$

$$q'' = (h'l - h'l') e',$$

$$s'' = (h'l - h'l') e,$$

l'on aura

$$(5) \quad P' dR' + Q' dR'' + S' dR''' - q' r d\tau + s' r d\tau' + p' = 0,$$

$$(6) \quad P'' dR' + Q'' dR'' + S'' dR''' + q'' r d\tau - s'' r d\tau' + p'' = 0.$$

Il ne s'agit que d'éliminer entre les équations (5) & (6) du *présent* paragraphe, & l'équation (7) du *paragraphe précédent*.

(104.) Si l'on combine ces équations, l'on aura

Mém. 1779.

§

$$(1) (P - \frac{MS'}{M''}) dR' + (Q - \frac{M'S'}{M''}) dR'' - q' r d\tau + s' r d\tau' + p' + \frac{a S'}{M''} = 0,$$

$$(2) (P'' - \frac{MS''}{M''}) dR' + (Q'' - \frac{M'S''}{M''}) dR'' + q'' r d\tau - s'' r d\tau' + p'' + \frac{a S''}{M''} = 0,$$

d'où l'on tire enfin,

$$(3) (P'' - \frac{MS''}{M''}) (Q - \frac{M'S'}{M''}) - (P - \frac{MS'}{M''}) (Q'' - \frac{M'S''}{M''}) dR' \\ + [q'' (Q - \frac{M'S'}{M''}) - q' (Q'' - \frac{M'S''}{M''})] r d\tau + [s' (Q'' - \frac{M'S''}{M''}) - s'' (Q - \frac{M'S'}{M''})] r d\tau' \\ + (p'' + \frac{a S''}{M''}) (Q - \frac{M'S'}{M''}) - (p' + \frac{a S'}{M''}) (Q'' - \frac{M'S''}{M''}) = 0.$$

On connoîtra donc la valeur de dR' ; on conclura ensuite les valeurs de dR'' au moyen de l'équation (1) du présent paragraphe; la valeur de dR''' au moyen de l'équation (5) du paragraphe précédent; on aura enfin les valeurs de $d\beta$ & de dD au moyen des équations (1) & (2) du §. 103, & le problème est résolu. En effet, connoissant les véritables valeurs de R' , R'' , R''' , β , D , la détermination des élémens n'a plus de difficultés. On connoîtra la valeur de E au moyen de l'équation (3) du §. 100; l'inclinaison du plan de l'orbite & la position du nœud se détermineront par les équations du §. 21; l'instant du passage par le périhélie se connoîtra par l'équation du §. 86; les différentes anomalies v' , v'' , v''' , & les angles N , N' , se connoîtront par les équations (1), (2) & (3) des §. 95 & 96; enfin la distance du périhélie de la Comète au nœud ascendant sur l'Écliptique, sera donné par les équations du §. 48.

Simplification que la connoissance de la valeur de β apporte dans les calculs.

(105.) Si l'on connoissoit d'avance la quantité β , les calculs se simplifieroient. Dans les équations (5), (6), (8) & (9) du §. 102, l'on feroit $e = 0$, $e' = 0$, $l = 0$, $l' = 0$; & de la combinaison de ces équations, ainsi réduites, l'on tireroit

$$(1) a'(b - b') dR' - a''b' dR'' + a'''b dR''' + b'r d\tau - b'r d\tau' = 0,$$

$$(2) (f'h - f'h') dR' - g'h' dR'' + g'h dR''' + h'n - h'n' = 0.$$

L'on auroit de plus,

$$(3) M dR' + M' dR'' + M'' dR''' - a = 0.$$

De la combinaison de ces trois équations, l'on tireroit

$$(4) [d(b - b') - a''b \frac{M}{M''}] dR' - (a''b' + a'''b \frac{M'}{M''}) dR'' + \frac{a''ba}{M''} + b'r d\tau - b'r d\tau' = 0,$$

$$(5) (f'h - f'h' - g'h \frac{M}{M''}) dR' - (g'h' + g'h \frac{M'}{M''}) dR'' + \frac{g'ha}{M''} + h'n - h'n' = 0.$$

D'où l'on concluroit enfin,

$$(6) [(a'b - a'b' - a''b \frac{M}{M''}) (g'h' + g'h \frac{M'}{M''}) - (f'h - f'h' - g'h \frac{M}{M''}) (a''b' + a'''b \frac{M'}{M''})] dR' + (a''b \frac{a}{M''} + b'r d\tau - b'r d\tau') (g'h' + g'h \frac{M'}{M''}) - (g'h \frac{a}{M''} + h'n - h'n') (a''b' + a'''b \frac{M'}{M''}) = 0.$$

Sur les méthodes qui peuvent être employées pour connoître les distances de la Comète à la Terre, dont on doit faire usage dans les §§. 95 & suivans.

(106.) Les calculs des §§. 95 & suivans, supposent que l'on connoît, d'une manière très-approchée, les distances de la Comète à la Terre. Voici les méthodes qui me paroissent préférables pour parvenir à ce but.

La théorie & les calculs que l'on a entrepris sur les orbites des Comètes, ont également fait voir, que pour déterminer les trajectoires elliptiques, il faut que l'on ait un grand nombre de bonnes observations; que la Comète ait parcouru

un très-grand arc de sa trajectoire; qu'elle ait été vue avant & après son passage par le périhélie; que les observations se refusent d'une manière sensible à pouvoir être représentées par une seule & même parabole; autrement, ou l'on auroit peu de prise pour distinguer la nature rigoureuse de l'orbite, ou il seroit à craindre, qu'en abandonnant le calcul dans la parabole, on ne courût après une exactitude chimérique, & que les erreurs inséparables des observations ne missent dans les résultats, une incertitude infiniment plus grande que celle que l'on cherche à éviter. D'ailleurs, les observations étant liées à des positions d'Étoiles, qui ne sont pas toutes parfaitement connues, on doit plus songer à accorder l'ensemble des observations, qu'à représenter rigoureusement quelques observations isolées, au hazard de rendre les autres discordantes.

Ces remarques m'ont conduit à penser que lorsque les conditions du Problème se réunissent pour exiger un calcul dans l'ellipse, on ne peut mieux faire que de classer toutes les observations, & d'en former différens systèmes résultans de la réunion de plusieurs observations assez prochaines entr'elles pour employer les méthodes des *§§. 31 & suivans*. On conclura donc par ces méthodes, & pour chacun de ces différens systèmes, les distances de la Comète à la Terre, lors d'une observation moyenne qui sera le résultat de chaque système particulier; on traitera ensuite ces distances moyennes comme si elles étoient données immédiatement par les observations.

Supposons donc que l'on ait un certain nombre de ces distances, on portera les deux premières dans l'équation (1) du *§. 24*, & l'on cherchera successivement les autres distances par des équations de la forme de celle du *§. 26*: l'on comparera les résultats avec ceux que l'on aura déduits des méthodes des *§§. 31 & suivans*. Si ces résultats coïncident, le Problème est résolu, & l'on a satisfait à la condition que toutes les positions de la Comète soient dans un même plan; &

les résultats ne coïncident point, il ne sera pas difficile, par des équations différentielles de la forme de celles du §. 28, de trouver la loi qui rend ces distances, sinon rigoureusement cohérentes entr'elles, du moins d'une manière très-approchée.

(107.) Si l'on connoissoit d'avance la position du nœud, il seroit plus facile de déterminer rapidement la loi des distances. En effet, on auroit alors des équations de la forme de celles (7) (8) du §. 21, (3) (4) du §. 23; & comme l'on suppose que l'angle ζ est connu à très-peu près, l'on auroit facilement les limites des variations probables de Δ' , Δ'' , Δ''' , &c.

(108.) Lorsque par les procédés que nous venons d'indiquer, on aura déterminé les différentes valeurs approchées de Δ' , Δ'' , Δ''' , &c. on emploiera les méthodes des §§. 95 & suivans; peut-être même, au lieu de regarder β comme inconnu, seroit-il plus à propos de supposer cette quantité connue, & de simplifier ainsi les calculs, conformément à la remarque du §. 105, sauf à les répéter un plus grand nombre de fois. On pourroit alors employer pour première valeur de β celle qui seroit donnée par les considérations des §§. 91 & 92.

Telles sont les méthodes que je croirois devoir employer de préférence pour déterminer les distances de la Comète à la Terre, dont on doit faire usage dans les §§. 95 & suivans. La longueur de ce Mémoire m'empêche de les développer avec quelque étendue; mais ce qui a été dit ci-dessus ne laisse rien à désirer sur le véritable esprit de cette solution.

Je me suis attaché principalement à séparer les équations qui dépendent de la nature de la trajectoire d'avec celles qui en sont indépendantes, & qui supposent uniquement que les mouvemens de la Comète se passent tous dans un même plan. Cette manière d'envisager le problème, me paroît une chose intéressante dans la détermination des orbites des Comètes.

Du cas où la trajectoire de la Comète seroit circulaire.

(109.) Je terminerai cette seconde partie par l'examen du cas particulier où la trajectoire de la Comète seroit circulaire : je supposerai dans ces recherches que l'on a des équations de la forme de celles du §. 31. Je nommerai, comme dans ce paragraphe,

Δ' , R' , T' , A' , B' , L' , les quantités qui appartiennent à la première observation ;

Δ'' , R'' , T'' , A'' , B'' , L'' , les quantités qui appartiennent à la dernière des observations, faites dans des intervalles proches, & que je suppose liées ensemble par les considérations du §. 33 ;

Δ le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observation Δ' & Δ'' .

Je nommerai d'ailleurs, comme dans les paragraphes précédens,

I l'inclinaison du plan de l'orbite de la Comète sur l'Écliptique ;

ζ la longitude du nœud ascendant de la Comète ;

α' l'angle du rayon vecteur de la Comète avec la ligne des nœuds, lors de la première observation ; cet angle est compté sur le plan de l'orbite de la Comète, en partant du nœud ascendant, & en suivant le sens du mouvement de la Comète dans son orbite ;

α'' l'angle du rayon vecteur de la Comète avec la ligne des nœuds, lors de la seconde observation ;

N un angle qu'il s'agira de déterminer, & qui est tel que l'on ait

$$(1) \alpha'' = \alpha' + N.$$

Je supposerai enfin que l'on a une équation de la forme suivante,

$$(2) \Delta'' = P \Delta'.$$

(110.) Il est facile, d'après ce qui a été dit dans ce Mémoire, de déterminer les distances de la Comète à la Terre lors des deux Observations Δ' , Δ'' , ainsi que la

rayon du cercle qu'elle décrit. En effet, il suit des recherches précédentes, que l'on a les deux équations

$$(1) R'^2 - \Delta'^2 + 2 \Delta' T' \cos. L' \cos. (B' - A') - T'^2 = 0,$$

$$(2) R''^2 - \Delta''^2 + 2 \Delta'' T'' \cos. L'' \cos. (B'' - A'') - T''^2 = 0.$$

Mais, par la supposition, la trajectoire de la Comète est circulaire; donc $R'' = R'$; d'ailleurs, $\Delta'' = P \Delta'$; donc

$$(3) (1 - P^2) \Delta'^2 + 2 [PT'' \cos. L'' \cos. (B'' - A'') - T'^2 - T''^2] \Delta' + T'^2 - T''^2 = 0.$$

Au moyen de cette dernière équation, l'on connoîtra la distance Δ' ; d'où l'on conclura la distance Δ'' au moyen de l'équation (2) du §. 109; & enfin le rayon de l'orbite circulaire de la Comète, au moyen de l'équation (1) du présent paragraphe.

(111.) La détermination de l'inclinaison du plan de l'orbite & de l'angle que fait le premier rayon vecteur avec la ligne des nœuds compté sur le plan de l'orbite, ne présente pas beaucoup plus de difficultés. En effet, l'on a (§. 48) les deux équations suivantes,

$$(1) R' \sin. u' \sin. I - \Delta' \sin. L' = 0,$$

$$(2) R'' \sin. u'' \sin. I - \Delta'' \sin. L'' = 0;$$

& de ces équations, l'on tire à cause de $R' = R''$,

$$(3) \Delta' \sin. L' \sin. u'' - \Delta'' \sin. L'' \sin. u' = 0;$$

mais [§. 109, équat. (1)] $u'' = u' + N$; donc

$$(4) \text{tangente } u' = \frac{\Delta' \sin. L' \sin. N}{\Delta'' \sin. L'' - \Delta' \sin. L' \cos. N}.$$

On voit donc que l'on connoîtra l'angle u' du premier rayon vecteur avec la ligne des nœuds, & par conséquent [équat. (1)] l'inclinaison du plan de l'orbite de la Comète, lorsque l'on connoîtra l'angle N .

(112.) Il n'est pas difficile de déterminer l'angle N . Pour

144 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

y parvenir, on se rappellera que les recherches du §. 110, ont fait connoître le rayon de la trajectoire circulaire de la Comète; d'ailleurs on connoît le temps \mathfrak{S} écoulé entre les deux observations que l'on compare

Si donc l'on nomme

r la moyenne distance du Soleil à la Terre,

s l'arc que la Terre décrit dans son orbite pendant une minute de temps, lorsqu'elle est à la moyenne distance du Soleil,

Δ le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observation Δ' & Δ'' ,

il est évident que l'arc décrit par la Terre, pendant le temps \mathfrak{S} , sera égal à $\mathfrak{S}s$, & que par conséquent ce même arc aura pour son expression en secondes de degré $\frac{\mathfrak{S}s}{r} \times 206265''$; mais l'arc décrit par la Comète, dans son orbite circulaire, est à l'arc moyen de la Terre, décrit dans le même temps, comme $r^{\frac{1}{2}}$ est à $R^{\frac{1}{2}}$; donc

$$(1) N = \frac{\mathfrak{S}s^{\frac{1}{2}}}{R^{\frac{1}{2}}} 206265''.$$

(113.) Puisque l'angle N est connu, l'angle que fait le premier rayon vecteur avec la ligne des nœuds, compté sur le plan de l'Écliptique, ainsi que l'inclinaison du plan de l'orbite sont pareillement connus; on déterminera donc facilement la longitude du nœud ascendant, au moyen des équations du §. 51.

(114.) Il n'est pas même indispensablement nécessaire d'avoir recours à l'équation (1) du §. 112, pour déterminer l'angle N . On peut se rappeler que nous avons donné (§. 16) l'expression générale de cet angle; expression qui, dans le cas que nous considérons, devient

$$(1) R'^2 \cos. N - T' T'' \cos. (A'' - A') + T' \Delta'' \cos. L'' \cos. (B'' - A') + T'' \Delta' \cos. L' \cos. (B' - A'') - \Delta' \Delta'' [\cos. L' \cos. L'' \cos. (B'' - B') + \sin. L' \sin. L''] = 0.$$

Cette

Cette expression est moins commode que celle du §. 112.

(115.) Si l'expression de l'angle N du *paragraphe précédent* est plus compliquée que celle du §. 112, elle est au moins très-utile pour vérifier l'hypothèse circulaire. En effet, si cette hypothèse est la véritable, les deux valeurs de l'angle N doivent donner le même résultat; on a donc

$$(1) R'^2 \cos. \text{ang.} \left(\frac{357^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{1}{2}}} 206265'' \right) - T' T''' \cos. (A'' - A') \\ + T' \Delta'' \cos. L'' \cos. (B''' - A') + T''' \Delta' \cos. L' \cos. (B' - A'') \\ - \Delta' \Delta''' [\cos. L' \cos. L''' \cos. (B''' - B') + \sin. L' \sin. L'''] = 0.$$

Il ne s'agit que de vérifier si cette équation est satisfaite.

(116.) L'équation (1) du *paragraphe précédent* présente encore une utilité remarquable, celle de faire trouver facilement le rayon du cercle qui satisfait au Problème, lorsque l'on connoît à peu-près la valeur de ce rayon. En effet, si l'on différencie cette équation, l'on aura

$$2 R' \cos. \text{ang.} \left(\frac{357^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{1}{2}}} 206265'' \right) dR + R'^2 d \cos. \text{ang.} \left(\frac{357^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{1}{2}}} 206265'' \right) \\ + T' \cos. L'' \cos. (B''' - A') d\Delta'' + T''' \cos. L' \cos. (B' - A'') d\Delta \\ - \Delta'' [\cos. L' \cos. L''' \cos. (B''' - B') + \sin. L' \sin. L'''] d\Delta \\ - \Delta' [\cos. L' \cos. L''' \cos. (B''' - B') + \sin. L' \sin. L'''] d\Delta''' = 0$$

Soit maintenant, comme dans le §. 39,

$$m' = \Delta' - T' \cos. L' \cos. (B' - A'), \\ m''' = \Delta''' - T''' \cos. L''' \cos. (B''' - A');$$

l'on aura, dans le cas du cercle,

$$d\Delta' = \frac{R' dR'}{m'}; \quad d\Delta''' = \frac{R' dR'}{m'''}. \quad \text{De plus,}$$

$$d \cos. \text{ang.} \left(\frac{357^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{1}{2}}} 206265'' \right) = \frac{1}{2} \sin. \text{ang.} \left(\frac{357^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{1}{2}}} 206265'' \right) \frac{357^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{1}{2}}} dR'$$

Mém. 1779.

T

146 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

donc si l'on nomme

à ce que devient l'équation (1) du §. 115, par la substitution des valeurs de R' , T' , Δ' , A' , B' , L' ; T'' , Δ'' , A'' , B'' , L'' ;

l'on aura

$$\begin{aligned} & \{ 2 R' \cos. \text{ang.} \left(\frac{357^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{1}{2}}} 206265'' \right) + \frac{3}{2} \sin. \text{ang.} \left(\frac{357^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{1}{2}}} 206265'' \right) \frac{357^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{1}{2}}} \\ & + [T''' \cos. L' \cos. (B' - A'') - \Delta'' [\cos. L' \cos. L'' \cos. (B'' - B') \\ & + \sin. L' \sin. L'']] \frac{R'}{m'} + [T' \cos. L'' \cos. (B'' - A') \\ & - \Delta' [\cos. L' \cos. L''' \cos. (B''' - B') + \sin. L' \sin. L''']] \frac{R'}{m''} \} dR' - \lambda = 0. \end{aligned}$$

(117.) Il pourroit être intéressant de connoître l'influence de la variation de la valeur de P , dont il a été parlé dans le §. 109, sur l'expression du rayon de la trajectoire circulaire; rien de plus simple que la solution de cette question. En effet, on a tout de suite

$$\begin{aligned} & [(1 - P^2) \Delta' + 2 [PT''' \cos. L''' \cos. (B''' - A'') \\ & - T' \cos. L' \cos. (B' - A')]] d\Delta' - [\Delta'^2 P \\ & - \Delta' T''' \cos. L''' \cos. (B''' - A'')] dP = 0, \end{aligned}$$

$$\text{ou à cause de } d\Delta' = \frac{R'dR'}{m'},$$

$$\begin{aligned} (1) & [(1 - P^2) \Delta' + 2 [PT''' \cos. L''' \cos. (B''' - A'') - T' \cos. L' \cos. (B' - A')]] \frac{R'}{m'} dR' \\ & - [\Delta'^2 P - \Delta' T''' \cos. L''' \cos. (B''' - A'')] dP = 0. \end{aligned}$$

(118.) Par les méthodes précédentes, nous avons déterminé le rayon de la trajectoire circulaire, & en général, les élémens qui représentent les premières observations dans le cercle; on peut être curieux de vérifier si ces élémens satisfont à une observation éloignée. Pour y parvenir, je remarque que si l'on nomme

$\phi''', T''', \Delta''', L''', B''', u''', \&c.$ les grandeurs qui appartiennent à cette observation,

l'on a (S. 54)

$$(1) \Delta''' \sin. L''' \cot. I + T''' \sin. (A''' - \zeta) - \Delta''' \cos. L''' \sin. (B''' - \zeta) = 0,$$

$$(2) R' \sin. u''' \sin. I - \Delta''' \sin. L''' = 0.$$

On déterminera donc la valeur de Δ''' au moyen de l'équation (1), & la valeur de u''' , au moyen de l'équation (2).

(119.) Maintenant, il est évident que si l'on nomme

N' l'angle compris entre les deux rayons vecteurs de la Comète, correspondans aux observations Δ', Δ''' ,

S' le nombre de minutes de temps écoulées entre la première & la quatrième observation,

$$\text{l'on a } N' = \frac{S' r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{1}{2}}} 206265''; \text{ de plus, } N' = u''' - u';$$

il s'agit donc de vérifier si l'on a

$$(1) u''' - u' = \frac{S' r^{\frac{1}{2}}}{R'^{\frac{1}{2}}} 206265''.$$

Dans le premier cas, les élémens sont bien déterminés, & l'orbite est circulaire; dans le second cas, l'orbite n'est point circulaire. C'est une seconde manière de vérifier l'hypothèse circulaire.

(120.) Je terminerai ce qui regarde l'orbite circulaire, par une remarque analogue à celle du S. 101. Astronomiquement parlant, il ne faut que deux observations pour déterminer cette orbite; en effet, à cause de $R' = R''$, il suit du S. 39, que

$$\begin{aligned} \Delta' &= T' \cos. L' \cos. (B' - A') \\ \pm \sqrt{[T'^2 \cos.^2 L' \cos.^2 (B' - A') - T'^2 + R'^2]}, \\ \Delta'' &= T'' \cos. L'' \cos. (B'' - A'') \\ \pm \sqrt{[T''^2 \cos.^2 L'' \cos.^2 (B'' - A'') - T''^2 + R''^2]}, \end{aligned}$$

il est donc évident que l'équation (1) du S. 115 est déterminée;

148 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

mais d'un autre côté, cette équation est transcendante. Si l'on veut éviter cet inconvénient, & n'avoir à résoudre qu'une équation algébrique, il est nécessaire d'employer trois observations; l'on a alors, en conservant les définitions de C, D', E', F, G, H, K du §. 24, une équation de la forme suivante,

$$(1) C\Delta' \Delta'' \Delta''' - D' \Delta' \Delta'' - E' \Delta' \Delta''' - F\Delta'' \Delta''' + G\Delta' + H\Delta'' + K\Delta''' = 0.$$

De plus, à cause de l'égalité des rayons vecteurs, l'on a

$$(2) \Delta'' = T'' \cos. L'' \cos. (B'' - A'') \pm \sqrt{[T''^2 \cos.^2 L'' \cos.^2 (B'' - A'') - T''^2 + \Delta'^2 + T'^2 - 2 \Delta' T' \cos. L' \cos. (B' - A')]}.$$

$$(3) \Delta''' = T''' \cos. L''' \cos. (B''' - A''') \pm \sqrt{[T'''^2 \cos.^2 L''' \cos.^2 (B''' - A''') - T'''^2 + \Delta'^2 + T'^2 - 2 \Delta' T' \cos. L' \cos. (B' - A')]}.$$

Le Problème est donc résolu, par une équation purement algébrique; mais il est plus que déterminé, puisque l'on a en outre deux équations de la forme de l'équation (1) du §. 114.

TROISIÈME PARTIE,

Dans laquelle on démontre ce qui est relatif aux équations de la forme de celles dont il a été parlé dans les §§. 31 & suivans.

(121.) Il me reste maintenant à démontrer ce qui est relatif aux équations de la forme de celles dont il a été parlé dans les §§. 31 & suivans. Je ferai voir la formation de ces équations; le degré de leur exactitude; dans quel cas on doit les employer de préférence, & par quel moyen on peut y suppléer, lorsque les circonstances du Problème peuvent laisser quelque doute sur la légitimité de leur usage.

Soit donc, comme dans les §§. 31 & 32,

- t le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observation Δ' & Δ'' ;
- t' le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observation Δ'' & Δ''' ;
- t'' le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observation Δ' & Δ''' .

$$\mu' = \sin. L'' \cos. L' \sin. (B'' - A'') - \sin. L'' \cos. L''' \sin. (B'' - A'');$$

$$\mu'' = \sin. L''' \cos. L' \sin. (B' - A'') - \sin. L' \cos. L''' \sin. (B'' - A'');$$

$$\mu''' = \sin. L' \cos. L' \sin. (B' - A'') - \sin. L' \cos. L'' \sin. (B'' - A'').$$

Je vais démontrer que l'on a les équations suivantes,

$$(1) t' \mu'' \Delta' - \mathfrak{S} \mu' \Delta'' = 0,$$

$$(2) t' \mu''' \Delta' - t' \mu' \Delta''' = 0,$$

$$(3) t' \mu'' \Delta''' - \mathfrak{S} \mu''' \Delta'' = 0.$$

Comme ces résultats supposent quelques connoissances préliminaires, je commence par l'établissement de ces propositions.

De la relation entre les coordonnées de la trajectoire de la Comète, prises sur le plan de la trajectoire, & les coordonnées perpendiculaires x, y, z du §. 13.

(122.) Soit

I l'inclinaison du plan de l'orbite de la Comète sur l'Écliptique;

ζ la longitude du nœud ascendant de la Comète;

Ω l'angle de la ligne des abscisses de l'orbite de la Comète prises sur le plan de cette orbite, avec la ligne des nœuds;

l'abscisse } à l'orbite de la Comète, prises dans le plan de cette
l'ordonnée } orbite; ces coordonnées sont supposées perpendiculaires entr'elles;

x, y, z les coordonnées à l'orbite de la Comète, & qui sont prises, savoir x & y sur le plan de l'Écliptique, & z sur un plan perpendiculaire à l'Écliptique.

Je vais faire voir que si l'on suppose

$$a = + \cos. \Omega \cos. \zeta - \cos. I \sin. \Omega \sin. \zeta,$$

$$b = - \sin. \Omega \cos. \zeta - \cos. I \cos. \Omega \sin. \zeta,$$

$$c = + \cos. \Omega \sin. \zeta + \cos. I \sin. \Omega \cos. \zeta,$$

$$e = - \sin. \Omega \sin. \zeta + \cos. I \cos. \Omega \cos. \zeta,$$

$$f = + \sin. \Omega \sin. I,$$

$$g = + \cos. \Omega \sin. I,$$

$$(1) x = a\theta + b\varphi;$$

$$(2) y = c\theta + e\varphi;$$

$$(3) z = f\theta + g\varphi.$$

Fig. 6. (123.) Pour le démontrer, soit S le Soleil; SEC le plan de l'Écliptique; SE la ligne passant par le premier point d'Ariès; SN la ligne des nœuds de l'orbite de la Comète; $SNMC$ le plan de l'orbite de la Comète; C le lieu de la Comète dans son orbite; C' la projection de la Comète sur l'Écliptique; SD la ligne des abscisses de l'orbite de la Comète, prise sur le plan de cette orbite. Abaissons de la Comète C la perpendiculaire CM sur la ligne SNM des nœuds; conservons les définitions du *paragraphe précédent* & cherchons l'équation à l'orbite de la Comète, par rapport à l'abscisse SM , prise sur la ligne des nœuds, & à l'ordonnée perpendiculaire MC . Nommons

K l'abscisse SM ,

V l'ordonnée correspondante MC ,

& soit ∂ le point où l'ordonnée MC rencontre la ligne des abscisses SD , prise sur le plan de l'orbite de la Comète.

On voit d'abord que les triangles ∂SM , $DC\partial$ sont semblables, puisque ces triangles ont chacun les angles en ∂ opposés au sommet, & que d'ailleurs ils sont rectangles; l'angle $DC\partial$ est donc égal à l'angle ∂SM , c'est-à-dire à l'angle Ω ; & chacun des angles en ∂ est complément de Ω ; donc, $SM = S\partial \cos. \Omega$. Mais $S\partial = SD - \partial D$, & $\partial D = DC \tan. \Omega$; de plus, $SD = \theta$, & $DC = v$; donc $S\partial = \theta - v \tan. \Omega$; donc $SM = \theta \cos. \Omega - v \tan. \Omega \cos. \Omega$; donc

$$K = \theta \cos. \Omega - v \sin. \Omega.$$

De même, à cause de $MC = M\partial + \partial C$; que de plus

$$M\partial = K \tan. \Omega, \text{ \& que } \partial C = \frac{DC}{\cos. \Omega}; \text{ on a}$$

$$V = \theta \sin. \Omega + v \cos. \Omega.$$

Maintenant dans le triangle CMC' rectangle en C' , on Fig. 6.
 a $CC' = MC \sin. I = V \sin. I$; on a de plus
 $MC' = MC \cos. I$; d'ailleurs, $CC' = z$; donc

$$z = \theta \sin. \Omega \sin. I + v \cos. \Omega \sin. I,$$

$$MC' = \theta \sin. \Omega \cos. I + v \cos. \Omega \cos. I.$$

Considérons maintenant les triangles semblables SEN , $NC'M$, rectangles en E & en M , & dont les angles ESN , $MC'N$, sont chacun égaux à l'angle que nous avons nommé ζ ; on aura par une analyse semblable à la précédente,

$$x = K \cos. \zeta - MC' \sin. \zeta; \quad y = K \sin. \zeta + MC' \cos. \zeta.$$

Substituant donc dans ces équations à K & à MC' , leurs valeurs, on aura

$$x = \theta (\cos. \Omega \cos. \zeta - \sin. \Omega \cos. I \sin. \zeta) + v (\sin. \Omega \cos. \zeta + \cos. \Omega \cos. I \sin. \zeta),$$

$$y = \theta (\cos. \Omega \sin. \zeta + \sin. \Omega \cos. I \cos. \zeta) + v (\cos. \Omega \cos. I \cos. \zeta - \sin. \Omega \sin. \zeta);$$

on a donc les équations (1), (2) & (3) du §. 122.

(124.) Il suit de ces recherches, que pour trois observations différentes on aura les neuf équations suivantes,

$$\begin{array}{lll} (1) x' = a\theta + b v, & (4) y' = c\theta + d v, & (7) z' = f\theta + g v, \\ (2) x'' = a\theta'' + b v'', & (5) y'' = c\theta'' + d v'', & (8) z'' = f\theta'' + g v'', \\ (3) x''' = a\theta''' + b v''', & (6) y''' = c\theta''' + d v''', & (9) z''' = f\theta''' + g v'''. \end{array}$$

Des relations entre les trois distances successives de la Comète à la Terre, & les aires rectilignes de la trajectoire de la Comète, comprises entre les rayons vecteurs & les cordes correspondantes, prises sur le plan de l'orbite de la Comète.

(125.) Il faut faire voir maintenant qu'il existe des relations entre les trois distances successives de la Comète à la Terre & les aires rectilignes de la trajectoire, comprises

152 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

entre les rayons vecteurs & les cordes correspondantes, prises sur le plan de l'orbite de la Comète.

Pour déterminer ces relations, éliminons a & b , au moyen des équations (1), (2) & (3) du *paragraphe précédent*; c & e , au moyen des équations (4), (5) & (6); f & g , au moyen des équations (7), (8) & (9); on parviendra aux trois résultats suivans,

$$(1) (\theta''v'' - \theta''v''')x' - (\theta''v' - \theta''v'')x'' + (\theta''v' - \theta''v'')x''' = 0;$$

$$(2) (\theta''v'' - \theta''v''')y' - (\theta''v' - \theta''v'')y'' + (\theta''v' - \theta''v'')y''' = 0,$$

$$(3) (\theta''v'' - \theta''v''')z' - (\theta''v' - \theta''v'')z'' + (\theta''v' - \theta''v'')z''' = 0.$$

Donc, si l'on fait pour abréger

$$H = \theta''v' - \theta''v''; M = \theta''v' - \theta''v''; Q = \theta''v' - \theta''v'';$$

on aura les trois équations semblables,

$$(4) Qx' - Mx'' + Hx''' = 0,$$

$$(5) Qy' - My'' + Hy''' = 0,$$

$$(6) Qz' - Mz'' + Hz''' = 0.$$

Maintenant, si l'on conserve les définitions du §. 13, il est évident que l'on a

$$x' = T' \cos. A' - \Delta' \cos. B' \cos. L',$$

$$x'' = T'' \cos. A'' - \Delta'' \cos. B'' \cos. L'',$$

$$x''' = T''' \cos. A''' - \Delta''' \cos. B''' \cos. L''',$$

$$y' = T' \sin. A' - \Delta' \sin. B' \cos. L',$$

$$y'' = T'' \sin. A'' - \Delta'' \sin. B'' \cos. L'',$$

$$y''' = T''' \sin. A''' - \Delta''' \sin. B''' \cos. L''',$$

$$z' = \Delta' \sin. L',$$

$$z'' = \Delta'' \sin. L'',$$

$$z''' = \Delta''' \sin. L'''.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (4), (5) & (6) du

du présent paragraphe, elles deviendront

$$(7) \left. \begin{aligned} & QT' \cos. A' - MT'' \cos. A'' + HT''' \cos. A''' \\ & - Q \Delta' \cos. B' \cos. L' + M \Delta'' \cos. B'' \cos. L'' - H \Delta''' \cos. B''' \cos. L''' \end{aligned} \right\} = 0,$$

$$(8) \left. \begin{aligned} & QT' \sin. A' - MT'' \sin. A'' + HT''' \sin. A''' \\ & - Q \Delta' \sin. B' \cos. L' + M \Delta'' \sin. B'' \cos. L'' - H \Delta''' \sin. B''' \cos. L''' \end{aligned} \right\} = 0,$$

$$(9) Q \Delta' \sin. L' - M \Delta'' \sin. L'' + H \Delta''' \sin. L''' = 0.$$

(126.) Il est aisé de démontrer que les quantités Q, M, H , Fig. 7. sont respectivement proportionnelles aux aires rectilignes $C'SC'', C'SC'', C'SC'$ de la trajectoire de la Comète, comprises entre les rayons vecteurs & les cordes correspondantes, prises sur le plan de l'orbite de la Comète. Pour le prouver, prenons, par exemple, la quantité M ; ce que l'on dira sur cette quantité s'appliquera facilement, avec quelques légers changemens, aux quantités Q, H . Nous avons vu (*parag. précéd.*) que $M = \theta''' v' - \theta' v''$; or $\theta''' v' - \theta' v''$ est l'expression de l'aire $C'SC''$ comprise entre les rayons vecteurs SC, SC'' & la corde CC'' . En effet, des points C, C'' de la trajectoire, abaissons sur la ligne des abscisses ASP , les perpendiculaires $CP, C'P'$; & du point C , abaissons sur l'ordonnée $P'C''$, la perpendiculaire Cp' ; l'aire $C'SC''$ sera évidemment égale à la surface du triangle CSP , plus la surface du triangle $Cp'P'$, plus la surface du parallélogramme $CPP'p'$, moins la surface du triangle $SP'P'$; mais $SP = \theta$, $PC = v$, $SP' = \theta''$, $C''P' = v''$, $Cp' = \theta''' - \theta'$, $P'p' = v''' - v'$; donc l'aire $C'SC'' = \frac{1}{2} \theta' v' + \frac{1}{2} (\theta''' - \theta') (v''' - v') + (\theta''' - \theta') v' - \frac{1}{2} \theta'' v'' = \frac{1}{2} (\theta''' v' - \theta' v'')$; donc $M = 2 \times \text{aire } C'SC''$. Et comme l'on démontre des propriétés analogues, relativement aux quantités Q, H ; la proposition relative à la proportionnalité des grandeurs Q, M, H aux aires rectilignes $C'SC'', C'SC'', C'SC'$ est établie.

(127.) Si l'on multiplie l'équation (7) du §. 125 par le facteur $QT' \sin. A' - MT'' \sin. A'' + HT''' \sin. A'''$; que l'on multiplie pareillement l'équation (8) du même

Mém. 1779.

U

paragraphe, par le facteur $QT' \cos. A' - MT'' \cos. A'' + HT''' \cos. A'''$, & que l'on soustraie ces deux produits l'un de l'autre, l'on aura

$$(1) \quad Q_{\Delta'} \cos. L' [QT' \sin. (B' - A') - MT'' \sin. (B' - A'') + HT''' \sin. (B' - A''')] \\ - M_{\Delta''} \cos. L'' [QT' \sin. (B'' - A') - MT'' \sin. (B'' - A'') + HT''' \sin. (B'' - A''')] \\ + H_{\Delta'''} \cos. L''' [QT' \sin. (B''' - A') - MT'' \sin. (B''' - A'') + HT''' \sin. (B''' - A''')] = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(2) \quad Q_{\Delta'} \cos. L' \Gamma' - M_{\Delta''} \cos. L'' \Gamma'' + H_{\Delta'''} \cos. L''' \Gamma''' = 0,$$

en supposant d'ailleurs

$$\Gamma' = QT' \sin. (B' - A') - MT'' \sin. (B' - A'') + HT''' \sin. (B' - A'''), \\ \Gamma'' = QT' \sin. (B'' - A') - MT'' \sin. (B'' - A'') + HT''' \sin. (B'' - A'''), \\ \Gamma''' = QT' \sin. (B''' - A') - MT'' \sin. (B''' - A'') + HT''' \sin. (B''' - A''').$$

Maintenant si, dans l'équation (2), l'on élimine successivement Δ''' , Δ'' , Δ' , au moyen de l'équation (9) du §. 125, l'on aura

$$(3) \quad Q_{\Delta'} (\sin. L' \cos. L''' \Gamma''' - \sin. L''' \cos. L' \Gamma') \\ - M_{\Delta''} (\sin. L'' \cos. L''' \Gamma''' - \sin. L''' \cos. L'' \Gamma'') = 0;$$

$$(4) \quad Q_{\Delta'} (\sin. L' \cos. L'' \Gamma'' - \sin. L'' \cos. L' \Gamma') \\ - H_{\Delta'''} (\sin. L'' \cos. L''' \Gamma''' - \sin. L''' \cos. L'' \Gamma'') = 0;$$

$$(5) \quad M_{\Delta''} (\sin. L'' \cos. L' \Gamma' - \sin. L' \cos. L'' \Gamma'') \\ - H_{\Delta'''} (\sin. L''' \cos. L' \Gamma' - \sin. L' \cos. L''' \Gamma''') = 0.$$

Fig. 7. (128.) Les équations (3), (4) & (5) du *paragraphe précédent*, sont rigoureuses quels que soient les intervalles entre les observations; & si les quantités Q , M , H étoient, par exemple, proportionnelles au temps, le Problème des Comètes seroit complètement résolu avec la dernière facilité. Comme ces mêmes quantités Q , M , H , sont respectivement proportionnelles aux aires rectilignes $C'SC''$, CSC'' , CSC' , ainsi qu'il a été démontré dans le §. 126, & que les rapports entre ces espaces rectilignes diffèrent très-peu des rapports entre les espaces curvilignes correspondans, compris entre la

courbe & les rayons vecteurs; que de plus ces derniers espaces sont proportionnels aux temps, en vertu de la théorie des forces centrales; on peut d'abord supposer les quantités H, M, Q respectivement proportionnelles aux temps t, ϑ, t' ; on a alors les équations suivantes,

$$(1) \quad t' \Delta' (\sin. L' \cos. L'' \Gamma'' - \sin. L'' \cos. L' \Gamma') \\ - \vartheta \Delta'' (\sin. L'' \cos. L''' \Gamma''' - \sin. L''' \cos. L'' \Gamma'') = 0;$$

$$(2) \quad t' \Delta' (\sin. L' \cos. L'' \Gamma'' - \sin. L'' \cos. L' \Gamma') \\ - t \Delta''' (\sin. L'' \cos. L''' \Gamma''' - \sin. L''' \cos. L'' \Gamma'') = 0;$$

$$(3) \quad \vartheta \Delta'' (\sin. L'' \cos. L' \Gamma' - \sin. L' \cos. L'' \Gamma'') \\ - t \Delta''' (\sin. L''' \cos. L' \Gamma' - \sin. L' \cos. L''' \Gamma''') = 0;$$

$\Gamma', \Gamma'', \Gamma'''$ ayant d'ailleurs pour valeurs

$$\Gamma' = t' T' \sin. (B' - A') - \vartheta T'' \sin. (B' - A'') + t T''' \sin. (B' - A''');$$

$$\Gamma'' = t' T' \sin. (B'' - A') - \vartheta T'' \sin. (B'' - A'') + t T''' \sin. (B'' - A'''),$$

$$\Gamma''' = t' T' \sin. (B''' - A') - \vartheta T'' \sin. (B''' - A'') + t T''' \sin. (B''' - A'''),$$

(129.) Je remarque de plus, que l'orbite de la Terre pouvant être regardée comme circulaire, & décrite d'un mouvement uniforme dans un petit intervalle de temps, les rayons T', T''' peuvent être, sans erreur sensible, supposés égaux à T'' ; d'ailleurs t, t', ϑ , exprimant par exemple un nombre de minutes de temps, si l'on nomme

r la moyenne distance du Soleil à la Terre,

m l'arc décrit par la Terre pendant une minute, dans un cercle dont le rayon égale r ,

l'on a dans le cas dont il s'agit,

$$A' = A'' - m t; \quad A''' = A'' + m t'.$$

Si l'on substitue ces valeurs à A' & A''' , dans les expressions de $\Gamma', \Gamma'', \Gamma'''$ du §. 128, l'on aura

$$B' - A' = B' - A'' + mt;$$

$$B'' - A' = B'' - A'' + mt;$$

$$B''' - A' = B''' - A'' + mt;$$

$$B' - A''' = B' - A'' - mt';$$

$$B'' - A''' = B'' - A'' - mt';$$

$$B''' - A''' = B''' - A'' - mt'.$$

Mais généralement, en vertu d'un théorème de Taylor, connu de tous les Géomètres, si l'on suppose qu'un angle $B - A$ varie d'une petite quantité $\mp mt$, & que le rayon du cercle soit égal à r , l'on a

$$\begin{aligned} \sin.(B - A \mp mt) &= \sin.(B - A) \mp \frac{m}{r} \cos.(B - A) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{m^2}{r^2} \sin.(B - A) \mp \frac{1}{6} \frac{m^3}{r^3} \cos.(B - A) \text{ \&c.} \end{aligned}$$

Donc, développant le calcul, effaçant les quantités qui se détruisent, & substituant \mathfrak{D} à $t + t'$, l'on aura

$$\begin{aligned} \Gamma' &= -\frac{1}{2} \frac{t' \mathfrak{D} T'' m^2}{r} \left[\sin.(B' - A'') - \frac{1}{3} \frac{(t - t') m}{r} \cos.(B' - A'') \right], \\ \Gamma'' &= -\frac{1}{2} \frac{t' \mathfrak{D} T'' m^2}{r} \left[\sin.(B'' - A'') - \frac{1}{3} \frac{(t - t') m}{r} \cos.(B'' - A'') \right], \\ \Gamma''' &= -\frac{1}{2} \frac{t' \mathfrak{D} T'' m^2}{r} \left[\sin.(B''' - A'') - \frac{1}{3} \frac{(t - t') m}{r} \cos.(B''' - A'') \right]. \end{aligned}$$

Les équations (1), (2), (3) du §. 128, deviennent par-là,

$$\begin{aligned} (1) \quad t' \Delta' \left\{ \sin. L'' \cos. L' \left[\sin.(B' - A'') - \frac{1}{3} \frac{(t - t') m}{r} \cos.(B' - A'') \right] \right. \\ \left. - \sin. L' \cos. L'' \left[\sin.(B'' - A'') - \frac{1}{3} \frac{(t - t') m}{r} \cos.(B'' - A'') \right] \right\} \\ - \mathfrak{D} \Delta'' \left\{ \sin. L''' \cos. L'' \left[\sin.(B'' - A'') - \frac{1}{3} \frac{(t - t') m}{r} \cos.(B'' - A'') \right] \right. \\ \left. - \sin. L'' \cos. L''' \left[\sin.(B''' - A'') - \frac{1}{3} \frac{(t - t') m}{r} \cos.(B''' - A'') \right] \right\} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad & t' \Delta' \left\{ \sin. L' \cos. L' \left[\sin. (B' - A'') - \frac{1}{3} \frac{(t - t')^m}{r} \cos. (B' - A'') \right] \right. \\
& \left. - \sin. L' \cos. L'' \left[\sin. (B'' - A'') - \frac{1}{3} \frac{(t - t')^m}{r} \cos. (B'' - A'') \right] \right\} \\
& - t \Delta'' \left\{ \sin. L'' \cos. L'' \left[\sin. (B'' - A'') - \frac{1}{3} \frac{(t - t')^m}{r} \cos. (B'' - A'') \right] \right. \\
& \left. - \sin. L'' \cos. L''' \left[\sin. (B''' - A'') - \frac{1}{3} \frac{(t - t')^m}{r} \cos. (B''' - A'') \right] \right\} = 0; \\
(3) \quad & \mathfrak{A} \Delta'' \left\{ \sin. L' \cos. L'' \left[\sin. (B'' - A'') - \frac{1}{3} \frac{(t - t')^m}{r} \cos. (B'' - A'') \right] \right. \\
& \left. - \sin. L'' \cos. L' \left[\sin. (B' - A'') - \frac{1}{3} \frac{(t - t')^m}{r} \cos. (B' - A'') \right] \right\} \\
& - t \Delta'' \left\{ \sin. L' \cos. L''' \left[\sin. (B''' - A'') - \frac{1}{3} \frac{(t - t')^m}{r} \cos. (B''' - A'') \right] \right. \\
& \left. - \sin. L''' \cos. L' \left[\sin. (B' - A'') - \frac{1}{3} \frac{(t - t')^m}{r} \cos. (B' - A'') \right] \right\} = 0;
\end{aligned}$$

ou enfin

$$(4) \quad t' \mu'' \Delta' - \mathfrak{A} \mu' \Delta'' = 0;$$

$$(5) \quad t' \mu''' \Delta' - t \mu' \Delta''' = 0;$$

$$(6) \quad t \mu'' \Delta'' - \mathfrak{A} \mu''' \Delta'' = 0;$$

en conservant les définitions de μ' , μ'' , μ''' des §§. 32 & 121; dans le cas toutefois où les intervalles entre les observations seroient égaux, ou que l'on croiroit pouvoir négliger les troisièmes puissances du petit accroissement de l'arc de l'orbite terrestre, divisé par le rayon.

(130.) Nous remarquerons enfin, pour la facilité de l'évaluation du petit accroissement m , que si l'on nomme

r la moyenne distance de la Terre au Soleil,

s l'arc que la Terre décrit autour du Soleil, à cette distance, pendant une minute de temps,

T'' la distance actuelle de la Terre au Soleil,

l'on a

$$(1) \quad m = \frac{s r^2}{T''^2}.$$

Cette proposition se déduit facilement de la propriété

158 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

des trajectoires décrites en vertu d'une force centrale, dans lesquelles les aires sont proportionnelles aux temps. En effet, si l'on suppose les temps égaux, l'on aura généralement (S. 4) $R^2 du - R'^2 dv' = 0$, R, R', u, v' étant les rayons vecteurs & les angles correspondans compris entre ces rayons; or on peut supposer dans le cas dont il s'agit, que $R = r; u = s; R' = T''; v' = m$; la proposition est donc démontrée.

(131.) Il est aisé de remarquer que les équations (4), (5) & (6) du S. 129 sont identiquement les mêmes que celles des SS. 32 & suivans; ces équations ont donc l'inconvénient relevé dans le S. 128, c'est-à-dire de supposer les quantités Q, M, H proportionnelles aux temps; il faut faire voir que cet inconvénient est nul dans la totalité des Comètes que l'on observe. C'est spécialement dans ces recherches que nous aurons recours aux principes développés par M. de la Grange, car jusqu'ici les équations sont indépendantes de ses principes.

Du principe de mécanique employé par M. de la Grange.

(132.) Si l'on nomme

$\theta, \theta'', \theta'''$ } les trois abscisses successives de la trajectoire de la Comète, prises sur le plan de son orbite, & correspondantes à trois observations séparées par de petits intervalles de temps,

v, v'', v''' } les ordonnées correspondantes,

θ le temps écoulé depuis une certaine époque, jusqu'à l'instant de la seconde observation,

θ' le temps écoulé entre la première observation & la seconde;

θ'' le temps écoulé entre la seconde observation & la troisième;

θ le temps écoulé entre la première observation & la troisième;

il est sensible, qu'en général, les abscisses $\theta, \theta'', \theta'''$, ainsi que les ordonnées v, v'', v''' , peuvent être regardées comme des

fonctions de la force centrale & du temps écoulé depuis l'époque dont il s'agit. Donc les quantités θ'' , v'' , doivent donner θ' , v' , θ''' , v''' , en y changeant ϕ en $\phi - t$, & $\phi + t$; donc, en vertu du théorème de Taylor déjà cité,

$$\theta' = \theta'' - \frac{d\theta''}{d\phi} t + \frac{1}{2} \frac{d^2\theta''}{d\phi^2} t^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3\theta''}{d\phi^3} t^3 + \&c.$$

$$v' = v'' - \frac{dv''}{d\phi} t + \frac{1}{2} \frac{d^2v''}{d\phi^2} t^2 - \frac{1}{6} \frac{d^3v''}{d\phi^3} t^3 + \&c.$$

$$\theta''' = \theta'' + \frac{d\theta''}{d\phi} t + \frac{1}{2} \frac{d^2\theta''}{d\phi^2} t^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3\theta''}{d\phi^3} t^3 + \&c.$$

$$v''' = v'' + \frac{dv''}{d\phi} t + \frac{1}{2} \frac{d^2v''}{d\phi^2} t^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3v''}{d\phi^3} t^3 + \&c.$$

(133.) Il faut faire voir maintenant que si l'on suppose constante la force accélératrice qui engendre la courbure de la trajectoire de la Comète, les séries qui expriment les valeurs de θ' , v' , θ''' , v''' s'arrêtent; & qu'il est facile de donner à θ' , v' , θ''' , v''' , des expressions plus commodes que celles du *paragraphe précédent*. Cette supposition d'une force accélératrice constante pendant la durée des observations, est la seule qui s'oppose à la rigueur de la solution; mais il est aisé de voir qu'elle influe infiniment peu sur l'exactitude des résultats, lorsque l'on suppose les durées très-petites.

(134.) Soit

r la moyenne distance de la Terre au Soleil;

F la force centrale du Soleil à la distance r ; cette force se mesure par l'espace parcouru dans un temps donné; ainsi, par exemple, pour une minute de temps, la quantité F est le sinus versé de l'arc moyen de la Terre, parcouru pendant une minute;

R'' le rayon vecteur de la Comète, lors de la seconde observation;

il est évident que la force centrale qui agit sur la Comète

à la distance R'' , a pour expression $\frac{Fr^2}{R''^3}$. Cette force agit toute entière dans le sens du rayon vecteur ; & si on la décompose suivant les coordonnées θ'' & v'' de la trajectoire, il est clair que la force qui agit suivant l'abscisse θ'' , aura pour expression $\frac{Fr^2\theta''}{R''^3}$, & que la force qui agit suivant l'ordonnée v'' , aura pour expression $\frac{Fr^2v''}{R''^3}$. On fait en général, que la différentielle de la vitesse est à la différentielle du temps, comme la force accélératrice est à l'unité ; de plus, $\frac{d\theta''}{d\phi}$ est évidemment l'expression de la vitesse dans la direction de l'abscisse θ'' ; donc en supposant $d\phi$ constant, $\frac{d^2\theta''}{d\phi^2}$ est la différentielle de la vitesse, suivant la même direction ; d'ailleurs, $\frac{Fr^2\theta''}{R''^3}$ est l'expression de la force accélératrice qui agit dans le sens de l'abscisse θ'' ; donc en vertu de ce qui vient d'être dit, $\frac{d^2\theta''}{d\phi^2} : d\phi :: \frac{Fr^2\theta''}{R''^3} : 1$; donc

$$(1) \quad \frac{d^2\theta''}{d\phi^2} + \frac{Fr^2\theta''}{R''^3} = 0.$$

J'ai mis le signe $+$ devant le second terme, parce que la force centrale tend à diminuer la vitesse, suivant la direction θ'' .

Par des raisonnemens analogues, on prouve que

$$(2) \quad \frac{d^2v''}{d\phi^2} + \frac{Fr^2v''}{R''^3} = 0.$$

(135.) Il est aisé de conclure de-là, que les séries qui expriment les valeurs de $\theta', v', \theta'', v''$, s'arrêtent après le troisième terme. En effet $\frac{d^3\theta''}{d\phi^3} = d\left(\frac{d^2\theta''}{d\phi^2}\right)$; or $\frac{d^2\theta''}{d\phi^2}$ est, par la supposition, égal à $\frac{Fr^2\theta''}{R''^3}$, & cette quantité est constante, si l'on suppose

suppose la force centrale constante; donc $\frac{d^3\theta''}{d\varphi^3} = 0$, dans cette supposition, ainsi que les termes suivans. Donc les séries qui expriment θ' , θ'' , s'arrêtent après le troisième terme; & comme l'on peut dire la même chose des séries qui expriment v' , v'' , on' aura enfin

$$\begin{aligned}\theta' &= \theta'' - \frac{d\theta''}{d\varphi} t - \frac{1}{2} \frac{Fr^2\theta''}{R''^3} t^2; \\ v' &= v'' - \frac{dv''}{d\varphi} t - \frac{1}{2} \frac{Fr^2v''}{R''^3} t^2; \\ \theta'' &= \theta'' + \frac{d\theta''}{d\varphi} t - \frac{1}{2} \frac{Fr^2\theta''}{R''^3} t^2; \\ v'' &= v'' + \frac{dv''}{d\varphi} t - \frac{1}{2} \frac{Fr^2v''}{R''^3} t^2.\end{aligned}$$

(136.) Nous avons dit que dans les derniers calculs, la force centrale étoit regardée comme constante. M. de la Grange, dans son Mémoire, ne parle point de cette supposition, & il se contente de dire, que dans les expressions de θ' , v' , θ'' , v'' , il néglige les termes ultérieurs aux troisièmes termes des séries, comme infiniment petits. Cette manière d'envisager la question revient précisément à regarder la force centrale comme constante pendant la petite durée des observations que l'on compare. J'aurois donc pu énoncer la question de la même manière que M. de la Grange; mais j'ai préféré de donner une idée des termes que l'on néglige, en énonçant précisément le principe auquel cette négligence peut être rapportée.

De la forme rigoureuse des équations du §. 32.

(137.) Nous avons vu (§. 125) que

$$H = \theta''v' - \theta'v''; \quad M = \theta'''v' - \theta'v'''; \quad Q = \theta'''v'' - \theta''v''.$$

Si dans ces dernières expressions, l'on substitue à θ' , v' , θ'' , v'' , leurs valeurs tirées du §. 135, l'on aura

Mém. 1779.

X

$$H = \frac{v'' d\theta'' - \theta'' dv''}{d\varphi} t;$$

$$M = \frac{v'' d\theta'' - \theta'' dv''}{d\varphi} \mathfrak{D} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Fr^2}{R''^3} t t' \right);$$

$$Q = \frac{v'' d\theta'' - \theta'' dv''}{d\varphi} t'.$$

Si l'on substitue ces valeurs de H , M , Q dans les expressions de Γ , Γ'' , Γ''' du §. 127, & que l'on suive une analyse entièrement semblable à celle du §. 129, l'on aura, dans le cas des intervalles égaux entre les observations, ou dans le cas que l'on croiroit pouvoir négliger les troisièmes puissances du petit accroissement de l'arc de l'orbite terrestre divisé par le cube du rayon; l'on aura, dis-je,

$$\Gamma = - \frac{v'' d\theta'' - \theta'' dv''}{d\varphi} \left[\frac{\mathfrak{D} t t'}{2} T''^2 \left(\frac{m^2}{r^2} - \frac{Fr^2}{R''^3} \right) \sin. (B - A') \right];$$

$$\Gamma'' = - \frac{v'' d\theta'' - \theta'' dv''}{d\varphi} \left[\frac{\mathfrak{D} t t'}{2} T''^2 \left(\frac{m^2}{r^2} - \frac{Fr^2}{R''^3} \right) \sin. (B'' - A'') \right];$$

$$\Gamma''' = - \frac{v'' d\theta'' - \theta'' dv''}{d\varphi} \left[\frac{\mathfrak{D} t t'}{2} T''^2 \left(\frac{m^2}{r^2} - \frac{Fr^2}{R''^3} \right) \sin. (B''' - A'') \right];$$

donc, en substituant ces valeurs dans les équations (3), (4) & (5) du §. 127, & conservant les définitions de μ , μ' , μ'' du §. 32, l'on aura

$$(1) t \mu'' \Delta' - \mathfrak{D} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Fr^2}{R''^3} t t' \right) \mu' \Delta'' = 0;$$

$$(2) t \mu''' \Delta' - t \mu' \Delta''' = 0;$$

$$(3) t \mu'' \Delta''' - \mathfrak{D} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Fr^2}{R''^3} t t' \right) \mu''' \Delta'' = 0.$$

(138.) L'équation (2) du *paragraphe précédent*, est identiquement la même que l'équation (2) du §. 32; mais les équations (1) & (3) diffèrent des équations (1) & (3) du §. 32, par le petit coefficient $-\frac{1}{2} \frac{Fr^2}{R''^3} t t'$. Si l'on considère cependant que F étant le sinus versé de l'arc de l'orbite

terrestre décrit pendant une minute de temps, ce petit coefficient ne peut être qu'infiniment petit par rapport à l'unité, dans les cas où le rayon vecteur de la Comète n'est pas lui-même très-petit, circonstance qui empêcheroit la Comète de pouvoir être observée, puisqu'alors elle seroit plongée dans les rayons du Soleil; on sera tenté de conclure que dans tous les cas, ce coefficient peut être négligé, & que les équations du *paragraphe précédent* coïncident avec celles du §. 32. Au reste, je vais faire voir que quand même on s'en tiendrait rigoureusement aux équations du §. 137, aucunes des conclusions de ce Mémoire ne seroient dérangées.

RÉPONSE à l'Objection que l'on pourroit faire contre les Méthodes de ce Mémoire, tirée de la forme des équations du §. 137.

(139.) On pourroit faire contre les méthodes de ce Mémoire, une objection tirée de la forme des équations du §. 137. Voici l'objection dans toute sa force.

Vous avez affirmé, dira-t-on, que le Problème des Comètes se ramenoit au second degré; mais vous avez exigé pour condition essentielle que l'on ait des équations de la forme suivante (§. 25),

$$\Delta'' = P\Delta', \quad \Delta'' = P'\Delta',$$

P, P' étant des quantités connues; or vous ne remplissez point cette condition. En effet, vous avez bien [§. 137, équation (2)] une équation de la forme requise entre Δ'' & Δ' ; mais l'équation entre Δ'' & Δ' , renferme la variable dans l'expression de P' ; puisque [§. 137, équation (1)] P' suppose la connoissance de R'' , qui dépend elle-même de la distance de la Comète à la Terre.

Je pourrois d'abord répondre, que si l'on n'admet point la forme des équations du §. 32 comme rigoureuse, on ne peut au moins s'empêcher de convenir que ces équations ne soient très-près d'être exactes; d'où je conclurois qu'il

est possible, sans compliquer le calcul, d'avoir égard au coefficient $\frac{1}{2} \cdot \frac{Fr^2}{R''^3} t t'$. On feroit alors un premier calcul, dans lequel on négligeroit ce coefficient; l'on en concluroit la valeur approchée de la distance de la Comète à la Terre, lors de l'observation Δ'' ; l'on calculeroit ensuite la valeur correspondante de R'' , par l'équation (2) du §. 39, & l'on rectifieroit les résultats, en faisant entrer dans un nouveau calcul, le petit terme $\frac{1}{2} \cdot \frac{Fr^2}{R''^3} t t'$ qui seroit connu. L'on auroit alors une équation $\Delta'' = P' \Delta'$ de la forme requise dans le §. 32. Je pourrois ajouter que les valeurs de Δ' , Δ'' , Δ''' , données par M. de la Grange, supposent les équations (1), (2), (3) du §. 32; mais, sans nous arrêter à cette réponse indirecte, nous remarquerons que tout consiste à faire entrer dans le calcul une nouvelle observation. En effet, soient

Δ' , Δ'' , Δ''' , Δ'''' , les observations que je désigne par les distances correspondantes Δ' , Δ'' , Δ''' , Δ'''' , de la Comète à la Terre, lors de ces observations.

Il est évident, que si l'on considère d'abord les observations Δ' , Δ'' , Δ''' , l'on aura rigoureusement [§. 137, *équat. (2)*] entre Δ' & Δ''' , une équation de la forme de celle dont est question dans le §. 32, & dans laquelle, en supposant $\Delta''' = P' \Delta'$, P' ne renfermera point d'inconnues. Considérons maintenant les observations Δ' , Δ'' , Δ'''' , l'on aura, par la même raison, entre Δ' & Δ'''' , une équation de la forme de celles dont est question dans le §. 32, & dans laquelle, en supposant $\Delta'''' = P \Delta'$, P ne renfermera point d'inconnues. On peut donc satisfaire rigoureusement aux conditions prescrites pour ramener le Problème au second degré.

On satisferoit également à la condition, en considérant les observations Δ''' , Δ'''' , Δ''''' , & en cherchant le rapport entre Δ''' & Δ''''' . Car, conformément aux remarques du §. 33, on conclura facilement le rapport entre Δ' & Δ''''' ; l'on

aura donc les rapports entre Δ' & Δ''' , Δ' & Δ'''' , sans que ces rapports renferment d'inconnues, & la condition sera remplie.

(140.) On pourroit encore objecter que l'équation (2) du §. 137 ne renfermant aucun terme qui dépende de la loi de la force centrale, on auroit la même équation, si la force centrale étoit nulle, & si par conséquent la trajectoire étoit rectiligne; le Problème proposé n'est donc résolu, dira-t-on, que pour le cas de la trajectoire rectiligne.

Je réponds que la conséquence n'est pas exacte. Il est bien vrai, que quelle que soit la loi de la force centrale, les distances de la Comète à la Terre sont combinées d'une manière semblable avec les observations; mais comme les observations sont différentes, suivant la loi de la force centrale, il suit seulement, que l'on combine d'une manière semblable des quantités différentes. Le résultat, relativement aux distances de la Comète à la Terre, est donc différent dans les diverses hypothèses des forces centrales, non à raison de l'équation, mais à raison des observations.

Du cas particulier où les latitudes de la Comète sont très-petites.

(141.) On pourroit penser que si les latitudes de la Comète étoient très-petites, les méthodes de ce Mémoire seroient sujettes à quelques inconvéniens. En effet, tous les termes des équations, par lesquels on détermine, soit les rapports des distances de la Comète à la Terre, soit les valeurs absolues de ces distances, renfermant les sinus des latitudes de la Comète, il seroit à craindre que la moindre erreur dans les latitudes ne mit la méthode en défaut; puisque les erreurs sur les latitudes seroient du même ordre que les latitudes. L'objection seroit bien plus forte, si la Comète se mouvoit dans le plan de l'Écliptique, car alors on n'auroit plus d'équations.

Je pourrois d'abord répondre qu'il est toujours facile

d'éviter l'inconvénient dont il vient d'être question , en interpolant les latitudes , & en rectifiant les observations ; je pourrois dire ensuite que la méthode étant générale , on ne peut avec justice , objecter l'inconvénient d'un cas particulier ; mais sans entrer dans cette discussion , voici le procédé qu'il faudroit suivre.

(142.) Nous avons vu (S. 125) que pour trois observations Δ' , Δ'' , Δ''' , l'on a les équations suivantes,

$$(1) \left. \begin{aligned} QT' \cos. A' - MT'' \cos. A'' + HT''' \cos. A''' - Q \Delta' \cos. B' \cos. L' \\ + M \Delta'' \cos. B'' \cos. L'' - H \Delta''' \cos. B''' \cos. L''' \end{aligned} \right\} = 0.$$

$$(2) \left. \begin{aligned} QT' \sin. A' - MT'' \sin. A'' + HT''' \sin. A''' - Q \Delta' \sin. B' \cos. L' \\ + M \Delta'' \sin. B'' \cos. L'' - H \Delta''' \sin. B''' \cos. L''' \end{aligned} \right\} = 0.$$

Si l'on multiplie l'équation (1) par $\sin. B'''$, que l'on multiplie pareillement l'équation (2) par $\cos. B'''$, & que l'on soustraie ces deux nouvelles équations l'une de l'autre, l'on aura

$$(3) QT' \sin. (B''' - A') - MT'' \sin. (B''' - A'') + HT''' \sin. (B''' - A''') \\ - Q \Delta' \cos. L' \sin. (B''' - B') + M \Delta'' \cos. L'' \sin. (B''' - B'') = 0,$$

ou plutôt, en substituant t à H , t' à Q , & $\mathfrak{S}(1 - \frac{1}{2} \frac{Fr^2 t t'}{R^2})$ à M ,

$$(4) t' T' \sin. (B''' - A') - \mathfrak{S}(1 - \frac{1}{2} \frac{Fr^2 t t'}{R^2}) T'' \sin. (B''' - A'') \\ + t T''' \sin. (B''' - A''') - t' \Delta' \cos. L' \sin. (B''' - B') \\ + \mathfrak{S}(1 - \frac{1}{2} \frac{Fr^2 t t'}{R^2}) \Delta'' \cos. L'' \sin. (B''' - B'') = 0.$$

L'on aura pareillement pour trois observations, Δ' , Δ'' , Δ''' ,

$$(5) t'' T' \sin. (B''' - A') - \mathfrak{S}(1 - \frac{1}{2} \frac{Fr^2 t t''}{R^2}) T'' \sin. (B''' - A'') \\ + t T''' \sin. (B''' - A''') - t'' \Delta' \cos. L' \sin. (B''' - B') \\ + \mathfrak{S}(1 - \frac{1}{2} \frac{Fr^2 t t''}{R^2}) \Delta'' \cos. L'' \sin. (B''' - B'') = 0.$$

Dans ces équations, nous entendons par

- t le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observ. Δ' & Δ'' ;
 t' le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observ. Δ'' & Δ''' ;
 \mathfrak{A} le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observ. Δ' & Δ''' ;
 t'' le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observ. Δ'' & Δ''' ;
 \mathfrak{A}' le nombre de minutes de temps écoulées entre l'observ. Δ' & Δ''' .

(143.) Si l'on élimine Δ' cof. L' , au moyen des équations (4) & (5) du *paragraphe précédent*, l'on aura

$$\begin{aligned} (1) \quad & t t'' T'' [\sin. (B'' - A') \sin. (B''' - B') - \sin. (B''' - A') \sin. (B'' - B')] \\ & - T'' [\mathfrak{A} t'' (1 - \frac{1}{2} \frac{F r^2 t t'}{R''^3}) \sin. (B'' - A') \sin. (B''' - B') \\ & - \mathfrak{A}' t' (1 - \frac{1}{2} \frac{F r^2 t t'}{R''^3}) \sin. (B''' - A') \sin. (B'' - B')] \\ & + t t'' T''' \sin. (B''' - A'') \sin. (B''' - B') \\ & - t t' T''' \sin. (B''' - A''') \sin. (B''' - B') \\ & + \Delta'' \text{ cof. } L'' [\mathfrak{A} t'' (1 - \frac{1}{2} \frac{F r^2 t t'}{R''^3}) \sin. (B'' - B') \sin. (B''' - B') \\ & - \mathfrak{A}' t' (1 - \frac{1}{2} \frac{F r^2 t t'}{R''^3}) \sin. (B''' - B') \sin. (B'' - B')] = 0. \end{aligned}$$

(144.) Il est donc évident, qu'au moyen des équations de ce Mémoire, on peut résoudre le cas particulier où les latitudes de la Comète seroient très-petites & même nulles. Il est vrai que le Problème est alors d'un degré élevé; mais il se ramèneroit au premier, si, conformément aux remarques du §. 139, l'on croyoit pouvoir négliger les petits termes

$$\frac{1}{2} \frac{F r^2 t t'}{R''^3}, \quad \frac{1}{2} \frac{F r^2 t t'}{R''^3} *.$$

* M. de la Place, dans un Mémoire lu à l'Académie, a résolu ce dernier Problème, & en-général les principales questions relatives aux Comètes; mais il a employé une analyse entièrement différente de la mienne. Je m'empresse d'annoncer son travail.

(145.) L'on fait que le Problème des Comètes n'exige que cinq observations, trois de longitudes & deux de latitudes, ou réciproquement ; cependant la détermination des valeurs de μ' , μ'' , μ''' , renferme trois longitudes & trois latitudes de la Comète, ce qui pourroit faire croire que l'on a employé plus d'observations qu'il n'est nécessaire. Mais l'on sera bientôt détrompé, lorsque l'on réfléchira que la détermination de l'orbite des Comètes n'exige en effet que cinq observations, lorsque l'on suppose l'orbite parabolique. Lorsqu'au contraire l'on suppose en général que l'orbite est une section conique, alors il faut six observations, puisque la solution peut également amener l'ellipse ou l'hyperbole.

(146.) Les méthodes de ce Mémoire, considérées du côté de la théorie, me paroissent très-exactes ; & si leur usage decouvroit quelque inexactitude dans les résultats, je ne doute point qu'on ne dût l'attribuer à l'inexactitude des observations.

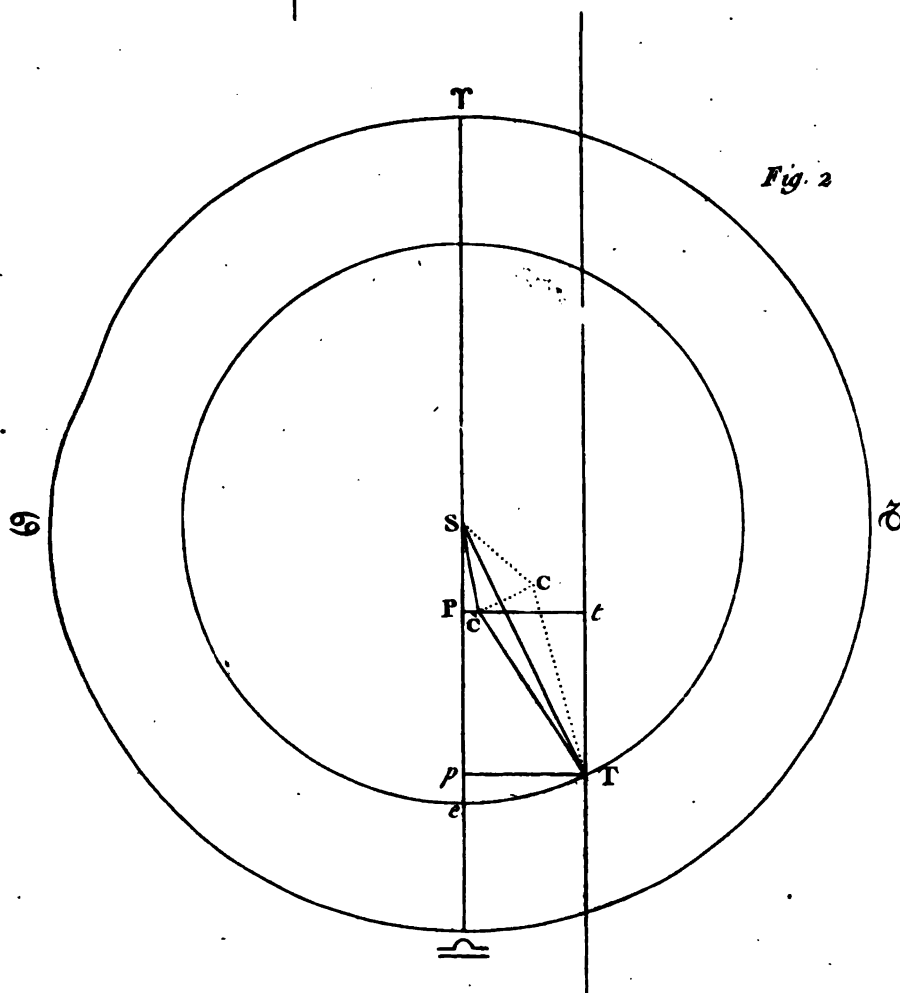
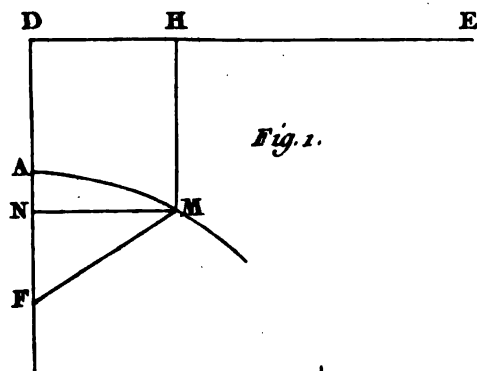
REMARQUES sur l'évaluation de la quantité F ; sur la méthode du §. 36 ; & sur les équations (1) & (1) des §§. 24, 25 ; (2) & (4) des §§. 18 & 93.

(147.) Je terminerai cette analyse en faisant remarquer que dans le §. 134, nous n'avons donné à la quantité F que la moitié de sa valeur ; je m'empresse de rectifier cette erreur *,

J'observerai aussi que la méthode du §. 36 étant fondée sur des propriétés de la parabole, ne doit être employée qu'autant que l'on suppose que la trajectoire de la Comète est parabolique. J'observerai enfin, que l'équation (1) du §. 24, suppose uniquement que la Comète se meut dans un même plan. L'équation (1) du §. 25, suppose de plus, que la force centrale est en raison inverse du quarré des distances ; les équations (2) & (4) des §§. 18 & 93, particularisent la section conique.

* Si l'on suppose $\log. r = 10,0000000$, l'on a $\log. \frac{1}{2} Fr^2 = 19,8534094$.





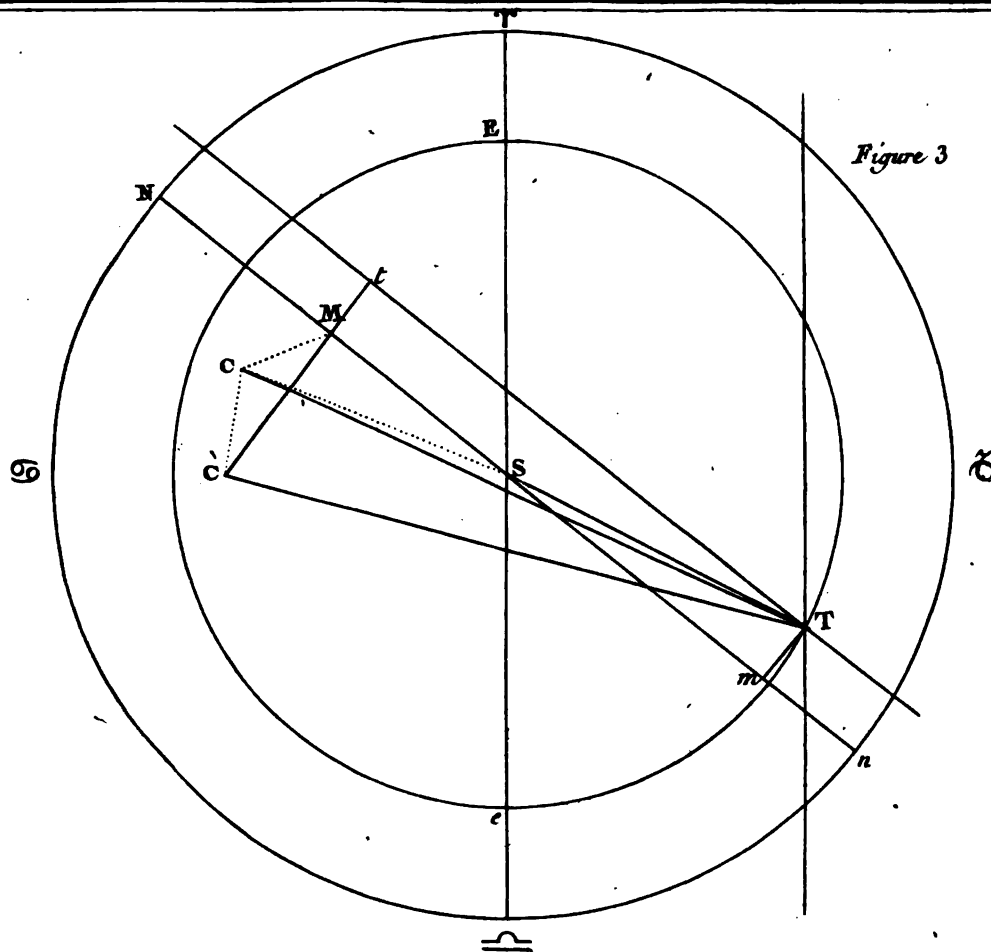


Figure 3

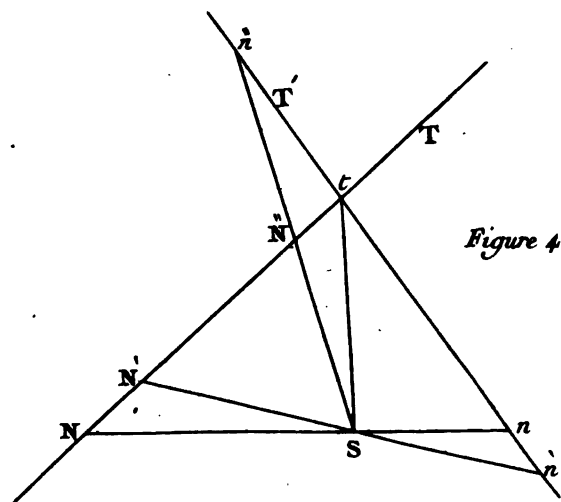
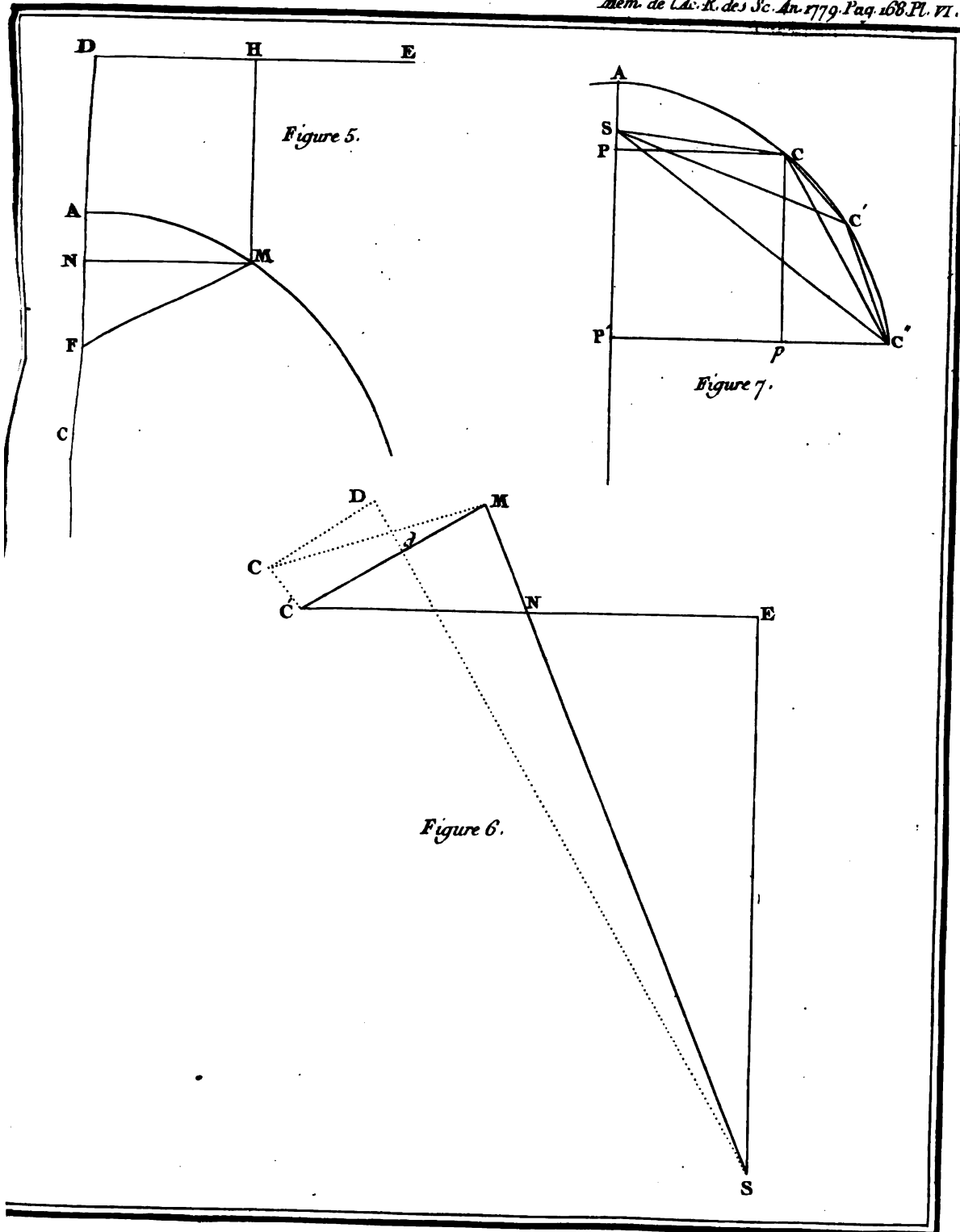


Figure 4.



O B S E R V A T I O N
DE L'ÉCLIPSE DE LUNE,
Faite à l'Observatoire de la Marine, la nuit du 29
au 30 Mai 1779.

Par M. MESSIER.

LE Ciel fut couvert pendant la journée du 29 Mai; vers les 8 heures du soir, il tomba une petite pluie d'orage; vers les 9 heures, le ciel s'éclaircit, & toute la nuit du 29 au 30 le ciel fut serein. Le 29, vers les 10 heures du soir, je comparai la Lune à l'étoile ω d'*Ophiucus*, cinquième grandeur; j'en rapporterai les observations faites à ma lunette achromatique, garnie d'un micromètre à fils.

Lû
le 2 Juin
1779.

J'ai employé la même lunette pour l'observation de l'Éclipse de Lune: le commencement de l'Éclipse, suivant le Livre de la *Connoissance des Temps*, devoit avoir lieu le 30 Mai à 3^h 15' du matin; son immersion à 4^h 25'; la Lune alors devoit être couchée: de manière que je n'ai pu observer que le commencement de l'Éclipse, l'entrée des premières taches dans l'ombre & la distance des cornes de l'ombre. L'ombre sur la Lune se distinguoit très-bien d'avec la pénombre; le ciel étoit beau & la Lune bien terminée: voici mes observations.

La Lune comparée à l'étoile ω d'*Ophiucus*, la Pendule réglée sur les fixes, & le fil du micromètre suivant le parallèle de l'Étoile.

170 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

| ANNÉE 1779. | PASSAGES à la PENDULE. | TEMPS vrai des PASSAGES | DIFFÉR de HAUT. | |
|----------------|------------------------------|-------------------------------|-----------------------|---|
| | H. M. S. | H. M. S. | M. S. | |
| Mai 29 | 14. 22. 20 | 9. 57. 2 $\frac{1}{2}$ | | } 1. ^{re} & 2. ^e bord de la Lune au fil horaire, ω d'Ophiucus, supérieur au bord supér. de la Lune. |
| | 14. 24. 32 $\frac{1}{2}$ | 9. 59. 14 $\frac{1}{2}$ | | |
| | 14. 28. 51 | | 10. 15 $\frac{1}{2}$ | |
| | 14. 32. 48 $\frac{1}{2}$ | 10. 7. 29 $\frac{1}{2}$ | | } 1. ^{re} & 2. ^e bord de la Lune au fil horaire, ω d'Ophiucus, supérieur au bord supér. de la Lune. |
| | 14. 35. 2 | 10. 9. 42 | | |
| | 14. 39. 4 $\frac{1}{2}$ | | 12. 3 $\frac{1}{2}$ | |

A 15^h 1', Temps vrai, diamètre de la Lune, mesuré suivant son parallèle, & trouvé de 29' 43" $\frac{1}{2}$.

OBSERVATIONS de l'Eclipsé.

| ANNÉE 1779. | TEMPS vrai. | |
|----------------|----------------|--|
| | H. M. S. | |
| Mai 29 | 15. 2. 52 | la pénombre commence à être sensible au bord de la Lune. |
| | 15. 9. 21 | la pénombre augmentée. |
| | 15. 10. 51 | commencement de l'Eclipsé ou de l'ombre entre Grimaldus & Schikardus; 22 minutes du bord supérieur de la Lune, mesuré au micromètre, suivant le mouvement horaire des Étoiles. |
| | 15. 15. 20 | l'ombre à Grimaldus. |
| | 15. 16. 20 | Grimaldus à moitié dans l'ombre. |
| | 15. 16. 20 | l'ombre à Schikardus. |
| | 15. 18. 25 | l'ombre touche Mare humorum. |
| | 15. 20. 19 | Mare humorum à moitié dans l'ombre. |
| | 15. 22. 34 | l'ombre couvre Mare humorum. |
| | 15. 24. 19 | l'ombre à Capuanus. |

| ANNÉE | TEMPS | | | |
|--------|-------|-----|----|--|
| 1779. | vrai. | | | |
| | H. | M. | S. | |
| Mai 29 | 15. | 27. | 3 | l'ombre à <i>Keplerus</i> . |
| | 15. | 28. | 48 | <i>Keplerus</i> à moitié dans l'ombre. |
| | 15. | 29. | 57 | l'ombre à <i>Tycho</i> . |
| | 15. | 30. | 48 | <i>Tycho</i> à moitié dans l'ombre. |
| | 15. | 30. | 58 | <i>Keplerus</i> dans l'ombre. |
| | 15. | 31. | 37 | <i>Tycho</i> dans l'ombre. |
| | 15. | 32. | 37 | l'ombre à <i>Aristarchus</i> . |
| | 15. | 35. | 1 | l'ombre au bord de <i>Copernicus</i> . |
| | 15. | 36. | 22 | le dernier bord de la Lune cesse de paroître derrière des cheminées pour ne plus être visible. |

Distance des Cornes en parties de degré.

| TEMPS | DISTANC. |
|------------|----------|
| vrai. | des |
| | CORNES. |
| H. M. S. | M. S. |
| 15. 18. 0 | 14. 0 |
| 15. 20. 54 | 17. 2 |
| 15. 27. 3 | 22. 0 |



O B S E R V A T I O N S
D E L'ÉCLIPSE DE SOLEIL,
D U 14 J U I N 1779,

Observée à Paris , de l'Observatoire de la Marine.

Par M. M E S S I E R.

La
le 16 Juin 1779. **L'**ÉCLIPSE de Soleil du 14 Juin, devoit avoir lieu, suivant le Calcul de M. Jaurat, présenté à l'Académie dans la Séance du 12; le commencement à Paris, à $7^h 29' 13''$ du matin; son milieu, à $8^h 5'$; la fin, à $8^h 43' 54''$; & la grandeur, de $6' 23''$ de degré.

Le 12 Juin, j'avois réglé ma pendule, & je connoissois parfaitement sa marche, par vingt-une hauteurs correspondantes du bord supérieur du Soleil, qui s'accordoient toutes à la même seconde, & par les midis observés à mon instrument des passages.

Le 14 au matin, le ciel ne donnoit aucune espérance de faire l'observation, il étoit entièrement couvert, & les nuages venoient du Midi, de manière que le commencement n'a pas été observé. Vers les $7^h 50'$, le ciel s'étoit un peu éclairci, & le Soleil paroissoit foiblement à travers des nuages rares; l'Éclipse alors étoit déjà très-sensible. A $7^h 53' 18''$ de temps vrai, je commençai mes observations en y employant une lunette achromatique de 3 pieds $\frac{1}{2}$, à triple objectifs, montée sur une machine parallaxique, & garnie d'un micromètre à fils qui s'inclinoit dans tous les sens, qui a servi à mesurer la partie restante éclairée du Soleil, & cette observation m'a donné la grandeur de l'Éclipse en minutes & en secondes de degrés, d'après le diamètre du Soleil, que j'avois mesuré en partie du micromètre; ces observations sont au nombre de treize: les voici en Table.

| T E M P S V R A I. | PARTIE éclairée du SOLEIL, en minutes & secondes de degré. | PARTIE éclipsée du SOLEIL, en minutes & secondes de degré. |
|-----------------------|---|---|
| H. M. S. | M. S. | M. S. |
| 7. 53. 18 | 26. 5 | 5. 28 |
| 7. 58. 32 | 25. 40 | 5. 53 |
| 8. 1. 17 | 25. 5 | 6. 28 |
| 8. 5. 10 | 25. 4 | 6. 29 |
| 8. 6. 49 | 25. 3 | 6. 30 |
| 8. 12. 49 | 25. 20 | 6. 13 |
| 8. 14. 5 | 25. 34 | 5. 59 |
| 8. 35. 7 | 29. 15 | 2. 18 |
| 8. 36. 5 | 29. 24 | 2. 9 |
| 8. 38. 15 | 29. 51 | 1. 42 |
| 8. 39. 14 | 30. 2 | 1. 31 |
| 8. 40. 47 | 30. 34 | 0. 59 |
| 8. 41. 28 | 31. 5 | 0. 28 |

Pour l'observation de la fin de l'Éclipse, le ciel étoit devenu parfaitement beau & sans nuages, aux environs du Soleil, de manière que l'observation a été faite avec précision & à la seconde.

Fin de l'Éclipse à $8^h 44' 8'' \frac{1}{2}$ de temps vrai.

L'Éclipse a fini à $8' 24''$ du bord supérieur du Soleil, suivant son mouvement en ascension droite.

A $8^h 48' 18''$ de temps vrai, je mesurai le diamètre du Soleil, suivant son mouvement en ascension droite, que je trouvai de dix-huit cents quatre-vingt-deux parties du micromètre, qui répondent à $31' 33''$.

174 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Vers le milieu de l'Éclipse, je vis au bord de la Lune des inégalités sensibles, comme je l'avois déjà remarqué dans l'Éclipse de Soleil du 4 Juin 1769 (a), & comme M. le Duc de Croy l'avoit aussi observé à Calais, dans celle du 16 Août 1765 (b).

M. l'Abbé Clouet, qui observoit à l'hôtel de M. le Duc de Croy, rue du Regard, avec un télescope Grégorien de 4 pieds de foyer, a marqué la fin de l'Éclipse à $8^h 44' 0''$, à une montre à secondes, qui fut comparée peu de minutes après l'observation, sur la pendule de mon Observatoire.

L'hôtel de M. le Duc de Croy est $2'' 2$ à l'occident du Méridien de l'Observatoire royal.

Rue de l'Université, 2 secondes à l'occident de la Méridienne de l'Observatoire, M. le Président de Saron, avec une lunette achromatique, semblable à la mienne, a observé la fin de l'Éclipse à $8^h 44' 2''$.

M. du Séjour, au même endroit, avec un télescope Grégorien, d'un pied, à $8. 44. 5$.

Ils virent, de même que moi, de petites éminences à la Lune.

(a) Mémoires de l'Académie, année 1771, page 12, planche I."

(b) Mémoires de l'Académie, année 1765, page 554, planche XVII.



O B S E R V A T I O N DE L'ÉCLIPSE TOTALE DE LUNE,

LE 23 NOVEMBRE AU SOIR 1779.

Faite à Paris, à l'Observatoire de la Marine.

Par M. MESSIER.

LE jour de l'Observation, le Ciel ne donnoit aucune espérance de voir l'Éclipse : pendant la matinée, il étoit tombé de la neige & de la pluie; l'après-midi le ciel fut totalement & également couvert jusque vers les 9 heures, que les nuages se séparèrent : la Lune parut de temps à autre couverte de nuages rares, en grande partie éclipsee, & il ne fut pas possible d'observer la sortie des taches de l'ombre.

Lû
le 27 Nov.
1779.

Dans les intervalles que laissoient les nuages pour apercevoir la Lune, je mesurai la partie éclairée, par le moyen d'un micromètre à fils, adapté à une lunette achromatique de 3 pieds $\frac{1}{2}$, à triple objectifs.

Les observations que je vais rapporter sont un peu douteuses, à cause des nuages qui ne laissoient que soupçonner les limites de l'ombre.

| TEMPS vrai. | | | PARTIE éclairée. | | PARTIE éclipsee. | |
|----------------|-----|----|---------------------|----|---------------------|----|
| H. | M. | S. | M. | S. | M. | S. |
| 9. | 12. | 53 | 8. | 18 | 24. | 36 |
| 9. | 22. | 52 | 13. | 10 | 19. | 44 |
| 9. | 32. | 50 | 16. | 14 | 16. | 40 |
| 9. | 34. | 50 | 18. | 10 | 14. | 44 |

Après cette dernière observation, la Lune fut couverte; mais quelques minutes avant la fin de l'Éclipse, les nuages

176 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
s'éclaircirent, & la Lune devint claire, cependant toujours
couverte de nuages rages.

Temps vrai.

- λ 9^h 55' 36", j'estimai la fin de l'Éclipse.
9. 55. 56, fin plus certaine ; la Lune étoit assez claire pour
juger de la fin ; l'Éclipse finit entre *Mare crispum*
& *Mare fecunditatis*.
10. 3. 14, la Lune devenue encore plus claire ; la pénombre
étoit sensible.
10. 6. 14, il restoit encore un peu de pénombre.
10. 11. 14, on voyoit encore un soupçon de pénombre à la lunette ;
à la vue simple, elle paroissoit encore sensible.

Après l'Éclipse, je mesurai le diamètre apparent de la
Lune, en parties du micromètre qui étoit adapté à ma
lunette, les nuages rares qui affoiblissoient la lumière peu-
vent bien rendre ces mesures douteuses.

| T E M P S | | | D I A M È T. | | |
|-----------|-----|----|--------------|------------------|--|
| vrai. | | | | | |
| H. | M. | S. | M. | S. | |
| 9. | 59. | 45 | 32. | 51 $\frac{1}{2}$ | mesuré suivant le cercle de déclinaison. |
| 10. | 1. | 15 | 33. | 4 | diamètre horizontal. |
| 10. | 5. | 15 | 32. | 49 $\frac{1}{2}$ | suivant le cercle de déclinaison. |

Après 11 heures du soir, le ciel devint en grande partie
serein, & continua de l'être jusqu'après le passage de la
Lune au Méridien que j'observai.

Le 1.^{er} bord de la C passa au Mér. à 12^h 8' 2" 16^m $\frac{1}{2}$ } Temps vrai.
Le 2.^e bord à 12. 10. 26. 43 $\frac{1}{2}$ }

Après son passage au Méridien, je comparai la Lune à
deux Étoiles qui en étoient près, & qui paroissoient en
même temps que la Lune dans le même champ de la lunette
achromatique :

achromatique: ces deux Étoiles furent estimées de la cinquième à la sixième grandeur, & comparées aux étoiles α' & ν' du Taureau, l'une & l'autre de cinquième grandeur. Voici la position qui est résultée pour les deux Étoiles comparées à la Lune, pour le temps de l'observation.

N.^o 1.... $61^{\text{d}} 20' 4''$ d'ascens. droite, & $21^{\text{d}} 1' 51''$ de décl. bor.

N.^o 2.... $61. 38. 47.$ $21. 13. 46.$

OBSERVATION de la Lune avec les deux Étoiles n.^{os} 1 & 2.

| <i>La nuit du 23 au 24 Novembre 1779.</i> | TEMPS | DIFFÉR. | DIFFÉR. |
|---|--------------------------|---------------------|---------------------|
| | vrai. | de | de |
| | H. M. S. | PASSAGE. | HAUTEUR. |
| | | M. S. | M. S. |
| Étoile n. ^o 1 au fil horaire du micromètre... | 12. 30. 29 $\frac{3}{4}$ | 1. 16 | |
| Passage du premier bord de la Lune..... | 12. 31. 45 $\frac{3}{4}$ | | |
| Passage du second bord de la Lune..... | 12. 34. 10 $\frac{3}{4}$ | | |
| Différence de hauteur; l'Étoile supérieure au bord supérieur de la Lune..... | | 4 .. | 3. 47 $\frac{1}{2}$ |
| Étoile n. ^o 2 au fil horaire..... | 12. 31. 41 $\frac{3}{4}$ | 0. 4 | |
| Passage du premier bord de la Lune..... | 12. 31. 45 $\frac{3}{4}$ | | |
| Différence de hauteur; l'Étoile supérieure au bord supérieur de la Lune..... | | | 15. 43 |
| Étoile n. ^o 1 au fil horaire..... | 12. 41. 56 $\frac{3}{4}$ | 1. 38 | |
| Passage du premier bord de la Lune..... | 12. 43. 34 $\frac{1}{4}$ | | |
| Passage du second bord..... | 12. 45. 58 $\frac{3}{4}$ | | |
| Différence de hauteur; l'Étoile supérieure au bord supérieur de la Lune..... | | | 1. 58 |
| Étoile n. ^o 2 au fil horaire..... | 12. 43. 8 $\frac{1}{4}$ | 0. 26 $\frac{1}{2}$ | |
| Passage du premier bord de la Lune..... | 12. 43. 34 $\frac{3}{4}$ | | |
| Différence de hauteur; l'Étoile supérieure au bord supérieur de la Lune..... | | | 13. 54 |



PREMIER MÉMOIRE
SUR LA VOIX.

*De la structure des Organes qui servent à la formation
de la Voix, considérés dans l'Homme & dans les
différentes classes d'Animaux, & comparés entr'eux.*

Par M. V I C Q - D' A Z Y R.

Lû à
l'Assemblée
publique
de la
Saint-Martin
1779.

UN des usages les plus importans du poumon, est sans doute de diriger l'air, que ses lobes ont reçu, vers les organes propres à la formation de la voix ; ainsi en même temps que le poumon établit une communication nécessaire entre le fluide dans lequel nous sommes plongés & les humeurs dont nos vaisseaux sont remplis, l'organe de la voix qui est une dépendance de ce viscère, en imprimant à l'air un mouvement vibratil, porte au loin l'expression des idées, donne aux passions plus d'énergie, en leur fournissant un langage sans lequel la Nature muette seroit vouée à un éternel silence, & établit entre les animaux une correspondance aussi prompte que commode, pour se communiquer leurs besoins.

Mais comment l'air reçoit-il des modifications capables de produire ces merveilles ? quel est cet instrument dont l'Art n'a point encore imité les effets ? enfin comment la voix se forme-t-elle ?

Le premier Anatomiste qui ait traité ce sujet d'une manière satisfaisante, a été Galien : il a attribué les intonations de la voix humaine aux changemens dont la glotte est susceptible. Fabrice d'Aquapendente ayant observé que la trachée-artère s'allonge & se raccourcit lorsque le larynx s'élève ou s'abaisse, crut apercevoir beaucoup d'analogie entre ce conduit & une flûte.

Perrault ajouta bien-tôt de nouveaux développemens à l'explication de Galien, & M. Dodart l'appuya par de

nouvelles probabilités, il réfuta sur-tout la comparaison établie par Fabrice entre la trachée-artère & une flûte, & il démontra que le son étant, toutes choses égales d'ailleurs, d'autant plus grave que le corps de la flûte est plus long, & la trachée s'allongeant au contraire dans la formation des sons aigus, il ne peut y avoir aucune ressemblance entre ces deux instrumens.

Jusqu'à cette époque on avoit ignoré la véritable théorie du son dans les instrumens à vent; un Géomètre célèbre, M. Euler, en découvrit les élémens, en considérant la colonne d'air que ces instrumens contiennent comme une corde vibrante, & en lui appliquant les mêmes formules qui conviennent aux cordes ordinaires; il prouva que parmi les différens instrumens de Musique, les uns mettent l'air en mouvement par leurs vibrations, tandis que dans les autres l'air devient sonore par lui-même; enfin il fit voir que l'ouverture par laquelle on introduit l'air dans les flûtes & dans les flageolets, n'influe pas sur l'intonation; découvertes importantes qui devoient changer les idées des Physiciens sur la formation de la voix.

M. Ferrein sut profiter de ces observations; il commença par faire connoître l'erreur sur laquelle le système de M. Dodart étoit fondé, en démontrant qu'il est possible de produire des sons artificiels avec le larynx, sans que la glotte y ait aucune part, & même après l'avoir enlevée; il attribua tout le mécanisme de la voix à la tension plus ou moins grande des ligamens, qu'il appela *cordes vocales*, & il rangea cet organe parmi les instrumens à cordes, l'air faisant, suivant lui, les fonctions d'archet.

Cette nouvelle théorie eut d'abord plus de critiques que de sectateurs; on ne doit point en être surpris: elle détruisoit une explication donnée & reçue avec la même confiance depuis Galien. Les expériences de M. Ferrein, répétées par plusieurs Anatomistes, furent confirmées par les uns & rejetées par les autres, & maintenant encore cette question est au nombre de celles qui ont besoin d'une nouvelle suite de

travaux pour fixer le jugement des Physiciens : ces considérations m'ont engagé à faire des recherches sur l'organe de la voix. J'ai pensé que je ne pourrois parvenir à connoître quelles sont les parties essentielles ou accessoire à la formation des sons, qu'en considérant ces parties dans les différentes classes d'animaux qui en sont pourvus. Il est de mon devoir de publier qu'il m'auroit été impossible d'exécuter ce projet, si M. Daubenton ne m'en eût fourni les moyens, en me donnant des facilités pour examiner l'organe de la voix dans un grand nombre de quadrupèdes & de reptiles qui font partie de la superbe collection du Cabinet du Roi, si enrichie & devenue si intéressante par les soins de M. de Buffon.

C'est un beau spectacle que de voir d'un coup-d'œil la disposition de ces instrumens variés, à l'infini, avec lesquels chaque animal produit des modulations qui lui sont propres & peut contribuer au grand concert de la Nature. Depuis l'homme jusqu'au reptile, dans lequel la voix semble expirer pour se changer en un sifflement, la chaîne est immense : en la parcourant, je me suis arrêté sur les anneaux les plus remarquables. J'ai choisi, autant qu'il m'a été possible, les individus les plus éloignés les uns des autres, & je les ai toujours comparés avec l'homme.

Après avoir rappelé la forme du larynx humain, je considérerai cette partie dans les différentes classes de quadrupèdes, dans les oiseaux, & dans les reptiles ; & après avoir décrit, dans ce premier Mémoire, les organes de la voix des différens animaux, je ferai connoître dans le second, les expériences & les recherches propres à en indiquer le mécanisme.

Le larynx, dans l'homme, est une cavité disposée en manière de grotte, dans laquelle on sait que la voix se forme ; elle est composée de cinq cartilages, rendus mobiles les uns sur les autres par différens muscles ; on y remarque deux rétrécissemens ; l'un est placé à la partie supérieure ; on lui a donné le nom de *glotte* : deux membranes minces en composent les bords & un cartilage élastique, situé anté-

rieurement, & appelé l'*épiglotte*, empêche les corps étrangers d'y pénétrer, soit en divitant la colonne du liquide que l'on boit, soit en s'abaissant sur la glotte lorsque les alimens se portent vers l'œsophage. Le second rétrécissement est formé par deux ligamens, disposés parallèlement de devant en arrière, & que M. Ferrein a appelés du nom de *cordes vocales*: une excavation est pratiquée de chaque côté entre ces deux ouvertures.

Parmi les quadrupèdes, il n'y en a peut-être aucun qui n'ait dans le larynx à peu-près le même appareil, & il y en a beaucoup dans lesquels la dissection fait apercevoir des pièces surajoutées à celles dont le larynx humain est pourvu; de sorte que, si la plupart de ces animaux, avec beaucoup de moyens, ne produisent que des sons désagréables, la prééminence de la voix de l'homme ne doit pas être regardée seulement comme l'effet physique de sa constitution, mais encore comme le fruit de son industrie, & du besoin qu'il a de modifier ses sons pour exprimer un plus grand nombre d'idées.

Les singes étant ceux de tous les animaux qui ont, par leur structure, le plus de rapports avec l'homme, j'ai cru devoir les placer dans cette exposition, immédiatement après lui. Singes.

On cherche depuis long-temps à déterminer l'espèce de singe que Galien a disséqué: M. Camper croit avoir trouvé dans la structure du larynx, telle que Galien l'a décrite (a), un moyen assuré de reconnoître ce singe: on lit dans le *Traité De usu partium*, qu'il y a de chaque côté de l'épiglotte de cet animal, un conduit que l'on doit plutôt regarder comme une fissure que comme un trou, lequel communique avec un ventricule assez ample, placé aussi de chaque côté: M. Camper ayant rencontré cette même disposition dans le l'orang-outang, auquel elle est particulière, nous paroît fondé à croire que ce singe est celui dont Galien a fait mention. (b): trois orang-outangs, examinés avec soin par

(a) *De usu partium*, edit. Charter. tom. IV, lib. VII, cap. 11, p. 461.

(b) *Transactions philosophiques*, Of the royal Societe, of London, 1779, Part. I, pag. 142 & suiv.

M. Camper, lui ont toujours offert deux conduits placés au-dessous de l'os hyoïde à la partie supérieure du cartilage thyroïde, communiquans avec deux sacs qu'il a appelés du nom de *ventricules*, lesquels étoient placés sur les côtés du cou; & qui descendoient même jusqu'à la poitrine; dans un de ces singes, ils étoient inégaux en grandeur (*c*); dans les deux autres, ils étoient presque égaux, mais ils se réunissoient pour ne former qu'une seule cavité; dans le troisième (*d*) enfin, les conduits de communication ont paru à M. Camper, ainsi qu'à Galien, étroits & figurés comme une fissure; il les a représentés de cette manière dans la *figure 2, lettre y*.

Tyson, qui a disséqué l'orang-outang d'Angola, n'a point parlé de la conformation observée par Galien dans ceux d'Asie, & par M. Camper dans ceux de Borneo.

Le larynx des pithèques & des papions, est très-différent de celui des orang-outangs; au lieu de deux sacs, on n'en trouve qu'un seul placé au-dessous de l'épiglotte: M. Camper en a donné la figure dans le Mémoire que nous avons déjà cité.

J'ai fait la même observation dans un mandrill mâle, d'une très-grande taille, que j'ai eu occasion de disséquer cet hiver. Cette espèce de singe est remarquable par la forme de ses joues, qui sont sillonnées & colorées d'un très-beau bleu; la langue de cet animal est très-longue & très-épaisse; sa tête est très-prolongée; il semble au premier aspect qu'il y ait deux glandes thyroïdes: en recherchant avec soin, on s'aperçoit qu'un prolongement mince & horizontal en réunit les deux lobes. Les cartilages du larynx n'ont rien de particulier; au-dessous de l'épiglotte se trouve une cavité, laquelle se termine par un conduit qui s'ouvre dans une poche assez étendue, & que l'on peut facilement gonfler d'air; étant distendue, elle présente un ovale irrégulier, rétréci dans quelques-uns de ses points. Les branches de l'os hyoïde sont

(c) Voyez *figure 2*, dans les *Transactions philosophiques*, 1779, Part. I.

(d) *Ibidem*, *figure 6*.

disposées comme celles de l'homme; mais le corps de cet os est épais & se recourbe au-dessus du conduit qui mène au sac, & qu'il recouvre, comme on peut le voir en *a* dans les figures 1, 2 & 3; lorsque l'animal crioit un peu fort, ou lorsqu'il se mettoit en colère, on voyoit le sac dont j'ai donné la description, se remplir & se vider alternativement.

La dissection du mangabey & de la mone, qui sont aussi des singes de l'ancien continent, m'a offert une structure à peu-près semblable; le corps de l'os hyoïde est également recourbé; au-dessous de l'épiglotte est une cavité demi-circulaire, qui mène à une excavation dont le principe se trouve vers le haut du cartilage thyroïde & sous le corps de l'os hyoïde; elle est formée par une membrane mince & qui paroît se diriger latéralement; la glotte est d'ailleurs membraneuse & très-mobile; les ligamens inférieurs appelés *cordes vocales*, sont très-bien exprimés; ils sont aplatis & comme tranchans dans le mangabey; les ventricules (*e*) y sont très-marqués, & les cartilages ne diffèrent presque en rien de ceux de l'homme. Voyez pour le mangabey, les figures 4, 5 & 6; & pour la mone, les figures 7 & 8.

J'ai trouvé de grandes variétés dans le larynx des singes du nouveau continent. Le sajou gris offre vers la partie extérieure du cou une poche membraneuse, mais le trou qui y conduit est fort étroit; l'os hyoïde est également prolongé dans le saï: outre cette différence, l'épiglotte de ce dernier n'est point percée à sa base; il n'y a point de conduit ni de poche, comme dans ceux dont je viens de parler; les ventricules sont très-marqués, & les cordes vocales sont minces & comme tranchantes dans ces deux singes, sur-tout dans le saï: je conserve tous ces larynx. On peut voir, en comparant les figures que j'ai fait dessiner, quelles sont les proportions des autres parties qui les composent, & sur l'exposition desquelles

(*e*) J'appelle ainsi non les sacs externes, mais les cavités situées entre la glotte & les cordes vocales, comme la plupart des Anatomistes.

je n'ai pas cru devoir insister. On consultera pour le sajou gris; les figures 8 & 9, & pour le saï, les figures 10 & 11.

L'alouate & l'ouarine sont aussi deux animaux du nouveau continent, que M.^{rs} de Buffon & Daubenton (*f*) ont rangés dans la famille des sapajous, parce qu'ils ont la queue *pre-nante*; leur voix étant très-forte, ils ont reçu le nom de *hurleurs*; le poil du premier est très-foncé; celui du second est d'un brun-noir.

Ces deux animaux, que l'on trouve principalement à Cayenne, ont fixé depuis long-temps l'attention des Voyageurs, par l'intensité des sons qu'ils produisent. Barrère (*g*) l'a attribuée à la conformation de l'os hyoïde, d'autres ont parlé d'un cornet placé dans l'intérieur de leur gosier (*h*). M. le Comte de Buffon (*i*) a fait mention d'une espèce de tambour, dans la concavité duquel leur voix grossit & forme des hurlemens par écho: il ajoute qu'il a observé dans un embryon d'alouate l'organe de la voix déjà très-formé. Enfin M. Daubenton, dans la description qu'il fait de cette espèce de sapajou, après avoir remarqué que le nœud de la gorge est ordinairement très-renflé dans ces animaux, dit qu'ayant ouvert cette tubérosité, il a reconnu qu'elle étoit creuse & concave.

On conserve dans plusieurs Cabinets cette poche isolée, sous le nom de *larynx* ou de *gosier du singe rouge de Cayenne*. Il paroît cependant qu'elle étoit encore rare il y a deux ans en Hollande, puisque le célèbre M. Camper, qui étoit alors à Paris, en vit avec étonnement deux dans mon Cabinet. Je le priai d'en accepter une; depuis ce temps, il m'a écrit qu'il a fait des recherches sur cet organe, sans me rien dire de plus: j'en ai fait de mon côté que j'ai consignées dans ce Mémoire.

(*f*) Histoire Naturelle, tome XV, pages 5 & suiv.

(*g*) Essai de l'Histoire naturelle de l'Afrique.

(*h*) Voyage de Binet.

(*i*) Histoire Naturelle, tome XV, page 71

J'ai reçu de Cayenne (*k*) un gosier d'alouate en très-bon état, avec la langue, le pharynx, une partie de l'œsophage, tout le larynx & la poche même que l'on connoît depuis quelque temps, mais dont la position, les connexions & les rapports sont absolument ignorés.

Nous considérerons d'abord la poche même, indépendamment de ses adhérences; nous examinerons ensuite le larynx de l'alouate à l'extérieur, & nous finirons en décrivant ce qu'une coupe longitudinale nous a offert de plus remarquable. Pour faciliter l'intelligence de mes descriptions, j'ai fait dessiner cet organe sous différens aspects & en grandeur naturelle. Voyez les figures 12, 13, 14 & 15.

La poche osseuse est irrégulièrement pyramidale; sa pointe est mouffe & arrondie; sa face supérieure présente deux légères dépressions sur les côtés, avec quelques sillons vasculaires & un espace droit, alongé & situé horizontalement dans le milieu: la face inférieure est moins égale que la première; elle forme une convexité assez considérable, & on y remarque un grand nombre de pores dont elle est criblée; la face postérieure est percée par une ouverture assez ample, arrondie en bas & terminée supérieurement par un segment osseux, échancré des deux côtés: au-dessus de cette ouverture est une plaque osseuse, aux deux extrémités de laquelle sont deux petites facettes dont l'usage sera indiqué plus bas.

L'orifice, qui est plus étroit que le fond, conduit à la cavité de la poche; elle ressemble à ce qu'on appelle en général du nom de *sinus* en Anatomie; quelques lames minces & étroites s'élèvent de ses parois; elle est placée entre les deux branches de la mâchoire inférieure, de manière que sa pointe est située en devant, son échancrure en arrière, & sa grande face arrondie en bas. J'en conserve quelques-unes qui sont plus étroites & plus alongées que celles dont j'ai fait faire le dessin.

(*k*) M. Maloet, Intendant de Cayenne, l'a envoyé à M. Mauduit, qui a bien voulu me le remettre.

Le larynx de l'alouate, considéré avec ses annexes & à l'extérieur, présente les objets suivans.

La langue est longue & étroite : ayant fait au pharynx une ouverture ovale, nous avons aperçu la glotte dont l'étendue est considérable, dont les lèvres sont saillantes, & qui est surmontée antérieurement par une épiglote large, & qu'un frein retient, ainsi que dans l'homme & dans les quadrupèdes.

Le chaton postérieur du cricoïde est très-élevé; la portion antérieure de ce cartilage n'a rien de particulier, non plus que la trachée-artère; le cartilage thyroïde est beaucoup plus grand qu'il ne l'est ordinairement dans les quadrupèdes de cette taille; la saillie qu'il fait est très-marquée; en arrière, il se recourbe; ses deux faces latérales sont fort étendues & un peu excavées.

Nous décrirons sur-tout avec attention, 1.^o deux ligamens placés en dessus; 2.^o un conduit qui communique avec la poche osseuse.

Le cartilage thyroïde est surmonté dans l'alouate, comme dans les autres quadrupèdes, par deux cornes, auxquelles s'insèrent deux ligamens qui, en se plaçant des deux côtés du pharynx & de la base de la langue, & en se portant de haut en bas & de devant en arrière, aboutissent aux deux petites facettes que nous avons décrites vers le haut & sur les côtés de la région postérieure de la poche; ils sont plus étroits dans leur milieu qu'à leurs extrémités; ils paroissent être destinés à soutenir cette cavité, & à assurer ses rapports avec le larynx.

Entre la poche osseuse & le cartilage thyroïde, on trouve un conduit assez considérable, de forme ronde, plus large dans ses extrémités que dans son milieu, d'un tissu membraneux, ferré, & qui s'insère en devant autour de l'orifice de la poche, & en arrière entre les deux ailes du cartilage thyroïde, de sorte qu'il semble que ce soit une seconde trachée-artère qui mène à une cavité analogue aux sinus de la glotte.

Après avoir considéré & décrit le larynx de l'alouate à

l'extérieur, nous l'avons divisé suivant sa longueur, pour l'observer intérieurement; nous avons principalement remarqué ce qui suit:

1.^o Une excavation placée au-devant du cartilage thyroïde, & qui en est séparée par un cordon semblable aux ligamens inférieurs de la glotte, appelés *cordes vocales*.

2.^o La jonction du conduit horizontal avec le larynx & avec la poche osseuse; après s'être élargi, il s'attache des deux côtés du cartilage thyroïde, auprès duquel il forme en arrière un arrondissement, que la saillie de ce cartilage divise intérieurement en deux rigoles; ces dernières percent le larynx précisément dans le lieu où deux excavations situées devant le cartilage cricoïde, répondent aux sinus de la glotte, de sorte que ces deux rigoles paroissent en être la continuation.

Nous croyons donc être fondés à regarder le conduit horizontal & la poche osseuse comme une extension des ventricules de la glotte, qui doit beaucoup ajouter à l'intensité de la voix; car outre que la cavité propre du larynx est très-grande dans l'alouate, l'air introduit dans les ventricules est nécessairement divisé en deux colonnes pour entrer dans le conduit horizontal; elles se réunissent ensuite dans toute l'étendue de ce conduit; l'air s'engouffre dans la poche que nous avons décrite, & dont les lames minces & osseuses sont très-élastiques; de-là il est répercuté vers le larynx: la saillie du cartilage thyroïde, placée intérieurement dans une des extrémités du conduit horizontal, & les ligamens de la glotte fortement ébranlés par ce fluide, doivent produire une grande réaction.

La disposition du larynx dans l'alouate est donc très-propre à produire un bruit considérable, & tel que celui dont les Voyageurs ont parlé.

Il suit de ces détails, que les Naturalistes qui ont avancé que le larynx du singe ne différoit en rien de celui de l'homme, se sont trompés; non-seulement le gosier du singe diffère de celui de l'homme, mais encore cet organe n'est

Résultat,
relativement
aux Singes.

pas le même dans tous ces animaux : celui de l'orang-outang est remarquable en ce qu'il communique avec deux sacs placés en dehors. Dans tous les singes de l'ancien continent que l'on a disséqués, au lieu de deux sacs, on n'en a trouvé qu'un ; cette conformation paroît moins marquée dans les singes d'Amérique : il y en a parmi ces derniers, dans lesquels elle manque absolument, & dans quelques-uns, au lieu d'un sac membraneux on trouve une cavité osseuse, jointe avec le larynx par un conduit horizontal. Le cri des singes est aigu, perçant, & souvent interrompu par des sons rauques qui se succèdent en manière de battemens : l'air qui entre dans les poches de différente nature, dont le larynx de ces animaux est pourvu, paroît contribuer à ce dernier genre de sons ; en général, une cavité placée dessous & au-devant de l'épiglotte, & qui est remplie d'air, doit beaucoup nuire à la formation & aux modulations de la voix.

- Quadrupèdes. Dans les quadrupèdes digités, l'organe de la voix conserve beaucoup de ressemblance avec celui de l'homme ; les bords de la glotte sont minces ; les ligamens inférieurs, appelés *cordes vocales*, sont bien détachés ; on trouve de chaque côté un ventricule, & les anneaux de la trachée-artère sont interrompus en arrière par un espace membraneux. L'épiglotte du chien est triangulaire^a ; son extrémité est très-aiguë ; latéralement elle se continue, en formant une espèce de crochet, avec les ligamens inférieurs de la glotte ; & il y a un muscle glosso-épiglottique. Toutes les parties qui composent le larynx du chat^b sont très-mobiles, j'y ai sur-tout remarqué deux petites membranes très-minces, qui sont placées au-dessous des ligamens inférieurs de la glotte ; elles vibrent lorsqu'on introduit de l'air par la trachée-artère, & elles produisent une sorte de ronflement analogue à celui que les chats font entendre : Severinus & Blasius^c, qui ont décrit la structure anatomique du chat, n'ont rien dit de ces membranes. Deux petits corps arrondis sont situés au bas de l'épiglotte du lapin^c, qui est échancrée à sa pointe. Perrault a écrit dans ses Mémoires pour servir à l'Histoire des Animaux^d, que
- ^a Voy. fig. 16.
- ^b Voy. fig. 17.
- ^c Voy. fig. 18.
- ^d Voy. tome 1.

les anneaux de la trachée-artère du lion étoient entiers, excepté les deux ou trois premiers : la description a sans doute été faite d'après un lion très-âgé ; car, ayant disséqué une lionne mise à mort, il y a deux ans à peu-près, au Combat du Taureau, j'ai trouvé les anneaux de la trachée-artère interrompus en arrière par un espace membraneux & musculaire, à la vérité fort étroit. Dans le kerkajou (1), Kerkajou quadrupède nouveau que j'ai disséqué cet hiver, & qui est analogue au genre des fouines, le larynx n'offre rien de remarquable, si ce n'est que l'épiglotte est très-grande, très-alongée, & que la membrane qui tapisse les ventricules est formée par des fibres longitudinales, parallèles & réunies en petites bandes. L'écureuil & le renard ne m'ont rien présenté qui mérite des détails particuliers.

En passant des quadrupèdes digités à ceux qui ont le pied fourchu, on trouve des différences très-marquées. J'ai fait au Cabinet du Roi, sur le sanglier, les mêmes observations que M. Hérissant a publiées en 1753 (m), sur le cochon : le cartilage de l'épiglotte est grand & épais ; deux reliefs tiennent lieu des ligamens inférieurs ; ils sont percés par une fente qui ressemble à une petite glotte, & qui s'ouvre dans des excavations arrondies, recouvertes par un muscle, dans lesquelles l'air entre & dont il sort avec éclat. J'ajouterai que les cartilages arythénoïdes sont très-volumineux ; que la glotte est très-ouverte, & presque entièrement entourée de cartilages, & qu'au lieu de ventricules, on trouve les cavités dont on vient de parler. Le larynx du bœuf est très-large ; la glotte est béante, les bords sont renversés ; les arythénoïdes font une saillie très-considérable en devant ; les ligamens inférieurs sont à peine distincts, & au lieu des ventricules, proprement dits, on remarque une cavité qui n'est presque pas circonscrite. Dans le mouton, la disposition est la même ; la glotte est presque tout-à-fait cartilagineuse ; les ligamens

(1) Quadrupède nouveau dont aucun Auteur n'a fait mention.

(m) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1753.

inférieurs sont peu détachés des parois, & l'espace qui les sépare est fort étroit, ce qui tient à la structure des cartilages.

Le larynx des solipèdes est mieux organisé : l'épiglotte, qui a peu d'étendue, est triangulaire, & se termine en pointe comme dans le chien ; les arythénoïdes se portent en devant par un angle saillant ; ils sont antérieurement recourbés, & les ligamens inférieurs sont bien détachés & susceptibles de vibrer : à peine trouve-t-on aux extrémités de la glotte deux petites duplicatures qui peuvent être assimilées aux deux membranes triangulaires, décrites par M. Hérissant, qui, pour cette raison, avoit rangé le larynx du cheval parmi ceux qu'il appelloit *composés*. M.^{rs} Bourgelat & Vitet, qui ont décrit avec soin le larynx du cheval, n'en ont fait aucune mention. M. Hérissant a été plus exact dans les détails qu'il a donnés sur l'organe de la voix de l'âne & du mulet (*n*) ; il a fait voir qu'une cavité creusée dans le cartilage thyroïde, & recouverte par une membrane, est destinée à recevoir une certaine quantité d'air, & à lui imprimer un mouvement de vibration très-considérable. Moins de souplesse & plus de volume dans les cartilages ; moins de profondeur dans les ventricules ; moins de saillie dans les ligamens inférieurs ; moins de mobilité dans la glotte, dont les contours sont si massifs dans plusieurs individus, qu'elle est évidemment incapable de servir à la fonction de la voix ; des cavités ou des poches sur-ajoutées : telles sont les principales différences du larynx des quadrupèdes avec celui de l'homme.

Résultat,
relativement
aux
Quadrupèdes.

Phoque &
Chauve-souris,

* Voy. fig. 19
et 20.

C'est ici le lieu de parler de deux animaux qu'on a coutume de ranger, soit parmi les quadrupèdes, soit à leur suite, le phoque & la chauve-souris. L'épiglotte du phoque est plus grande* qu'il ne faut pour recouvrir l'ouverture de la glotte : cette dernière est placée immédiatement au-dessus des ligamens appelés *cordes vocales*, de sorte qu'il y a entr'eux & elle très-peu d'espace ; disposition que je n'ai vue dans aucun autre animal.

(n) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1753.

Il n'y a point d'épiglotte dans le larynx des chauve-souris; la glotte est figurée en losange alongé ou en ovale, & au-dessous de cette ouverture on remarque un élargissement assez considérable. Dans la chauve-souris de l'île de Sainte-Hélène, appelée *vampir* à nez simple^a & long, une légère saillie membraneuse semble tenir lieu d'épiglotte: dans la chauve-souris appelée *vampir* à nez composé^b, il n'y en a pas la moindre apparence; dans la première, on trouve quelques replis membraneux, qui suppléent au défaut des ligamens ou cordes vocales: je n'en ai pas trouvé dans la seconde.

^a Voy. fig. 27
b 22.

^b Voy. fig. 23
c 24.

Ainsi le phoque se rapproche, par la disposition du larynx, de la classe des quadrupèdes, & la chauve-souris de celle des oiseaux.

Résultat
pour le Phoque
& la
Chauve-souris.

Oiseaux.

Ces derniers peuvent être divisés en trois ordres, à raison des différences que l'organe de la voix présente: dans les uns, le nœud qui se remarque dans la division des bronches, est dépourvu de muscles; dans les autres, un muscle serré & aplati le recouvre: dans ces deux premiers ordres, la trachée-artère, fait un simple trajet depuis la division des bronches jusqu'à la glotte; dans le troisième ordre, elle se contourne de différentes manières, & l'organe de la voix est vraiment composé.

On a dit que les oiseaux ont un double larynx, l'un supérieur & l'autre inférieur: on s'exprimeroit d'une manière plus convenable, en disant que la glotte, dans les oiseaux, est placée au haut du cou, & que le reste de l'organe de la voix, qui tient lieu des ventricules & des ligamens inférieurs, est situé en bas & à la division des bronches. C'est au moins ainsi que j'ai envisagé cette structure, comme les détails suivans le prouveront.

La glotte des oiseaux diffère par son ouverture & par sa forme; en général c'est cette partie de l'organe de la voix qui offre en eux le moins de variétés: dans le canard^c, dans le coq-d'inde & dans l'outarde, on distingue facilement une pièce triangulaire placée en devant; dans le canard, elle est surmontée intérieurement & au milieu par une

^c Voy. fig. 25

faillie aiguë & cartilagineuse en arrière; sur les côtés, sont des ligamens irréguliers, & les deux parties latérales de la glotte sont formées par deux cartilages dont la figure varie suivant celle de la glotte elle-même: dans l'aigle, dans le pélican & dans le canard, elle est disposée en fente: dans le casoar, elle est ovale; elle est grande & un peu triangulaire dans le pigeon ^a; & dans la poule, elle forme une espèce de parallélogramme très-allongé: Perrault l'a vue figurée en losange dans le cormoran. Dans le cabaret, le chardonneret, le linot, le verdier & le serin ^b, j'ai trouvé cette ouverture ovale avec de légères échancrures sur les côtés: dans le rossignol ^c, elle ne diffère qu'en ce que les bords sont moins échancrés & plus unis; deux muscles placés sur les côtés de la glotte, sont destinés à la former.

Dans les oiseaux, & en général dans tous les animaux qui n'ont point d'épiglotte, l'ouverture de la glotte peut se rétrécir au point de se fermer tout-à-fait; mais étant cartilagineuse, elle n'est pas susceptible de tension: un corps aigu, qui est placé au milieu de l'os hyoïde, répond à la pièce triangulaire & antérieure de la glotte, laquelle est environnée dans les gros oiseaux, ainsi que la base de la langue, de pièces blanchâtres & frangées ^d.

Les anneaux de la trachée-artère sont d'une seule pièce ^e, & quoique minces dans plusieurs, ils ont beaucoup de consistance & d'élasticité. M. Daubenton a trouvé les anneaux de ce conduit aplatis dans l'oiseau-pierre; deux muscles latéraux s'étendent jusqu'aux pièces qui forment les bords de la glotte, & paroissent les abaisser en les écartant l'un de l'autre; la longueur de la trachée-artère est ordinairement mesurée par celle du cou, dont l'étendue n'est pas, ainsi que M. Daubenton l'a prouvé, en raison du nombre des vertèbres cervicales, puisque le cou du cygne, qui a vingt-deux vertèbres cervicales, n'est pas aussi long que celui du flamant, qui n'en a que dix-sept. Il y a cependant quelques oiseaux dans lesquels la trachée-artère fait des contours & prend des formes particulières: on sait, d'après Perrault, qu'elle est dilatée

dilatée en quelques endroits de l'ibis; que celle du coq indien fait un repli au bas du cou; que celle du cormoran offre un nœud dans cette région; que celle de la demoiselle de Numidie s'enfonce dans le sternum, ainsi que celle du cygne. Willughby (o) a fait voir que la trachée-artère de la grue s'enfonce de même; on trouve aussi cette structure dans le héron.

M. Hérissant a décrit les bronches de l'oie & de quelques oiseaux aquatiques du genre du canard; elles sont entre-coupées par des membranes en forme de croissant: M. Bajon a fait connoître les replis que la trachée-artère fait le long du sternum dans le paragua: enfin M. Daubenton a donné une description exacte de celle de l'oiseau-pierre, qui s'étend en dehors des deux côtés du sternum. Tout cet appareil, qui peut être comparé à la poche osseuse du singe-hurleur^a, aux deux sinus^b de la glotte du cochon & du sanglier, ou au tambour qui se trouve dans le larynx de l'âne & du mulet, n'est ainsi disposé que pour donner plus de force & d'intensité à la voix de ces oiseaux: l'organe de la voix du rossignol & celui du serin sont au contraire les plus simples de tous. N'est-on pas en droit de conclure de cette opposition, que la Nature paroît tendre d'elle-même vers l'harmonie, puisqu'il semble lui en moins coûter pour former des sons agréables, que pour produire un grand bruit, à force de contours, de membranes & de cavités.

La trachée-artère, que nous avons considérée vers le haut & le long du cou, se rétrécit un peu vers le bas, dans le lieu où les bronches se divisent; il semble que ce conduit y ait été pincé de droite à gauche^b: là les bronches prennent leur origine, & dans l'endroit d'où elles naissent, plusieurs cerceaux plus grands & plus éloignés les uns des autres, en forment le principe^c; un cartilage mince, étroit^d & un peu tranchant, est situé perpendiculairement dans le milieu; il est quelquefois un peu échancré, ce qui a engagé quelques Auteurs à le comparer à un hausse-col;

^a Voy. fig. 12.
^b 13.

^b Voy. fig. 27.
28, 30 &
35.

^c Voy. fig. 29.
^d d.

^d Voy. fig. 32.
^e 35.

(o) Ornithologie, page 200.

la face externe de chaque bronche est formée d'une membrane mince ^a, de sorte que les cerceaux cartilagineux n'y sont point entiers; la pièce en forme d'éperon, placée à l'origine des bronches, diffère dans sa structure; celle du héron, dont le cri a beaucoup de force, est très-simple; elle est soutenue en devant & en arrière sur les cerceaux auxquels elle correspond. Dans le coq-d'inde, cette pièce fait partie d'une autre, qui est elle-même composée de deux cerceaux ^b plus forts & plus saillans que les autres; les deux bronches sont réunies vers le bas par une substance ligamenteuse ^c, de sorte qu'il y a un trou entre ce ligament & leur division ^d: dans les petits oiseaux, la disposition de la trachée-artère est la même à peu-près que dans le héron; on trouve à la division des bronches, un rétrécissement & une pièce aiguë & verticale qui les sépare ^e: mais il y a sous un autre aspect, une différence très-notable entre les grands oiseaux, dont la voix a plus de force que d'agrément, & les petits, appelés par quelques Naturalistes *aves canora*, parce que leur gosier très-flexible produit des sons bien cadencés, & parce que plusieurs sont susceptibles d'apprendre des airs assez difficiles, & de les répéter d'une manière agréable. Cette différence consiste en ce que le larynx inférieur des grands oiseaux, tels que le coq d'inde ^f, la poule, le canard, l'oie, l'outarde, le butor, &c, n'est composé que de membranes, & absolument dépourvu de muscles, tandis que dans le rossignol, le serin, le linot, le verdier, le chardonneret & l'alouette ^g, la partie inférieure du larynx est absolument recouverte par un muscle dont les fibres sont très-serrées, qui est sillonné en devant par une dépression longitudinale, & qui se termine en arrière par deux petits mamelons: dans le pigeon, deux muscles situés latéralement, s'insèrent entre les derniers cerceaux de la trachée-artère, aux membranes mobiles qui en remplissent l'intervalle ^h.

A cette observation, dont aucun Auteur n'a parlé, nous ajoutons, pour rendre le tableau plus complet, celle de M. Hérissant, sur la membrane qui s'étend d'une des branches

de l'os de la lunette à l'autre, & qui ferme la partie antérieure de la poitrine.

La glotte des oiseaux ressemble assez à celle des quadrupèdes: la pièce triangulaire qui est placée en devant ^a, répond, non au crycoïde, comme Perrault l'a dit, mais au thyroïde, & les segmens latéraux aux arythénoïdes: la pièce qui divise les bronches & les membranes de ces dernières, sont susceptibles de vibrer, & semblent tenir lieu des ligamens inférieurs de la glotte; la grande distance qui sépare celle-ci d'avec l'organe vraiment sonore, le défaut d'épiglotte & de ligamens ou cordes vocales, la disposition des membranes des bronches, & l'action que l'air échappé du poumon & contenu dans la région antérieure de la poitrine, sous la membrane de la fourchette, exerce sur la partie inférieure du larynx, constituent les principales différences de l'organe de la voix des oiseaux, avec celui de l'homme & des quadrupèdes.

Résultat,
relativement
aux Oiseaux.

^a Voy. fig. 25,
a, b.

Nous approchons du terme où la voix ne consiste que dans quelques modulations informes, où même elle s'affoiblit & disparoit enfin tout-à-fait; dans quelques reptiles, elle se fait encore entendre, mais dans les serpens, quelques sons aigus, excités par la colère, dont ils annoncent la menace & le danger, sont tout ce qui en tient lieu. Dans la grenouille, la glotte, qui est longue & étroite, & sans épiglotte ^b, s'ouvre & se ferme avec autant de rapidité que de précision: au-devant de la glotte sont deux ligamens, qui méritent par excellence le nom de *cordes vocales* ^c; ils sont très-longs par rapport au volume de l'animal, tendus parallèlement, & tout-à-fait détachés des parties environnantes; de sorte qu'au lieu d'une ouverture, il y en a trois: souvent les fentes latérales sont entre-coupées par un petit ligament transversal ^d; la somme de ces trois ouvertures forme un espace arrondi, qui est encadré dans un losange cartilagineux ^e, dont la partie antérieure est contiguë à la langue. Cette dernière est remarquable en ce que, fixée par sa pointe, elle est mobile

Reptiles.

^b Voy. fig. 40.

^c Voy. fig. 41
b 42.

^d Voy. fig. 41,
k, k.

^e Voy. fig. 51,
c, e, g, f, d.

postérieurement ; deux bronches très-courtes , & comme

^a Voy. fig. 42. argentées ^a , naissent immédiatement de la glotte.

^{d, c.}

La structure est la même dans le crapaud ordinaire & dans le grand crapaud de Mississipi , que j'ai disséqué au Jardin

^b Voy. fig. 43
^{c, 44.}

du Roi ^b : on ne peut s'empêcher d'être surpris , qu'avec un organe aussi bien disposé , ces animaux ne produisent que des sons monotones & désagréables.

Perrault a observé que dans le crocodile , la trachée-artère faisoit divers contours.

Dans les animaux qui nous restent à examiner , nous ne trouverons plus que la glotte & la trachée-artère ; telle est la structure de la tortue , de la vipère , de la couleuvre , & des serpens en général. Dans la tortue , une pièce antérieure tient lieu du thyroïde ; les parois de la trachée-artère sont minces ; ses anneaux sont continus : la glotte est très-étroite , & placée en devant , très-près de la face interne de la mâchoire inférieure ^c ; ce qui prouve que la voix , dans ces animaux , ne

^e Voy. fig. 45
^{c, 46.}

^d Voy. fig. 47.

doit avoir aucun timbre. Dans la vipère ^d & dans la grande couleuvre , la glotte est plus étendue ; elle se trouve derrière la langue , qui tient peu de place entre les deux mâchoires , étant contenue dans une gaine le long de l'œsophage ^e ; la trachée s'élargit un peu au-dessous de cette ouverture ; ses anneaux , qui sont entiers dans son origine , se divisent

^f Voy. fig. 48.
^{c, d, a, b.}

^g Voy. fig. 48.

^h Voy. fig. 52.
^{a, b.}

ensuite ^f pour adhérer au poumon , & ils se terminent en bec de flûte ^g , au-delà de ce viscère , dans une suite de cellules qui s'étendent jusqu'à l'extrémité de l'animal , lequel peut être gonflé dans toutes ses dimensions lorsqu'on y introduit de l'air. La glotte des oiseaux est séparée d'avec l'organe , vraiment sonore ; elle est la seule partie qui constitue l'organe de la voix dans les reptiles.

Je n'ai fait aucune mention des cétacées , quoique Pline , parmi les Anciens , & M.^{rs} Anderson & Klein , parmi les Modernes , aient avancé que la voix de la baleine & du dauphin est très-forte , parce que l'on ignore absolument la structure de leur larynx.

Je ne m'arrêterai point non plus sur les insectes ; à la vérité ,

plusieurs de ces animaux , & sur-tout les femelles , font entendre des sons , mais les organes par lesquels l'air pénètre n'y ont aucune part ; ce sont des bruits mécaniques , produits , soit par le choc de la partie antérieure du corselet , comme dans plusieurs coléoptères , soit avec des balanciers semblables à de petites baguettes de tambour qui frappent sur une peau sèche & tendue , comme dans les diptères , & principalement dans la cigale.

En se rappelant les observations dont je viens d'offrir le tableau , on peut en tirer les conséquences suivantes :

Résultat
général.

1.^o La glotte étant formée dans la plupart des quadrupèdes , par des bords presqu'entièrement cartilagineux , qui ne sont susceptibles d'aucune tension graduée , cette ouverture étant dans les oiseaux très-éloignée de l'organe vraiment sonore , & ne produisant qu'un sifflement dans les serpens où elle est seule , ne peut-on pas en conclure qu'elle n'est point essentielle à la formation des sons ?

2.^o Les ligamens inférieurs étant dans plusieurs quadrupèdes & dans quelques reptiles , les seules parties capables de vibrer , des membranes élastiques en étant également susceptibles dans les oiseaux , n'est-on pas conduit à penser que ces différentes parties ont un usage marqué dans la formation des sons ?

3.^o Le timbre de la voix augmentant dans les conduits recourbés & dans les cavités formées par des parois cartilagineuses & élastiques , n'est-il pas probable que tout l'appareil , dont quelques animaux sont pourvus , ne tend qu'à augmenter la résonnance de la voix , sans influencer sur son intonation ?

Ces inductions sont les seules que je me permettrai en finissant ce Mémoire. Un Anatomiste qui se propose de découvrir le mécanisme de la voix dans les différentes classes d'animaux , peut être comparé à un Curieux qui , après avoir entendu dans un Concert l'effet de plusieurs instrumens de Musique , sans avoir d'ailleurs la moindre connoissance de leur disposition , chercheroit , en les examinant , à découvrir la manière dont on les emploie , & la nature du son qu'ils produisent. Les recherches que je viens d'exposer , ne sont

1798 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
relatives qu'à la structure anatomique des organes : il me reste
à publier dans un autre Mémoire , les expériences qui concer-
nent leurs usages.

EXPLICATION DES FIGURES.

Figure 1.^{re}

b, c, la langue du mandrill & toute la pièce sont vues de côté.

a, d, e, os hyoïde; *e*, grande corne; *d*, petite corne; *a*, corps de l'os hyoïde prolongé, recourbé, & sous lequel est le conduit qui communique avec la poche.

a, f, g, h, poche située devant le larynx en dehors; *h*, lieu de son rétrécissement.

i, k, les deux lobes de la glande thyroïde.

l, trachée-artère.

Figure 2.

La langue & toute la pièce sont vues en devant, la poche étant ôtée.

Les mêmes lettres de la *figure précédente* serviront à l'explication, si ce n'est qu'en *M*, on voit l'ouverture du conduit placé sous le corps de l'os hyoïde, qui mène à la poche.

Figure 3.

Les mêmes lettres serviront à l'explication de la figure, si ce n'est 1.^o qu'en *o, p, q*, on voit les vaisseaux de la poche; & 2.^o qu'en *f, g, h*, on aperçoit cette même poche en devant, tandis qu'elle est vue de côté dans la *figure 1.^{re}*

Figure 4.

Cette figure présente le larynx du mangabey extérieurement; *a*, la glotte; *b*, l'épiglotte; *c*, la langue.

Figure 5.

Elle offre le larynx du mangabey ouvert; *a, e, b, c*, ligamens des cordes vocales & les ventricules au-dessus.

c, la langue; *d*, l'épiglotte; *f, g*, les cartilages arythénoïdes; *h*, l'ouverture percée à la base de l'épiglotte qui mène à la poche : cette ouverture est ample.

Figure 6.

Elle montre le larynx du mangabey vu en dessus, en devant & un peu en dessous.

a, ouverture qui mène à la poche.

b, une partie de la poche ouverte.

c, la trachée-artère.

d, la langue.

Figure 7.

Cette figure présente le larynx de la mone ouvert & écarté.

a, *e*, *b*, *c*, ligamens des cordes vocales & ventricules au-dessus.

c, la langue; *d*, l'épiglotte; *h*, la trachée-artère également ouverte.

f, *g*, ouverture semi-circulaire par laquelle l'intérieur du larynx communique avec la poche placée en dehors & en devant.

Figure 8.

On voit dans cette figure le larynx du sajou gris ouvert longitudinalement.

a, *e*, *a*, *b*, ligamens des cordes vocales; ventricules au-dessus.

c, la langue; *d*, l'épiglotte; *e*, la trachée-artère; *f*, une très-petite ouverture placée à la base de l'épiglotte, où elle communique avec la poche située en devant.

Figure 9.

On y voit le larynx du sajou gris en dehors & en devant.

a, ouverture placée sous l'os hyoïde, & qui est le principe de la poche gutturale externe.

b, *b*, *b*, portions de la membrane qui formoit la poche; *c*, la trachée-artère; *d*, la langue.

Figure 10.

Dans cette figure, on voit le larynx du faï en dehors & en devant.

a, la langue; *b*, l'épiglotte; *c*, la glotte; *d*, la trachée-artère.

Figure 11.

Dans cette figure, on voit le larynx du faï ouvert.

200 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

a, la langue ; *b*, épiglote ; *c*, base de l'épiglotte où il n'y a point d'ouverture ; *e*, *d*, *f*, *d*, ligamens des cordes vocales & ventricules au-dessus.

Figure 12.

Cette figure présente la poche du larynx du singe-hurleur, vue de côté.

Depuis *A* jusqu'à *B*, espace étroit, alongé & horizontal de la face supérieure de la poche.

C, dépression latérale de la face supérieure.

Depuis *D* jusqu'à *E*, face inférieure, arrondie, inégale & poreuse.

F, échancrure placée au haut & à un des côtés de l'ouverture.

G, une des petites facettes placées au haut & sur le côté de la face postérieure.

H, ouverture qui mène à la cavité de la poche.

Figure 13.

Cette figure montre la poche vue dans la face postérieure.

I, l'orifice.

J, le segment qui ferme l'orifice supérieurement.

K, bord ovalaire de l'orifice.

L, portion supérieure de la face postérieure.

M, *N*, les deux facettes placées au haut & sur les côtés de cette région.

Figure 14.

Cette figure présente le larynx du singe-hurleur avec ses annexes, vu obliquement de côté, un peu en dessus,

A, *B*, la langue,

G, isthme du gosier,

Depuis *D* jusqu'à *E*, le pharynx,

F, principe de l'œsophage.

E, *G*, *H*, *I*, *K*, *L*, ouverture ovale faite artificiellement au pharynx pour découvrir la glotte.

E, *M*, *N*, *O*, ouverture de la glotte.

M, *N*, lèvres de la glotte.

O, épiglote

O, épiglotte.

P, chaton du crycoïde.

Q, partie antérieure du crycoïde.

R, cartilage thyroïde : on voit sa face latérale, qui est un peu excavée;

S, endroit où le cartilage thyroïde se recourbe en arrière.

T, bord extérieur du cartilage thyroïde.

V, U, la trachée-artère.

X, corne du cartilage thyroïde.

Y, Z, Δ, deux ligamens qui, des cornes du cartilage thyroïde, s'étendent vers la petite facette supérieure & latérale de la région postérieure de la poche.

Θ, facette à laquelle le ligament aboutit.

Σ, τ, Φ, conduit qui établit une communication entre la poche osseuse & le cartilage thyroïde : il est plus étroit en *τ*, & plus large en *Σ*, & en *Φ*.

Θ, τ, Ω, poche osseuse décrite dans les figures 1 & 2 : on la voit de côté, comme dans la figure 1."

Figure 15.

Cette figure offre la coupe longitudinale de la langue & de tout le larynx du singe-hurleur.

A, la langue coupée en long.

B, portion latérale du pharynx.

C, ligament qui s'étend de la poche osseuse du larynx vers le cartilage thyroïde.

D, moitié de l'épiglotte divisée.

E, commencement de l'œsophage, également divisé.

F, la poche osseuse du larynx, divisée & vue en dedans.

F, G, H, lames minces qui sont saillantes dans l'intérieur de la poche osseuse.

I, jonction du conduit horizontal avec la poche osseuse du larynx.

K, milieu du conduit horizontal, qui est plus étroit.

L, extrémité postérieure & plus large du conduit horizontal.

M, saillie du cartilage thyroïde qui divise intérieurement le conduit horizontal en deux.

Mém. 1779.

Cc

N, une des rigoles qui résulte de cette division.

O, ventricule de la glotte avec lequel ce conduit communique & se continue.

P, ligament inférieur ou postérieur de la glotte, répondant à ce qu'on appelle *corde vocale*.

Q, facette interne du cartilage thyroïde.

R, bord extérieur du cartilage thyroïde divisé.

S, endroit où le cartilage crycoïde a été coupé.

T, face interne de la trachée-artère.

Nota. Les figures 9, 10, 11 & 12, sont dessinées en grandeur naturelle.

Figure 16.

Cette figure représente le larynx du chien : il été ouvert longitudinalement pour voir l'intérieur.

a, b, os hyoïde; *c*, épiglote qui est triangulaire; *d, e*, ligamens inférieurs de la glotte; *f, g*, ventricules; *h*, partie moyenne de l'épiglotte; *l, m*, crochets formés par l'épiglotte & les ligamens inférieurs; *h, i*, trachée-artère.

Figure 17.

On voit dans cette figure le larynx du chat; *a, b*, os hyoïde; *e*, l'épiglotte; *h, i*, la glotte; *e, d, f, g*, représente les ligamens inférieurs de la glotte & deux petites membranes placées au-dessus, & qui frémissent aisément.

Figure 18.

Elle offre le larynx du lapin : il a été ouvert pour voir l'intérieur; *a*, l'épiglotte; *b*, petits corps arrondis, placés au bas de l'épiglotte du lapin; *c, d*, ventricules & ligamens inférieurs de la glotte; *e*, la trachée-artère.

Fig. 19.

Elle présente le larynx du phoque dans l'état naturel; *a*, la langue, qui est très-grande; *b*, épiglote; *b, c*, la glotte; *e, d*, les ligamens inférieurs ou cordes vocales, qui sont très-pres des lèvres de la glotte; *f*, la trachée-artère.

Figure 20.

C'est le même larynx ouvert; *a*, la langue; *b*, l'épiglotte; *d, e*, ligamens inférieurs & ventricules très-étroits; *f*, cavité au-dessous de la glotte; *g*, annexes de la trachée-artère.

Figure 21.

Larynx de la chauve-souris-vampir de l'île Sainte-Hélène à nez simple & long; *a*, langue; *b*, saillie très-peu considérable, tenant lieu d'épiglotte; *b*, *c*, glotte ovale & comme festonnée; *d*, la trachée-artère.

Figure 22.

Même larynx ouvert; *a*, langue; *b*, *c*, *d*, *e*, petites bandes tenant lieu de ligamens ou de cordes vocales; *f*, la trachée-artère.

Figure 23.

Larynx de la grande chauve-souris-vampir à nez composé; *a*, langue; *b*, *c*, glotte; *d*, *e*, trachée-artère.

Figure 24.

Même larynx vu en dessous, avec une partie de la langue & l'os hyoïde.

Figure 25.

Larynx du canard représenté ouvert; *a*, *b*, pièce triangulaire qui tient lieu du thyroïde; *c*, petit éperon placé au milieu de ce cartilage en dedans; *d*, *e*, *f*, *g*, pièces latérales qui tiennent la place des arythénoïdes & en partie du crycoïde; *h*, la trachée-artère.

Figure 26.

Trachée-artère du dinde; *a*, *b*, trachée-artère; *c*, œsophage; *d*, endroit où étoit la poche & qui a été lié; *e*, *f*, *g*, *h*, artères; *i*, nœud où est la partie inférieure du larynx; *k*, trou situé entre les deux bronches; *l*, *m*, deux muscles placés le long de la trachée-artère.

Figure 27.

La même trachée-artère vue en dessus, & dépouillée des parties accessoires, excepté des muscles; *a*, *b*, *c*, *d*, muscles placés le long de la trachée-artère; *e*, trachée-artère; *f*, *g*, deux anneaux formant la pièce principale, sur laquelle est soutenue la pièce aiguë placée dans le milieu des bronches; *h*, *i*, les bronches; *k*, trou situé entre les bronches; *l*, ligament qui recouvre les bronches, & qui manque dans plusieurs grands oiseaux, tel que le butor, dans lequel il ne se rencontre point.

Figure 28.

La même trachée-artère vue par-derrière; *a*, *b*, les membranes qui

Cc. ij

204 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

forment la partie interne des bronches, & qui sont susceptibles de vibration, sur-tout dans leurs bifurcations.

Figure 29.

On voit dans cette figure le profil de la trachée-artère du coq-d'inde; *a*, la trachée-artère; *b*, *c*, les muscles placés le long de ce conduit; *d*, les anneaux qui sont à l'origine des bronches, & qui sont plus grands & plus aplatis que les autres.

Figure 30.

La trachée-artère du pigeon; *a*, la trachée-artère; *b*, *c*, les deux muscles longitudinaux; *d*, *e*, les deux anneaux cartilagineux qui soutiennent l'organe sonore & entre lesquels s'insèrent les muscles longitudinaux; *f*, *g*, les bronches.

Figure 31.

La même trachée-artère, vue de profil.

Figure 32.

La même trachée-artère ouverte; *a*, la pièce tranchante & verticale qui sépare les bronches; *b*, *c*, les bronches.

Figure 33.

La glotte du pigeon; *a*, *b*, la glotte; *c*, *d*, pièces comme frangées ou hachées, qui accompagnent la langue & la glotte de plusieurs oiseaux; *e*, la trachée-artère.

Figure 34.

La glotte du serin; *a*, *b*, la glotte; près de *b*, sont les pièces frangées ou hachées dont on a déjà parlé; *c*, la trachée-artère.

Figure 35.

La même trachée-artère ouverte: on y voit les deux bronches & la pièce qui les divise.

Figure 36.

Cette figure offre la glotte du rossignol; sa forme y est dessinée en grandeur naturelle; derrière, sont les pièces hachées ou frangées.

Figure 37.

Larynx de l'alouette, qui donnera une idée de cet organe, vu en dehors.

dans tous les petits oiseaux : on y voit la trachée-artère, ses deux muscles longitudinaux, les bronches, & en *a*, un muscle qui recouvre l'organe vraiment sonore.

Figure 38.

Le même larynx, vu de profil.

Figure 39.

Le même larynx, vu en dessous ; en *a*, *b*, sont les deux tubercules qui terminent postérieurement le muscle dont il a été parlé.

Figure 40.

Glotte de la grenouille ; *a*, *b*, la langue dont la partie postérieure est mobile ; *c*, *d*, fente de la glotte, qui est susceptible de se fermer exactement.

Figure 41.

Larynx de la grenouille, les lèvres de la glotte étant ôtées ; *a*, *b*, la langue ; *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, espèce de losange cartilagineux qui soutient le larynx ; *i*, *h*, *g*, cordes vocales ou ligamens de la glotte ; *k*, *k*, intersection latérale de ces ligamens ; *i*, *h*, *k*, *g*, ouverture du larynx qui est ronde, & divisée en trois par les cordes vocales.

Figure 42.

Dans cette figure, on voit ces parties en grandeur naturelle ; *a*, la langue ; *b*, l'ouverture du larynx dans lequel sont les cordes vocales ; *c*, *d*, les bronches, qui sont très-courtes.

Figure 43.

Larynx du grand crapaud de Mississipi ; *a*, *b*, la glotte en grandeur naturelle.

Figure 44.

Le même larynx, les lèvres de la glotte ôtées ; *a*, *b*, *c*, *d*, les cordes vocales ; *e*, *f*, les intersections latérales ; *a*, *f*, *b*, *d*, *e*, *c*, circonférence de l'ouverture du larynx.

Figure 45.

La glotte de la tortue, vue de face ; *a*, *b*, glotte ; *c*, trachée-artère.

Figure 46.

Le même larynx, vu dépouillé de toutes les parties qui le recouvrent

Figure 47.

Larynx de vipère; *a, b*, glotte étroite & sans épiglotte; *b, c, d*, la langue bifurquée & placée dans un étui le long de l'œsophage; *e, f*, région où sont les dents; *g*, la trachée-artère.

Figure 48.

La même trachée-artère, vue en dessous; *a, b*, langue bifurquée & placée dans l'étui *c, d*; *f, e*, écailles inférieures; *g*, endroit où la trachée-artère commence à se bifurquer; *h*, endroit où la division de la trachée-artère est encore plus marquée.

Figure 49.

Larynx de la grande couleuvre; *a, b*, la glotte; *c*, la trachée-artère; *d, e*, la langue bifurquée.

Figure 50.

La même pièce, vue en dessous.

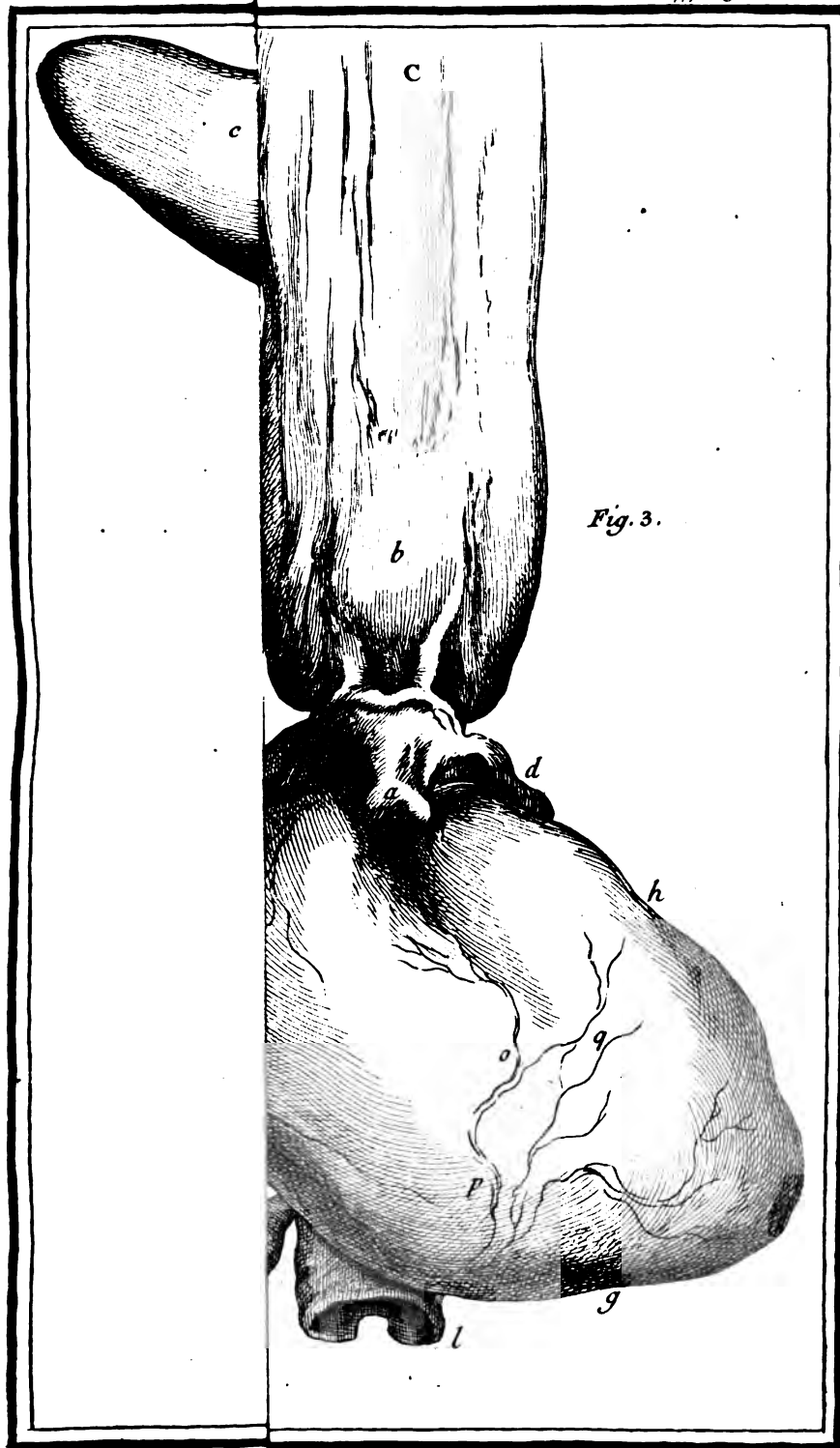
Figure 51.

La même pièce, vue de profil; *a, b*, étui dans lequel la langue renferme, & d'où elle se dégage avec beaucoup de facilité.

Figure 52.

Extrémités de la trachée-artère de la couleuvre & de la vipère; *a, b*, la fin de la trachée-artère; *b*, l'extrémité en bec de flûte; *c, d, e, f*, pores ou des ventricules dans lesquels la trachée-artère s'ouvre & se termine.





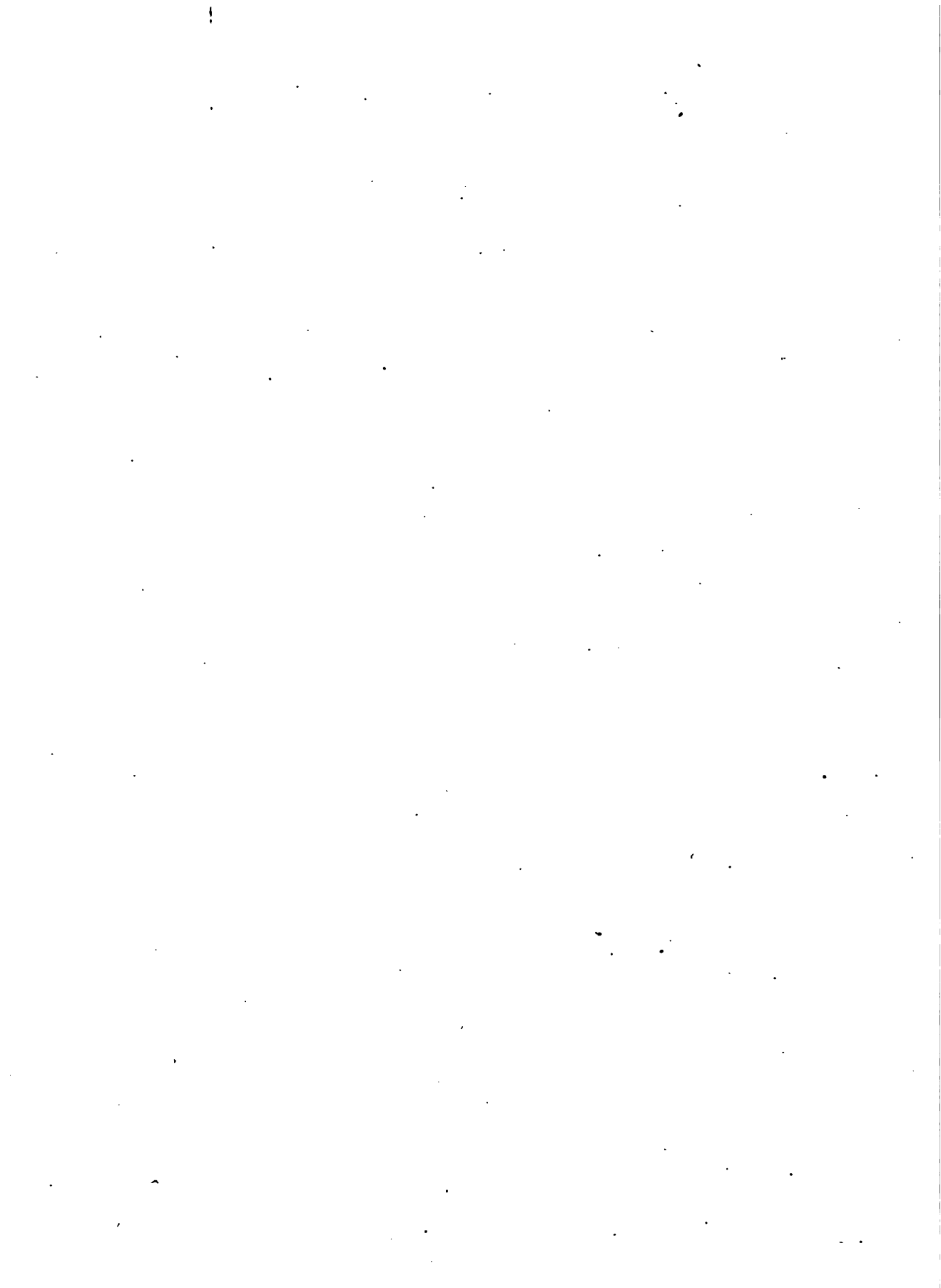


Fig. 4.



Fig. 5.



Fig. 6.

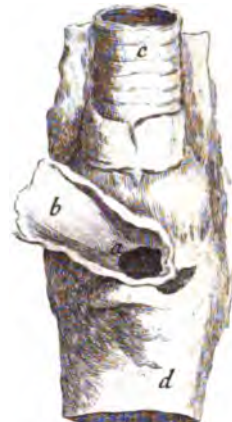


Fig. 8.



Fig. 9.



Fig. 7.

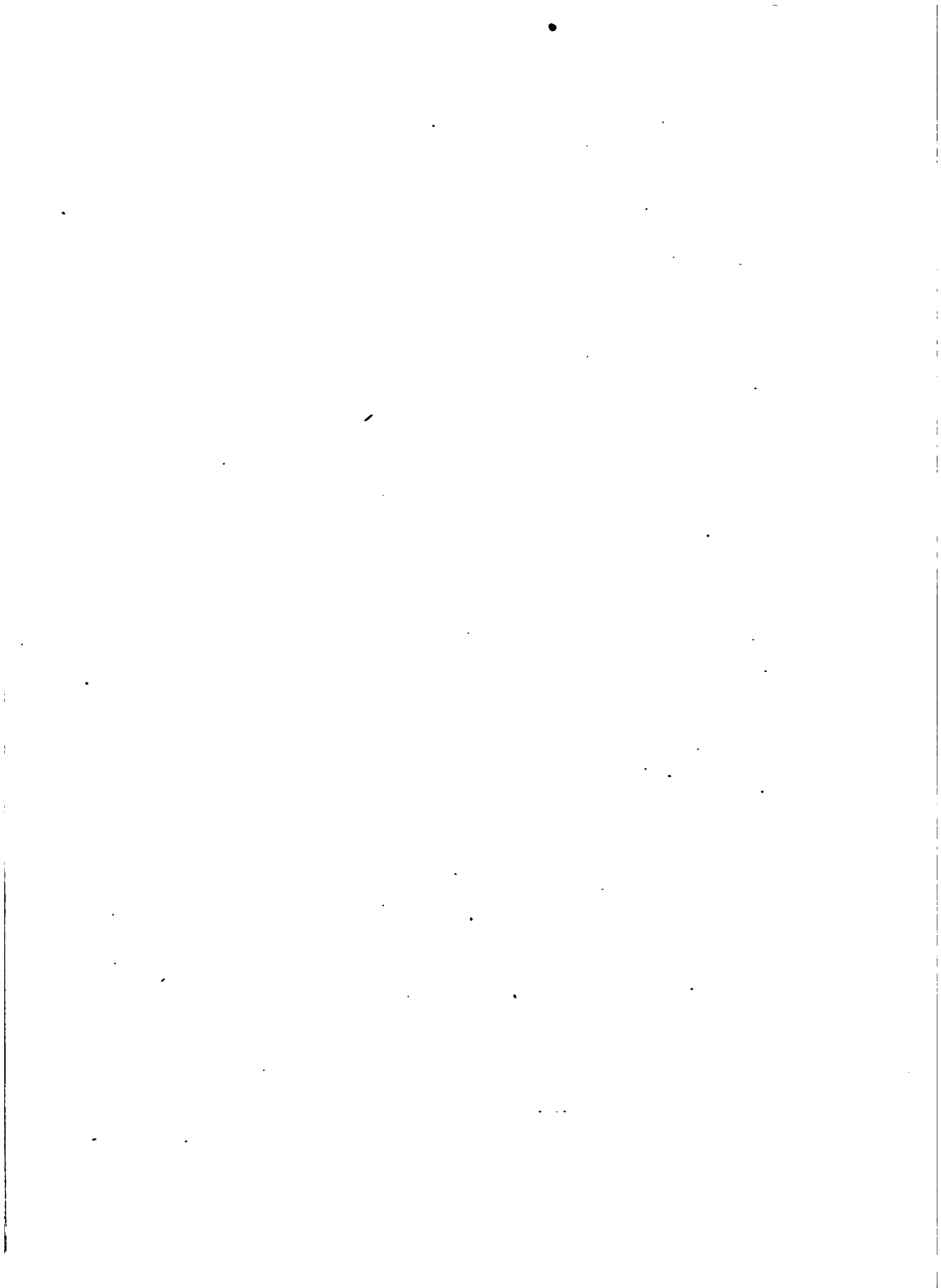


Fig. 10.



Fig. 11.





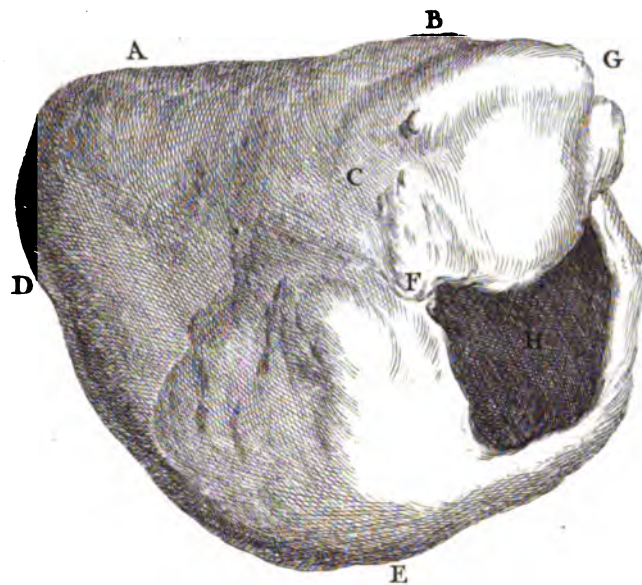


Fig. 12.

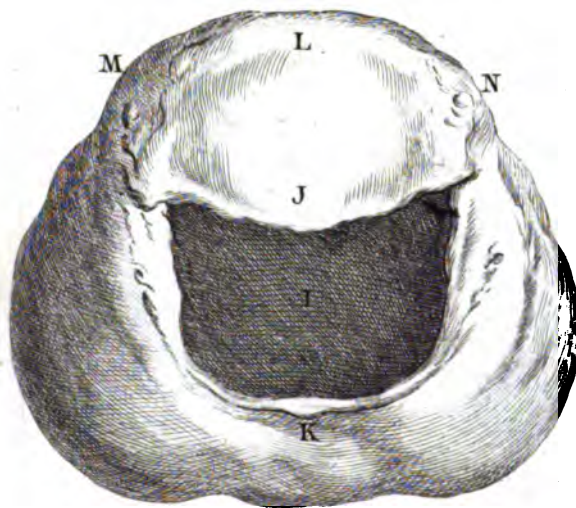
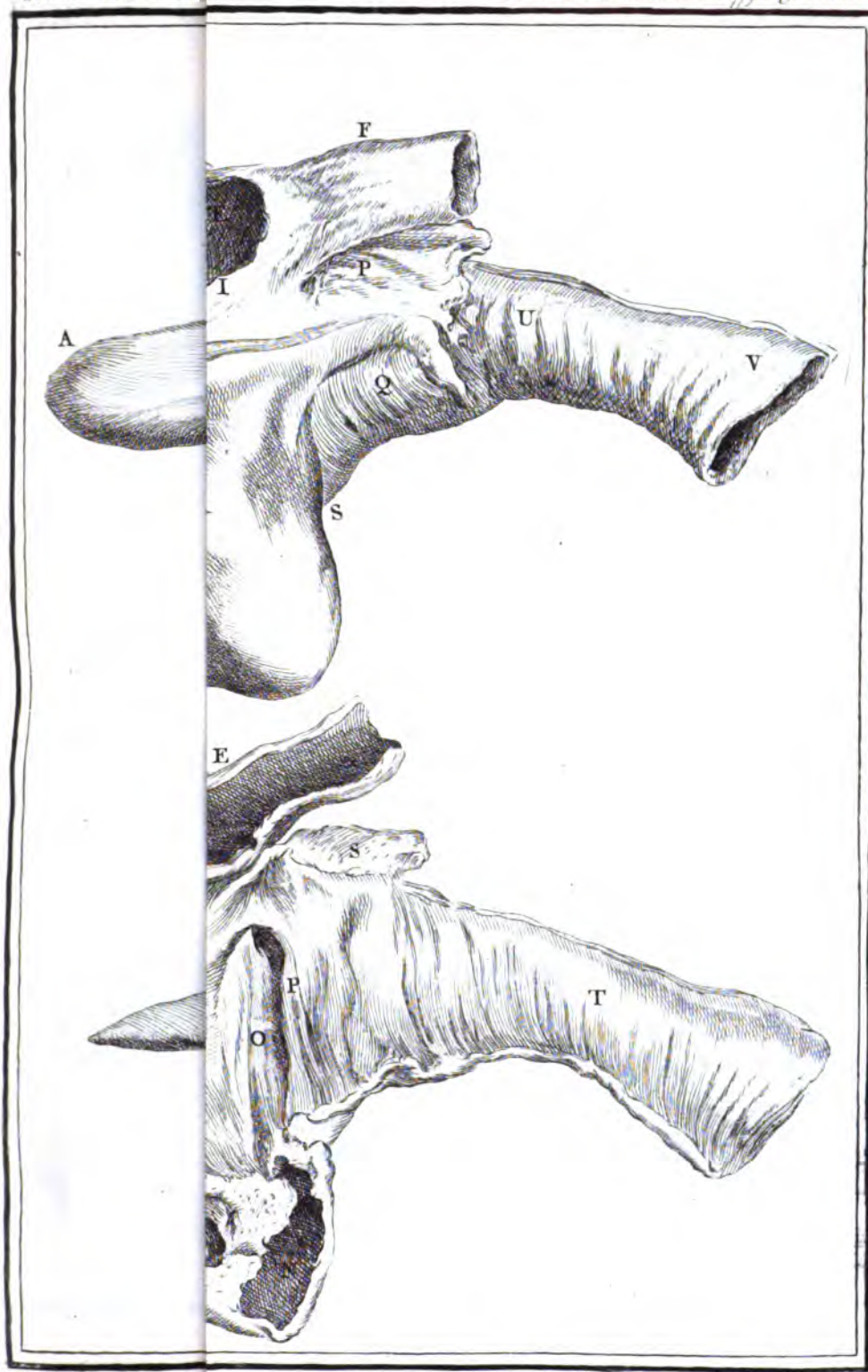
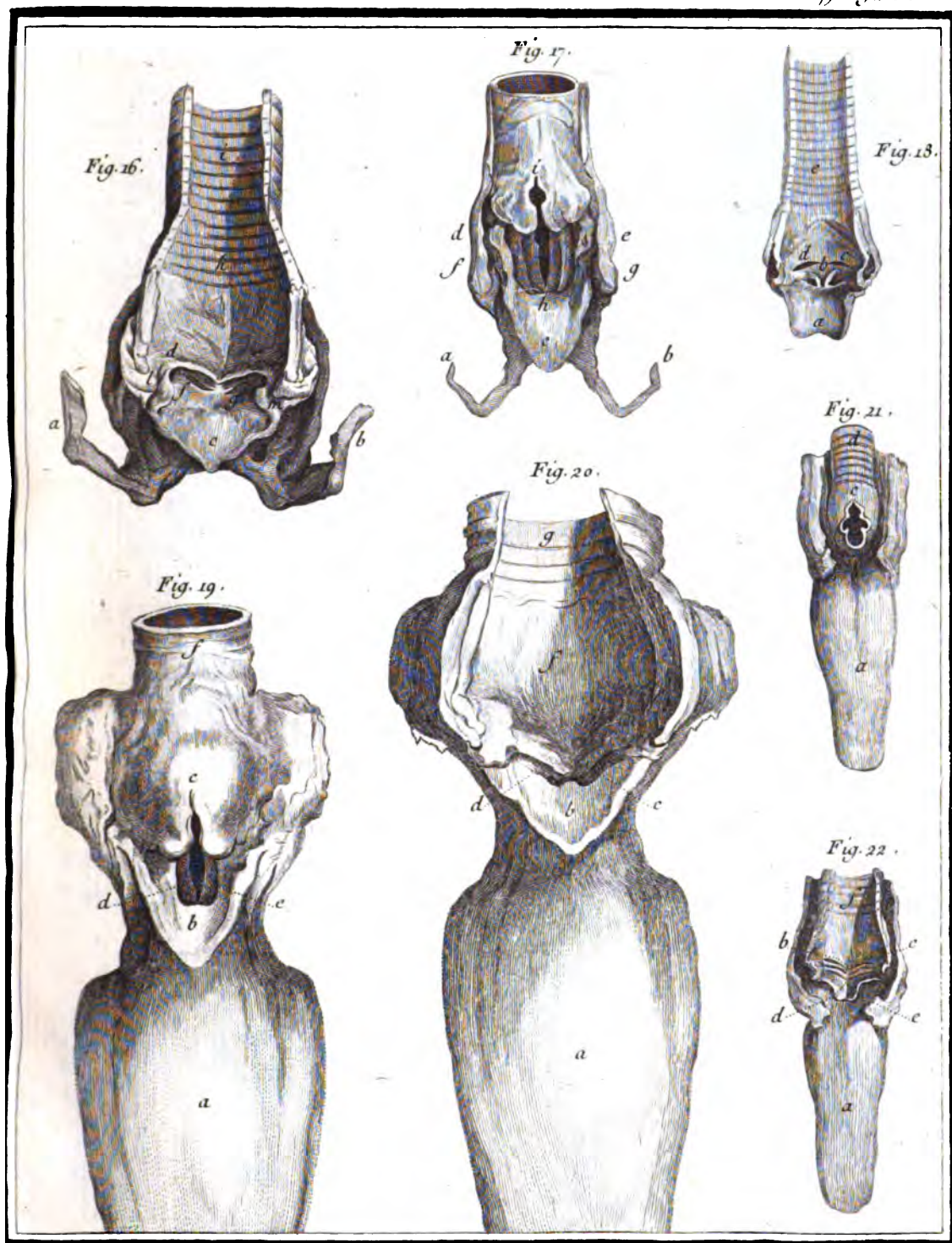
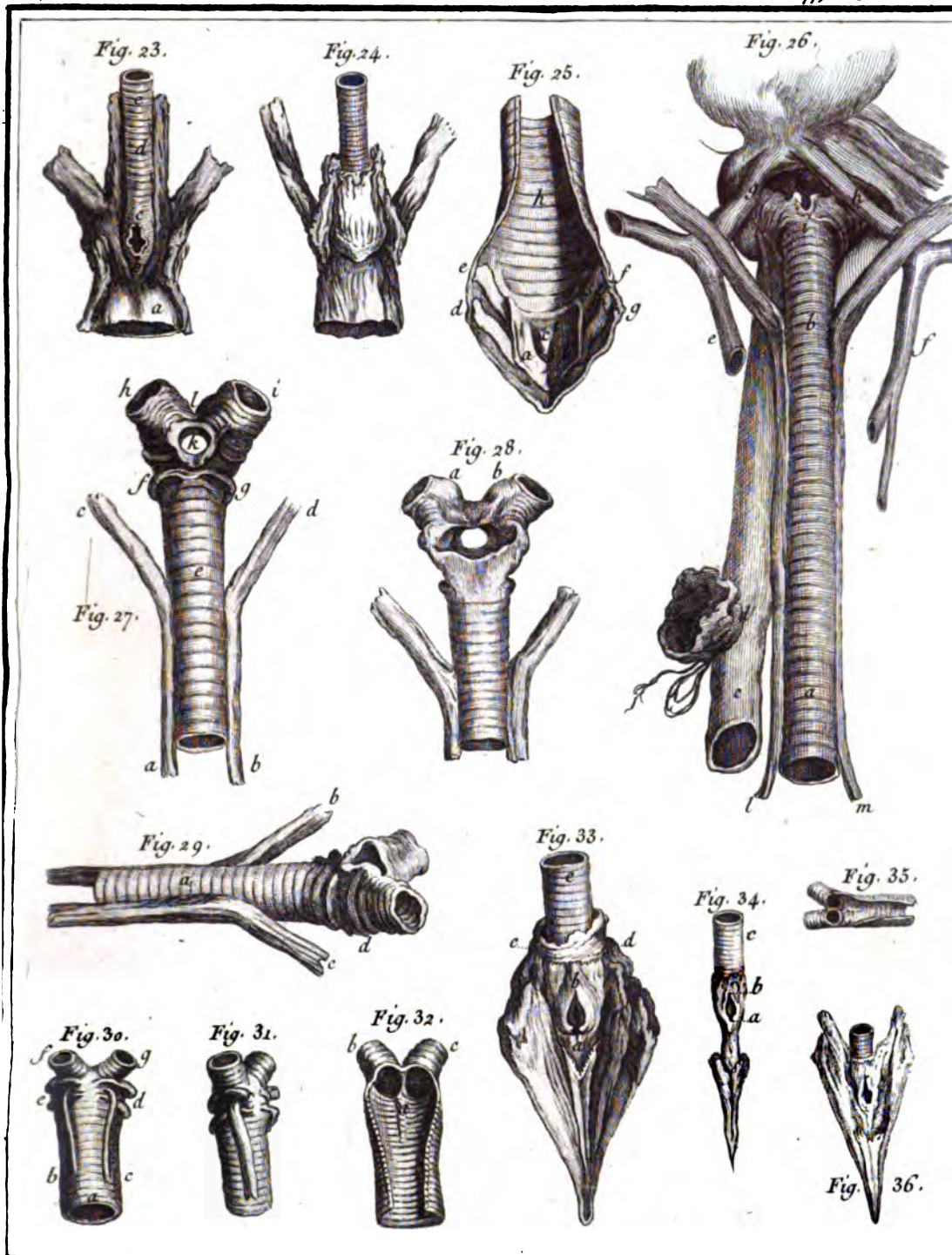


Fig. 13.

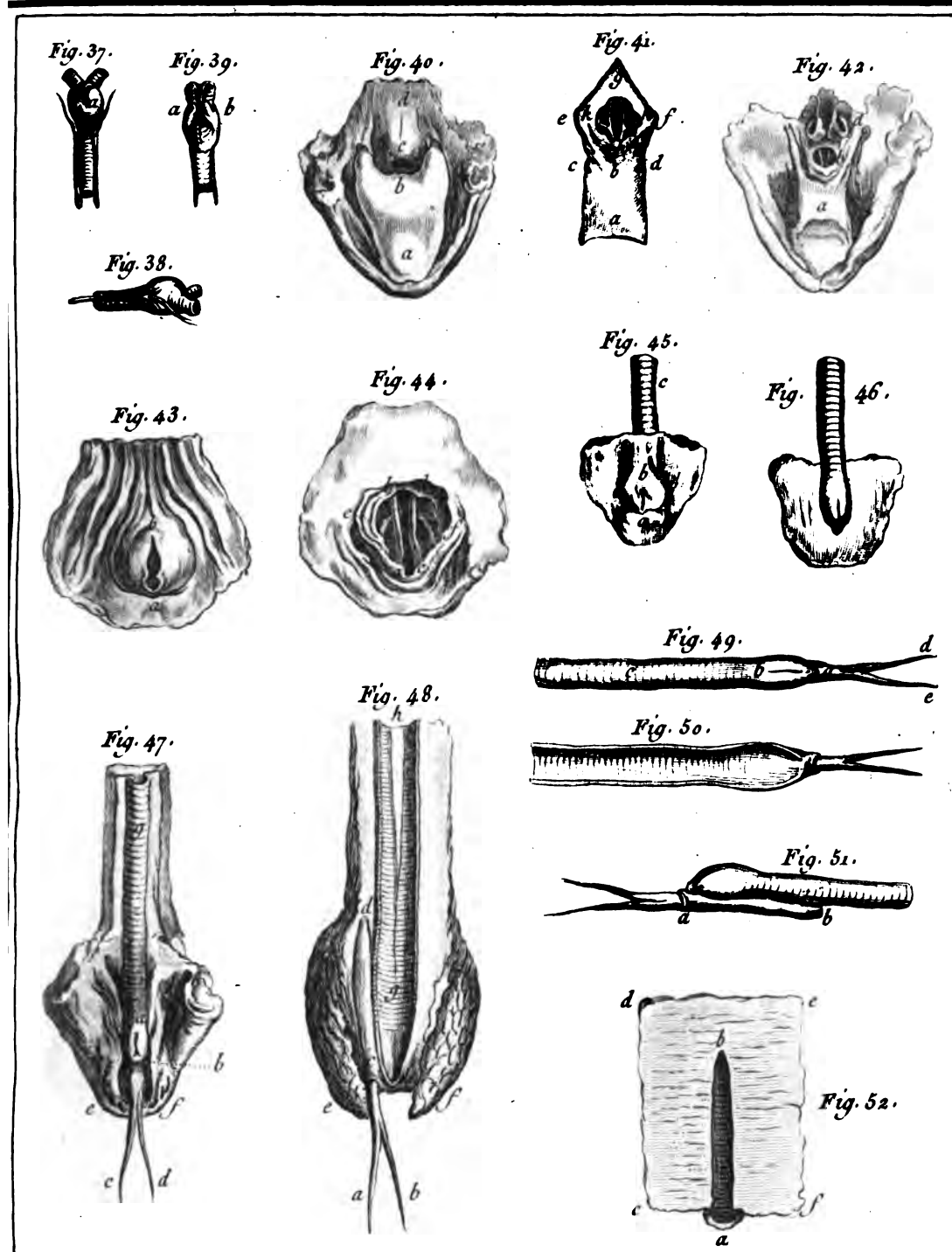








1000 1000



Paris del.

Fig. 52. d. e. c. f. Vesicules dans lesquelles se Termine la Trachée - Artère.

Y. le Gouax.

M É M O I R E

S U R L E S S U I T E S.

Par M. DE LA PLACE.

I.

LA théorie des Suites est un des objets les plus importants de l'analyse : tous les Problèmes qui se réduisent à des approximations , & conséquemment presque toutes les applications des Mathématiques à la Nature , dépendent de cette théorie ; aussi voyons-nous qu'elle a principalement fixé l'attention des Géomètres ; ils ont trouvé un grand nombre de beaux théorèmes & de méthodes ingénieuses , soit pour développer les fonctions en séries , soit pour sommer les suites exactement ou par approximation ; mais ils n'y sont parvenus que par des voies indirectes & particulières , & l'on ne peut douter que dans cette branche de l'analyse , comme dans toutes les autres , il n'y ait une manière générale & simple de l'envisager , dont les vérités déjà connues dérivent , & qui conduise à plusieurs vérités nouvelles. La recherche d'une semblable méthode est l'objet de ce Mémoire ; celle à laquelle je suis parvenu est fondée sur la considération de ce que je nomme *fonctions génératrices* : c'est un nouveau genre de calcul , que l'on peut nommer *calcul des fonctions génératrices* , & qui m'a paru mériter d'être cultivé par les Géomètres. J'expose d'abord quelques résultats très-simples sur ces fonctions , & j'en déduis une méthode pour interpoler les suites , non-seulement lorsque les différences consécutives des termes sont convergentes , ce qui est le seul cas que l'on ait considéré jusqu'ici ; mais encore lorsque la série proposée converge vers une suite récurrente , la dernière raison de ses termes étant donnée par une équation linéaire aux différences finies , dont les coefficients sont constans. L'intégration de ce genre d'équation est un corollaire de cette analyse.

En passant ensuite du fini à l'infiniment petit, je donne une formule générale pour interpoler les suites, dont la dernière raison des termes est représentée par une équation linéaire aux différences infiniment petites, dont les coefficients sont constans; d'où je conclus l'intégration de ces équations. En appliquant la même méthode à la transformation des suites, il en résulte un moyen fort simple de les transformer en d'autres, dont les termes suivent une loi donnée: enfin, le rapport des fonctions génératrices aux variables correspondantes, me conduit immédiatement à l'analogie singulière des puissances positives avec les différences, & des puissances négatives avec les intégrales, analogie observée d'abord par Leibnitz, & mise depuis dans un plus grand jour par M. de la Grange (*Mémoires de Berlin, année 1772*); tous les théorèmes auxquels le second de ces deux grands Géomètres est parvenu dans les Mémoires cités d'après cette analogie, & beaucoup d'autres encore, se déduisent avec la plus grande facilité, de ce rapport.

En considérant de la même manière les séries à deux variables, j'expose une méthode générale pour les interpoler, non-seulement dans le cas où les différences consécutives des termes de la série sont convergentes; mais encore lorsque la série converge vers une suite *récurrorécurrente*, la dernière raison de ses termes étant donnée par une équation linéaire aux différences finies partielles dont les coefficients sont constans; d'où résulte l'intégration de ce genre d'équations. Cette matière est de la plus grande importance dans l'analyse des hasards; je crois être le premier qui l'ait considérée (*voyez les tomes VI & VII des Savans étrangers*); M. de la Grange l'a depuis traitée par une très-belle & très-savante analyse, dans les Mémoires de Berlin, pour l'année 1775; j'ose espérer que la manière nouvelle dont je l'envisage dans ce Mémoire, ne déplaira pas aux Géomètres. Il suit de mes recherches, que l'intégration de toute équation linéaire aux différences finies partielles, dont les coefficients sont constans, peut se ramener à celle d'une équation linéaire aux différences
infiniment

infiniment petites, au moyen d'*intégrales définies* prises par rapport à une nouvelle variable; je nomme *intégrale définie*, une intégrale prise depuis une valeur déterminée de la variable jusqu'à une autre valeur déterminée. Cette remarque plus curieuse qu'utile dans la théorie des différences finies, devient très-utile, lorsqu'on la transporte aux équations linéaires aux différences infiniment petites partielles; elle donne un moyen de les intégrer dans une infinité de cas qui se refusent à toutes les méthodes connues, & sans elle il m'eût été presque impossible de prévoir les formes dont les intégrales sont alors susceptibles. Mais pour rendre ce que je viens de dire plus sensible, il ne sera pas inutile de rappeler en peu de mots ce que l'on a découvert sur les équations linéaires aux différences infiniment petites partielles du second ordre. L'intégrale de ces équations renferme, comme l'on sait, deux fonctions arbitraires; on a de plus remarqué que ces fonctions peuvent être dans l'intégrale, affectées du signe différentiel d ; & c'est, si je ne me trompe, à M.^{rs} Euler & de la Grange que l'on doit cette remarque importante à laquelle ils ont été conduits par la théorie du son, dans le cas où l'air est considéré avec ses trois dimensions. Ces deux grands Géomètres ont ensuite étendu leurs méthodes à des équations plus compliquées que celles de ce Problème; mais il restoit à trouver une méthode au moyen de laquelle on pût généralement, ou intégrer une équation quelconque linéaire du second ordre, ou s'assurer que son intégrale est impossible en termes finis, en n'ayant égard qu'aux seules variables qu'elles renferment; c'est l'objet d'un Mémoire que j'ai inséré dans le volume de l'Académie, pour l'année 1773. Dans ce Mémoire, j'ai démontré 1.^o Que les fonctions arbitraires ne peuvent exister dans l'intégrale que sous une forme linéaire: 2.^o Que si l'intégrale est possible en termes finis, en ne considérant que les seules variables de l'équation, une des deux fonctions arbitraires est nécessairement délivrée du signe intégral \int . J'ai donné ensuite une méthode générale pour avoir dans ce cas l'intégrale complète de l'équation

Mém. 1779.

D d

différentielle, en supposant même que cette équation renferme un terme indépendant de la variable principale, & qui soit une fonction quelconque des deux autres variables; d'où il suit, que lorsqu'une équation proposée se refuse à cette méthode, on peut être assuré que son intégrale complète est impossible en termes finis, en n'ayant égard qu'aux seules variables de l'équation. Maintenant, la remarque dont j'ai parlé ci-dessus, m'a fait voir que dans ce cas, l'intégrale est possible en termes finis, au moyen d'intégrales *définies* prises par rapport à une nouvelle variable qu'il faut nécessairement alors introduire dans le calcul. On verra ci-après, que ces formes d'intégrales sont du même usage dans la solution des Problèmes, que les formes connues; je donne pour les obtenir, une méthode qui s'étend à un grand nombre de cas, & spécialement à plusieurs questions physiques importantes, telles que le mouvement des cordes vibrantes dans un milieu résistant comme la vitesse, la propagation du son dans un plan, &c, dont on n'a pu trouver encore que des solutions particulières.

En transportant aux différences infiniment petites, les remarques que je fais sur une équation particulière aux différences finies partielles, je parviens à m'assurer d'une manière incontestable, que dans le Problème des cordes vibrantes, on peut admettre des fonctions discontinues, pourvu qu'aucun des angles formés par deux côtés contigus de la figure initiale de la corde ne soit fini; d'où il me paroît que ces fonctions peuvent être généralement employées dans tous les Problèmes qui se rapportent aux différences partielles, pourvu qu'elles puissent subsister avec les équations différentielles & avec les conditions du Problème; ainsi, la seule condition qui soit nécessaire dans la détermination des fonctions arbitraires d'une équation proposée aux différences partielles de l'ordre n , est qu'il n'y ait point de saut entre deux valeurs consécutives d'une différence de ces fonctions, plus petite que la différence $n^{\text{ième}}$; & par conséquent, que dans les courbes, au moyen desquelles on représente ces fonctions arbitraires, il n'y ait point de saut entre deux

tangentes consécutives, si, comme dans le Problème des cordes vibrantes, l'équation différentielle est du second ordre, ou qu'il n'y ait point de saut entre deux rayons osculateurs consécutifs, si l'équation est du troisième ordre, &c; ce qui est conforme à ce que M. le Marquis de Condorcet a trouvé par une autre méthode, dans les Mémoires de l'Académie, pour l'année 1771, pages 70 & 71. Mais il est essentiel d'observer que si l'intégrale renferme les différences des fonctions arbitraires, on doit considérer les différences les plus élevées comme les véritables fonctions arbitraires de l'intégrale, & n'appliquer la règle précédente qu'à ces différences. Cette manière d'éclairer les points délicats de la théorie des différences infiniment petites, par celle des différences finies, est, si je ne me trompe, la plus propre à remplir cet objet, & il me semble que d'après la théorie que j'expose, il ne doit rester aucun doute sur l'usage des fonctions discontinues dans le calcul intégral aux différences partielles. Enfin, je termine ce Mémoire par la considération des équations linéaires aux différences partielles, en parties finies, & en parties infiniment petites, & par quelques théorèmes sur la réduction en séries, des fonctions à deux variables. Toutes ces recherches n'étant que le développement d'une considération fort simple sur la nature des fonctions génératrices, j'ose me flatter que l'analyse dont j'ai fait usage, pourra mériter, par sa généralité, l'attention des Géomètres.

I I.

Des Suites à une seule variable.

SOIT y_x une fonction quelconque de x ; si l'on forme la suite infinie

$$y_0 + y_1 \cdot t + y_2 \cdot t^2 + y_3 \cdot t^3 \dots + y_x \cdot t^x + y_{x+1} \cdot t^{x+1} \dots + y_\infty \cdot t^\infty,$$

& que l'on nomme u la somme de cette suite, ou ce qui revient au même, la fonction dont le développement forme

D d ij

cette suite ; cette fonction sera ce que je nomme *fonction génératrice* de la variable y_x .

Une fonction génératrice d'une variable quelconque y_x , est donc généralement une fonction de t , qui, développée suivant les puissances de t , a cette variable y_x pour coefficient de t^r ; & réciproquement, la variable correspondante d'une fonction génératrice, est le coefficient de t^r dans le développement de cette fonction suivant les puissances de t . Il suit de ces définitions, que u étant la fonction génératrice de y_x , celle de y_{x+1} , sera $u \cdot t$; car il est visible que le coefficient de t^r dans $u \cdot t$, est égal à celui de t^{r-1} dans u , & par conséquent égal à y_{x-1} .

Le coefficient de t^r dans $u \cdot (\frac{1}{t} - 1)$ est évidemment égal à $y_{x+1} - y_x$, ou à $\Delta \cdot y_x$, Δ étant la caractéristique des différences finies ; on aura donc la fonction génératrice de la différence finie d'une quantité, en multipliant par $\frac{1}{t} - 1$, la fonction génératrice de la quantité elle-même ; la fonction génératrice de $\Delta^2 y_x$ est ainsi, $u \cdot (\frac{1}{t} - 1)^2$, & généralement, celle de $\Delta^i y_x$ est $u \cdot (\frac{1}{t} - 1)^i$; d'où l'on peut conclure que la fonction génératrice de $\Delta^i y_{x-1}$, est $u \cdot t^i \cdot (\frac{1}{t} - 1)^i$.

Pareillement, le coefficient de t^r dans

$$u \cdot (a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} \dots + \frac{q}{t^r}) \text{ est}$$

$$a y_x + b y_{x+1} + c y_{x+2} + e y_{x+3} \dots + q y_{x+r} ;$$

en nommant donc $\nabla \cdot y_x$ cette quantité, la fonction génératrice sera

$$u \cdot (a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} \dots + \frac{q}{t^r}).$$

Si l'on nomme $\nabla^2 y_x$ la quantité

$$a \nabla \cdot y_x + b \cdot \nabla \cdot y_{x+1} + c \cdot \nabla \cdot y_{x+2} \dots + q \cdot \nabla \cdot y_{x+n},$$

$\nabla^3 \cdot y_x$ la quantité

$$a \nabla^2 \cdot y_x + b \cdot \nabla^2 \cdot y_{x+1} + c \nabla^2 \cdot y_{x+2} \dots + q \cdot \nabla^2 \cdot y_{x+n},$$

& ainsi de suite; leurs fonctions génératrices correspondantes seront

$$u \cdot (a + \frac{b}{r} + \frac{c}{r^2} \dots + \frac{q}{r^n})^2,$$

$$u \cdot (a + \frac{b}{r} + \frac{c}{r^2} \dots + \frac{q}{r^n})^3,$$

&c.

& généralement, la fonction génératrice de $\nabla^i \cdot y_x$ sera

$$u \cdot (a + \frac{b}{r} + \frac{c}{r^2} \dots + \frac{q}{r^n})^i.$$

Partant la fonction génératrice de $\Delta^i \cdot \nabla^j \cdot y_x$, sera

$$u \cdot s^j \cdot (a + \frac{b}{r} + \frac{c}{r^2} \dots + \frac{q}{r^n})^i \cdot (\frac{1}{r} - 1)^j.$$

On peut généraliser encore les théorèmes précédens, en supposant que $\nabla \cdot y_x$ représente une fonction quelconque linéaire de $y_x, y_{x+1}, y_{x+2},$ &c; que $\nabla^2 \cdot y_x$ représente une nouvelle fonction dans laquelle $\nabla \cdot y_x$ entre de la même manière que y_x dans $\nabla \cdot y_x$; que $\nabla^3 \cdot y_x$ représente une fonction de $\nabla^2 \cdot y_x$ semblable à celle de $\nabla \cdot y_x$ en y_x , & ainsi de suite; car u étant la fonction génératrice de y_x , si l'on nomme $u s$ celle de $\nabla \cdot y_x$, $u s^2$, $u \cdot s^3$, &c, seront les fonctions génératrices de $\nabla^2 \cdot y_x$, $\nabla^3 \cdot y_x$, &c; en multipliant donc la fonction u , par les puissances successives de s , on aura les fonctions génératrices des produits de y_x , par les puissances correspondantes de ∇ , ∇ n'étant point une quantité, mais une caractéristique; & cela sera encore vrai, en supposant ces puissances fractionnaires, & même incommensurables.

s étant une fonction quelconque de $\frac{1}{t}$, si l'on développe s^i , suivant les puissances de $\frac{1}{t}$, & que l'on désigne par $\frac{K}{r^m}$, un terme quelconque de ce développement, le coefficient de r^m dans $\frac{K.u}{r^m}$, sera $K.y_{x+m}$; on aura donc le coefficient de r^m dans us^i , ou ce qui revient au même, on aura $\nabla^i.y^m$, 1.^o en substituant dans s , y_x au lieu de $\frac{1}{t}$; 2.^o en développant ce que devient alors s^i , suivant les puissances de y_x , & en ajoutant à x , dans chaque terme, l'exposant de la puissance de y_x , c'est-à-dire en écrivant y_x , au lieu de $(y_x)^0$; y_{x+1} , au lieu de $(y_x)^1$; y_{x+2} , au lieu de $(y_x)^2$, & ainsi de suite.

Si au lieu de développer s^i , suivant les puissances de $\frac{1}{t}$, on le développe suivant les puissances de $\frac{1}{t} - 1$, & que l'on désigne par $K.(\frac{1}{t} - 1)^m$, un terme quelconque de ce développement, le coefficient de r^m dans $Ku.(\frac{1}{t} - 1)^m$, sera $K.\Delta^m.y_x$; on aura donc $\nabla^i.y_x$, 1.^o en substituant dans s , $\Delta.y_x$, au lieu de $\frac{1}{t} - 1$, ou, ce qui revient au même, $1 + \Delta y_x$, au lieu de $\frac{1}{t}$; 2.^o en développant ce que devient alors s^i , suivant les puissances de $\Delta.y_x$, & en appliquant à la caractéristique Δ les exposans des puissances de $\Delta.y_x$, c'est-à-dire en écrivant $\Delta^0.y_x$, ou y_x , au lieu de $(\Delta.y_x)^0$; $\Delta^1.y_x$, au lieu de $(\Delta.y_x)^1$, & ainsi de suite.

En général, si l'on considère s comme une fonction de r , r étant une fonction de $\frac{1}{t}$, telle que le coefficient de r^m dans ur , soit $\square.y_x$; on aura $\nabla^i.y_x$, en substituant dans

s , $\square \cdot y_x$, au lieu de r ; en développant ensuite ce que devient alors s^i , suivant les puissances de $\square \cdot y_x$, & en appliquant à la caractéristique \square , les exposans des puissances de $\square \cdot y_x$, c'est-à-dire en écrivant $\square^0 \cdot y_x$, ou y_x , au lieu de $(\square \cdot y_x)^0$; $\square^1 \cdot y_x$, au lieu de $(\square \cdot y_x)^1$, & ainsi du reste. On aura donc ainsi les valeurs de $\nabla \cdot y_x$, $\nabla^2 \cdot y_x$, &c, par de simples développemens de fonctions algébriques.

Soit z la fonction génératrice de $\Sigma^i \cdot y_x$, Σ étant la caractéristique des intégrales finies; on aura, par ce qui précède, $z \cdot (\frac{1}{t} - 1)^i$ pour la fonction génératrice de y_x ; mais cette fonction doit, en n'ayant égard qu'aux puissances positives ou nulles de t , se réduire à u ; on aura donc

$$z \cdot (\frac{1}{t} - 1)^i = u + \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} \dots + \frac{F}{t^i};$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{u t^i + A \cdot t^{i-1} + B \cdot t^{i-2} + C \cdot t^{i-3} \dots + F}{(1 - t)^i}.$$

A, B, C, \dots, F étant les i constantes arbitraires qu'introduisent les i intégrations successives de y_x . En faisant abstraction de ces constantes, la fonction génératrice de $\Sigma^i \cdot y_x$ seroit $u \cdot (\frac{1}{t} - 1)^{-i}$; on auroit donc la fonction génératrice de $\Sigma^i \cdot y_x$, en changeant i en $-i$ dans la fonction génératrice de $\Delta^i \cdot y_x$; & réciproquement, on auroit la variable correspondante de la fonction $u \cdot (\frac{1}{t} - 1)^i$, dans laquelle on suppose i négatif, en changeant i en $-i$ dans $\Delta^i \cdot y_x$, & en supposant que les différences négatives représentent des intégrales; mais si l'on a égard aux constantes arbitraires, il faut, en passant des puissances positives aux puissances négatives de $\frac{1}{t} - 1$, augmenter u d'un nombre de termes $\frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t^3} + \&c$, égal à

l'exposant de la puissance négative de $\frac{1}{t} - 1$. On voit par-là, comment les fonctions génératrices se forment de la loi des variables correspondantes, & réciproquement de quelle manière ces variables se déduisent de leurs fonctions génératrices. Appliquons maintenant ces résultats à la théorie des suites.

I I I.

De l'interpolation des suites à une seule variable, & de l'intégration des équations différentielles linéaires.

TOUTE la théorie de l'interpolation des suites, consiste à déterminer, quel que soit i , la valeur de y_{x+i} , en fonctions de y_x , & des termes qui précèdent ou qui suivent y_x . Pour cela, on doit observer que y_{x+i} est égal au coefficient de t^{x+i} dans le développement de u , & par conséquent, égal au coefficient de t^x dans le développement de $\frac{u}{t^i}$; or on a

$$\frac{u}{t^i} = u \left(1 + \frac{1}{t} - 1 \right)^i = u \cdot \left\{ 1 + i \cdot \left(\frac{1}{t} - 1 \right) + \frac{i \cdot (i-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^2 + \frac{i \cdot (i-1) \cdot (i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^3 + \&c. \right\}$$

De plus, le coefficient de t^x dans le développement de u , est y_x ; ce coefficient dans le développement de $u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1 \right)$, est $\Delta \cdot y_x$; dans le développement de $u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^2$, il est égal à $\Delta^2 \cdot y_x$, & ainsi de suite; on aura donc, en repassant des fonctions génératrices aux variables correspondantes,

$$y_{x+i} = y_x + i \cdot \Delta \cdot y_x + \frac{i \cdot (i-1)}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 \cdot y_x + \frac{i \cdot (i-1) \cdot (i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \Delta^3 \cdot y_x + \&c.$$

Cette équation ayant lieu, quel que soit i , servira à interpoler les suites dont les différences des termes vont en décroissant.

Toutes

Toutes les manières de développer la puissance $\frac{1}{i}$, donneront autant de méthodes différentes pour interpoler les suites; soit par exemple, $\frac{1}{i} = 1 + \frac{a}{i}$; en développant $\frac{1}{i}$, suivant les puissances de a , au moyen du beau théorème de M. de la Grange, (voyez les *Mémoires de l'Académie*, année 1777, page 115) on trouvera facilement

$$\frac{1}{i} = u \cdot \left\{ 1 + i \cdot a + \frac{i \cdot (i+2r-1)}{1 \cdot 2} \cdot a^2 + \frac{i \cdot (i+3r-1) \cdot (i+3r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^3 + \frac{i \cdot (i+4r-1) \cdot (i+4r-2) \cdot (i+4r-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot a^4 + \&c. \right\}$$

Maintenant, a étant égal à $r \cdot \left(\frac{1}{i} - 1 \right)$, le coefficient de r dans le développement de $u a$, est par l'article précédent, $\Delta \cdot y_{x-1}$; ce même coefficient dans le développement de $u a^2$, est $\Delta^2 \cdot y_{x-2}$, & ainsi de suite; on aura donc

$$y_{x+1} = y_x + i \cdot \Delta \cdot y_{x-1} + \frac{i \cdot (i+2r-1)}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 \cdot y_{x-2} + \frac{i \cdot (i+3r-1) \cdot (i+3r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \Delta^3 \cdot y_{x-3} + \frac{i \cdot (i+4r-1) \cdot (i+4r-2) \cdot (i+4r-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \Delta^4 \cdot y_{x-4} + \&c.$$

I V.

VOICI présentement une méthode générale d'interpolation qui a l'avantage de s'appliquer, non-seulement aux suites dont les différences des termes finissent par être nulles, mais encore aux suites dont la dernière raison des termes est celle d'une suite récurrente quelconque.

Supposons d'abord que l'on ait

$$i \cdot \left(\frac{1}{i} - 1 \right)^n = z,$$

& cherchons la valeur de $\frac{1}{i}$ en z .

Il est clair que $\frac{1}{i}$ est égal au coefficient de θ^i , dans le

Mém. 1779.

E e

développement de la fraction $\frac{1}{1 - \frac{\theta}{t}}$; si l'on multiplie

le numérateur & le dénominateur de cette fraction par $1 - \theta t$, on aura celle-ci $\frac{1 - \theta t}{1 - \theta(\frac{1}{t} + t) + \theta^2}$;

l'équation $t, (\frac{1}{t} - 1)^2 = Z$, donne $\frac{1}{t} + t = 2 + Z$, ce qui change la fraction précédente dans la suivante $\frac{1 - \theta t}{(1 - \theta)^2 - Z\theta}$; or on a

$$\frac{1}{(1 - \theta)^2 - Z\theta} = \frac{1}{(1 - \theta)^2} + \frac{Z\theta}{(1 - \theta)^4} + \frac{Z^2 \cdot \theta^2}{(1 - \theta)^6} + \frac{Z^3 \cdot \theta^3}{(1 - \theta)^8} + \&c.$$

D'ailleurs, le coefficient de θ^r dans le développement de $\frac{1}{(1 - \theta)^r}$, est égal à $\frac{r \cdot (1 - \theta)^{-r}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r \cdot \theta^r}$, pourvu

que l'on suppose $\theta = 0$ après les différenciations, ce qui donne $\frac{s \cdot (s + 1) \cdot (s + 2) \cdot \dots \cdot (s + r - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r}$ pour

ce coefficient; d'où il suit que le coefficient de θ^i est

- 1.° $i + 1$ dans le développement de $\frac{1}{(1 - \theta)^2}$;

- 2.° $\frac{i \cdot (i + 1) \cdot (i + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ dans le développement de $\frac{\theta}{(1 - \theta)^4}$;

- 3.° $\frac{(i - 1) \cdot i \cdot (i + 1) \cdot (i + 2) \cdot (i + 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ dans le développement de $\frac{\theta^2}{(1 - \theta)^6}$;

& ainsi du reste; donc si l'on nomme Z le coefficient de θ^i dans le développement de la fraction $\frac{1}{(1 - \theta)^2 - Z\theta}$,

on aura

$$Z = (i + 1) + \frac{i \cdot (i + 1) \cdot (i + 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot Z + \frac{(i - 1) \cdot i \cdot (i + 1) \cdot (i + 2) \cdot (i + 3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot Z^2 + \frac{(i - 2) \cdot (i - 1) \cdot i \cdot (i + 1) \cdot (i + 2) \cdot (i + 3) \cdot (i + 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot Z^3 + \&c.$$

ou

$$Z = i + 1 + \frac{(i+1) \cdot [(i+1)^2 - 1]}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot z + \frac{(i+1) \cdot [(i+1)^2 - 1] \cdot [(i+1)^2 - 4]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot z^2 \\ + \frac{(i+1) \cdot [(i+1)^2 - 1] \cdot [(i+1)^2 - 4] \cdot [(i+1)^2 - 9]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot z^3 + \&c.$$

Si l'on nomme ensuite Z' le coefficient de θ^i dans le développement de $\frac{\theta}{(1-\theta)^2 - z\theta}$, on aura Z' , en changeant dans Z , i en $i - 1$, ce qui donne

$$Z' = i + \frac{i \cdot (i^2 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot z + \frac{i \cdot (i^2 - 1) \cdot (i^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot z^2 \\ + \frac{i \cdot (i^2 - 1) \cdot (i^2 - 4) \cdot (i^2 - 9)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot z^3 + \&c;$$

on aura ainsi $Z - zZ'$, pour le coefficient de θ^i , dans le développement de la fraction $\frac{1 - \theta^2}{(1-\theta)^2 - z\theta}$; ce sera par conséquent l'expression de $\frac{1}{i!}$; partant

$$\frac{u}{i!} = u \cdot (Z - zZ').$$

Cela posé, le coefficient de t^r dans $\frac{u}{i!}$, est y_{x+i} ; ce même coefficient, dans un terme quelconque de $u \cdot Z$, tel que $Ku z^r$, ou, ce qui revient au même, $Ku \cdot t^r \cdot (\frac{1}{i} - 1)^{2r}$, est, par l'article II, égal à $K \cdot \Delta^{2r} \cdot y_{x-i}$; dans un terme quelconque de $u z Z'$, tel que $Ku z^r \cdot z^r$, ce coefficient est $K \cdot \Delta^{2r} \cdot y_{x-i-1}$; on aura donc, en repassant des fonctions génératrices aux variables correspondantes,

$$y_{x+i} = (i+1) \cdot y_x + \frac{(i+1) \cdot [(i+1)^2 - 1]}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \Delta^2 \cdot y_{x-1} \\ + \frac{(i+1) \cdot [(i+1)^2 - 1] \cdot [(i+1)^2 - 4]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \Delta^4 \cdot y_{x-2} + \&c. \\ - i \cdot y_{x-1} - \frac{i \cdot (i^2 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \Delta^2 \cdot y_{x-2} \\ - \frac{i \cdot (i^2 - 1) \cdot (i^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \Delta^4 \cdot y_{x-3} - \&c.$$

E e ij

On peut varier encore la forme précédente de y_{x+1} ; pour cela, soit Z'' ce que devient Z' , lorsqu'on y change i en $i - 1$, & par conséquent ce que devient Z , lorsqu'on y change i en $i - 2$; l'équation $\frac{1}{i'} = Z - t Z'$ donnera $\frac{1}{i'-1} = Z' - t Z''$; partant $\frac{1}{i'} = \frac{Z'}{t} - Z''$; en ajoutant ces deux valeurs de $\frac{1}{i'}$, & prenant la moitié de leur somme, on aura

$$\frac{1}{i'} = \frac{1}{2} \cdot Z - \frac{1}{2} \cdot Z'' + \frac{1}{2}(1+t) \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right) Z';$$

or on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot Z - \frac{1}{2} \cdot Z'' &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ i+1 + \frac{i \cdot (i+1) \cdot (i+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot t + \&c. \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \left\{ i-1 + \frac{(i-2) \cdot (i-1) \cdot i}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot t + \&c. \right\} \\ &= 1 + \frac{i^2}{1 \cdot 2} + t \cdot \frac{i^2 \cdot (i^2-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot t^2 + \frac{i^2 \cdot (i^2-1) \cdot (i^2-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot t^3 + \&c. \end{aligned}$$

Partant

$$\begin{aligned} \frac{u}{i'} &= u \cdot \left\{ 1 + \frac{i^2}{1 \cdot 2} \cdot t \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + \frac{i^2 \cdot (i^2-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot t^2 \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^4 \right. \\ &\quad \left. + \frac{i^2 \cdot (i^2-1) \cdot (i^2-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot t^3 \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^6 + \&c. \right\} \\ &= \frac{t}{2} \cdot u \cdot (1+t) \cdot \left\{ \frac{1}{t} - 1 + \frac{i^2-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot t \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(i^2-1) \cdot (i^2-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot t^2 \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^4 + \&c. \right\} \end{aligned}$$

d'où l'on conclut, par l'article II, en repassant des fonctions génératrices aux variables correspondantes,

$$\begin{aligned} y_{x+1} &= y_x + \frac{i^2}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 \cdot y_{x-1} + \frac{i^2 \cdot (i^2-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \Delta^4 \cdot y_{x-2} \\ &\quad + \frac{i^2 \cdot (i^2-1) \cdot (i^2-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \Delta^6 \cdot y_{x-3} + \&c. \\ &\quad + \frac{i}{2} \cdot \Delta \cdot (y_x + y_{x-1}) + \frac{i}{2} \cdot \frac{i^2-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \Delta^3 \cdot (y_{x-1} + y_{x-2}) \\ &\quad + \frac{i}{2} \cdot \frac{(i^2-1) \cdot (i^2-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \Delta^5 \cdot (y_{x-2} + y_{x-3}) + \&c. \end{aligned}$$

Cette formule revient à celle que Newton a donnée dans l'opuscule intitulé *Methodus differentialis*, pour interpoler entre un nombre impair de quantités équidistantes; dans ce cas, y_x désigne la quantité du milieu, & i est la distance de cette quantité à celle que l'on cherche, qui par conséquent est y_{x+i} , l'unité étant supposée l'intervalle commun des quantités données.

En différenciant aux différences finies, la formule précédente par rapport à i , on aura

$$\begin{aligned} y_{x+i+1} - y_{x+i} = & \frac{1}{2} \cdot \Delta \cdot (y_x + y_{x-1}) + \frac{i \cdot (i+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta^3 \cdot (y_{x-1} + y_{x-2}) \\ & + \frac{(i-1) \cdot i \cdot (i+1) \cdot (i+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta^5 \cdot (y_{x-2} + y_{x-3}) + \&c. \\ & + (2i+1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta^2 \cdot y_{x-1} + \frac{(2i+1) \cdot (i+1) \cdot i}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta^4 \cdot y_{x-2} \\ & + \frac{(2i+1) \cdot (i+2) \cdot (i+1) \cdot i \cdot (i-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta^6 \cdot y_{x-3} + \&c. \end{aligned}$$

Soit $y_{x+i} - y_x = y'_x$, & $i = \frac{s-1}{2}$, on aura

$$\begin{aligned} y_{x + \frac{s-1}{2}} = & \frac{1}{2} \cdot (y'_x + y'_{x-1}) + \frac{s^2-1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta^2 \cdot (y'_{x-1} + y'_{x-2}) \\ & + \frac{(s^2-1) \cdot (s^2-9)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Delta^4 \cdot (y'_{x-2} + y'_{x-3}) + \&c. \\ & + \frac{s}{2} \cdot \Delta \cdot y'_{x-1} + \frac{s \cdot (s^2-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \Delta^3 \cdot y'_{x-2} \\ & + \frac{s \cdot (s^2-1) \cdot (s^2-9)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \Delta^5 \cdot y'_{x-3} + \&c. \end{aligned}$$

Cette formule revient à celle que Newton a donnée dans l'opuscule cité, pour interpoler entre un nombre pair de quantités équidistantes; y'_x exprime la seconde des deux quantités moyennes, & $\frac{s-1}{2}$ exprime la distance à celle que l'on cherche, & qui par conséquent est $y'_{x + \frac{s-1}{2}}$, l'unité représentant l'intervalle commun des quantités données.

V.

SUPPOSONS généralement

$$z = a + \frac{b}{r} + \frac{c}{r^2} + \frac{e}{r^3} \dots \dots + \frac{p}{r^{n-1}} + \frac{q}{r^n}; (a)$$

on aura

$$\frac{1}{r^n} = \frac{z-a}{q} - \frac{b}{qr} - \frac{c}{qr^2} \dots \dots - \frac{p}{qr^{n-1}},$$

ce qui donne

$$\frac{1}{r^{n+1}} = \frac{z-a}{qr} - \frac{b}{qr^2} - \frac{c}{qr^3} \dots \dots - \frac{p}{qr^n};$$

en éliminant $\frac{1}{r^n}$ du second membre de cette équation, au moyen de la proposée (a), on aura

$$\frac{1}{r^{n+1}} = - \frac{p.(z-a)}{q^2} + \frac{pb + q.(z-a)}{q^2.r} + \&c.$$

Cette expression de $\frac{1}{r^{n+1}}$, ne renferme que des puissances de $\frac{1}{r}$, d'un ordre inférieur à n ; & en continuant d'éliminer ainsi la puissance $\frac{1}{r^n}$, à mesure qu'elle se présente, il est clair que l'on arrivera à une expression de $\frac{1}{r^n}$, qui ne renfermera que des puissances de $\frac{1}{r}$, moindres que n , & qui, par conséquent, aura cette forme,

$$\frac{1}{r^n} = Z + \frac{1}{r} . Z^{(1)} + \frac{1}{r^2} . Z^{(2)} + \frac{1}{r^3} . Z^{(3)} \dots + \frac{1}{r^{n-1}} . Z^{(n-1)};$$

$Z, Z^{(1)}, Z^{(2)} \dots \dots Z^{(n-1)}$ étant des fonctions rationnelles & entières de z , dont la première ne surpasse pas le degré $\frac{1}{n}$, la seconde ne surpasse pas le degré $\frac{1}{n} - 1$, la troisième le degré $\frac{1}{n} - 2$, & ainsi du reste.

Cette manière de déterminer $\frac{1}{i^i}$, est très-pénible, lorsque i est un peu considérable; elle conduiroit d'ailleurs difficilement à l'expression générale de cette quantité; on pourra y parvenir directement par la méthode suivante.

$\frac{1}{i^i}$ étant égal au coefficient de θ^i , dans le développement de la fraction $\frac{1}{1 - \frac{\theta}{i}}$, on multipliera le numérateur &

le dénominateur de cette fraction, par

$$(a - \zeta) \cdot \theta^n + b \cdot \theta^{n-1} + c \cdot \theta^{n-2} \dots + p\theta + q;$$

& en substituant dans le numérateur, au lieu de ζ , la valeur

$$a + \frac{b}{i} + \frac{c}{i^2} + \&c, \text{ on aura}$$

$$\frac{b \cdot \theta^{n-1} \left(1 - \frac{\theta}{i}\right) + c \theta^{n-2} \cdot \left(1 - \frac{\theta^2}{i^2}\right) + e \theta^{n-3} \cdot \left(1 - \frac{\theta^3}{i^3}\right) \dots + q \cdot \left(1 - \frac{\theta^n}{i^n}\right)}{\left(1 - \frac{\theta}{i}\right) \cdot (a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + e\theta^{n-3} \dots + p\theta + q - \zeta\theta^n)}$$

le numérateur de cette fraction est divisible par $1 - \frac{\theta}{i}$; on peut donc, en faisant la division, la mettre sous cette forme,

$$\left. \begin{aligned} & b \cdot \theta^{n-1} + c \theta^{n-2} + e \theta^{n-3} \dots + p\theta + q \\ & + \frac{\theta}{i} \cdot (c \theta^{n-2} + e \theta^{n-3} \dots + p\theta + q) \\ & + \frac{\theta^2}{i^2} \cdot (e \theta^{n-3} + \&c. \dots + p\theta + q) \\ & + \&c. \\ & \dots \dots \dots \\ & + \frac{q \theta^{n-1}}{i^{n-1}} \end{aligned} \right\} ; (A)$$

La recherche du coefficient de θ^i dans le développement de

cette fraction, se réduit ainsi à déterminer, quel que soit r , le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction

$$\frac{1}{a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + d\theta^{n-3} \dots + p\theta + q - r\theta^n}.$$

Pour cela, considérons généralement la fraction $\frac{P}{Q}$, P & Q étant des fonctions rationnelles & entières de θ , la première étant d'un ordre inférieur à celui de la seconde. Supposons que Q ait un facteur $\theta - a$, élevé à la puissance s , & faisons $Q = (\theta - a)^s \cdot R$; on peut toujours, comme l'on fait, décomposer la fraction $\frac{P}{Q}$ en deux autres,

$\frac{A}{(\theta - a)^s} + \frac{B}{R}$, A & B étant des fonctions rationnelles & entières de θ , la première de l'ordre $s - 1$, & la seconde d'un ordre inférieur à celui de R ; on aura donc

$$\frac{A}{(\theta - a)^s} + \frac{B}{R} = \frac{P}{(\theta - a)^s \cdot R},$$

ce qui donne

$$A = \frac{P}{R} - \frac{B \cdot (\theta - a)^s}{R}.$$

Si l'on considère A , B , P & R , comme des fonctions rationnelles & entières de $\theta - a$, A sera une fonction de l'ordre $s - 1$, & par conséquent, il sera égal au développement de $\frac{P}{R}$, dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de $\theta - a$, pourvu que l'on s'arrête à la puissance $s - 1$.

Soit donc

$$\frac{P}{R} = y + y_1 \cdot (\theta - a) + y_2 \cdot (\theta - a)^2 + \&c,$$

on aura

$$\frac{A}{(\theta - a)^s} = \frac{y}{(\theta - a)^s} + \frac{y_1}{(\theta - a)^{s-1}} + \frac{y_2}{(\theta - a)^{s-2}} + \&c,$$

en

en rejetant les puissances positives ou nulles de $\theta - a$;

$\frac{A}{(\theta - a)^r}$ sera par conséquent égal au coefficient de t^{s-1} , dans le développement de

$$\frac{y + y_1 \cdot t + y_2 \cdot t^2 + \&c.}{\theta - a - t}.$$

Or, si l'on nomme P' & R' ce que deviennent P & R , lorsqu'on y change $\theta - a$ en t , ou ce qui revient au même, θ en $t + a$, on aura

$$\frac{P'}{R'} = y + y_1 \cdot t + y_2 \cdot t^2 + \&c.$$

Partant $\frac{A}{(\theta - a)^r}$ sera égal au coefficient de t^{s-1} dans le développement de $\frac{P'}{R' \cdot (\theta - a - t)}$, & par conséquent,

il sera égal à $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (s-1) \cdot \partial t^{s-1}} \cdot \partial^{s-1} \cdot \frac{P'}{R' \cdot (\theta - a - t)}$, pourvu que l'on suppose $t = 0$, après les différenciations.

Maintenant le coefficient de θ^r , dans $\frac{P'}{R' \cdot (\theta - a - t)}$, étant

égal à $-\frac{P'}{R' \cdot (a + t)^{r+1}}$; ce même coefficient, dans

$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (s-1) \cdot \partial t^{s-1}} \cdot \partial^{s-1} \cdot \frac{P'}{R' \cdot (\theta - a - t)}$, sera

$-\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (s-1) \cdot \partial t^{s-1}} \cdot \partial^{s-1} \cdot \frac{P'}{R' (a + t)^{r+1}}$, t étant

supposé nul après les différenciations. Cette dernière quantité sera donc le coefficient de θ^r , dans le développement de

$\frac{A}{(\theta - a)^r}$; or, si l'on restitue dans P' & R' , $\theta - a$ au

lieu de t , ce qui les change en P & R , on aura

$$\partial^{s-1} \cdot \frac{\frac{P'}{R' (t + a)^{r+1}}}{\partial t^{s-1}} = \partial^{s-1} \cdot \frac{\frac{P}{R \cdot \theta^{r+1}}}{\partial \theta^{r+1}},$$

pourvu que l'on suppose $\theta = a$, après les différenciations

234 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
dans le second membre de cette équation;

$$= \frac{1}{1.2.3\dots(s-1).2\theta^{s-1}} \cdot \partial^{s-1} \cdot \frac{P}{R.\theta^{s+1}}$$

fera donc, avec cette condition, le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{A}{(\theta - a)^r}$.

Il suit de-là que si l'on suppose

$$Q = a \cdot (\theta - a)^s \cdot (\theta - a')^{s'} \cdot (\theta - a'')^{s''} \cdot + \&c.$$

le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{P}{Q}$, fera

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1.2.3\dots(s-1).2\theta^{s-1}} \cdot \partial^{s-1} \cdot \left\{ \frac{P}{a\theta^{s+1} \cdot (\theta - a')^{s'} \cdot (\theta - a'')^{s''} \cdot \&c.} \right\} \\ &= \frac{1}{1.2.3\dots(s'-1).2\theta^{s'-1}} \cdot \partial^{s'-1} \cdot \left\{ \frac{P}{a\theta^{s+1} \cdot (\theta - a) \cdot (\theta - a'')^{s''} \cdot \&c.} \right\} \\ &= \frac{1}{1.2.3\dots(s''-1).2\theta^{s''-1}} \cdot \partial^{s''-1} \cdot \left\{ \frac{P}{a\theta^{s+1} \cdot (\theta - a) \cdot (\theta - a') \cdot \&c.} \right\} \end{aligned}$$

en faisant après la différenciation, $\theta = a$ dans le premier terme, $\theta = a'$ dans le second terme, $\theta = a''$ dans le troisième terme, &c ainsi de suite. Cela posé, soit

$$V = a\theta^s + b\theta^{s-1} + c\theta^{s-2} \dots + p\theta + q,$$

& supposons qu'en mettant cette quantité sous la forme d'un produit, on ait

$$V = a \cdot (\theta - a) \cdot (\theta - a') \cdot (\theta - a'') \cdot \&c.$$

en développant la fraction $\frac{1}{V - z\theta^s}$ dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de z , on aura

$$\frac{1}{V} + \frac{z\theta^s}{V^2} + \frac{z^2 \cdot \theta^{2s}}{V^3} + \frac{z^3 \cdot \theta^{3s}}{V^4} + \&c.$$

& le coefficient de θ^r dans le développement de la fraction $\frac{1}{V}$, sera par ce qui précède, égal à

$$-\frac{1}{1.2.3\dots(s-1).a^s.\partial\theta^{s-1}}.\partial^{s-1}.\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{\theta^{r+s}.\left(\theta-a^1\right)^r.\left(\theta-a^{11}\right)^r.\&c.}\\+\frac{1}{\theta^{r+s}.\left(\theta-a\right)^r.\left(\theta-a^{11}\right)^r.\&c.}\\+\frac{1}{\theta^{r+s}.\left(\theta-a\right)^r.\left(\theta-a^1\right)^r.\&c.}\\+\&c.\end{array}\right\}$$

pourvu qu'après les différenciations, on suppose $\theta = a$ dans le premier terme, $\theta = a^1$ dans le second terme, $\theta = a^{11}$ dans le troisième terme, &c. Soit $Z_{i-1}^{(s-1)}$ ce que devient alors cette quantité; le coefficient de θ^i dans le développement

de la fraction $\frac{1}{V - z\theta^s}$, sera

$$Z_i^{(0)} + Z_{i-1}^{(1)} \cdot z + Z_{i-2}^{(2)} \cdot z^2 + Z_{i-3}^{(3)} \cdot z^3 + \&c.$$

on aura donc pour le coefficient de θ^i dans le développement de la fraction (A) , & par conséquent pour l'expression de $\frac{1}{\theta^i}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta^i} = & b \cdot Z_{i-1}^{(0)} + bz \cdot Z_{i-2}^{(1)} + bz^2 \cdot Z_{i-3}^{(2)} \\ & + bz^3 \cdot Z_{i-4}^{(3)} + \&c. \\ & + c \cdot Z_{i-2}^{(0)} + cz \cdot Z_{i-3}^{(1)} + cz^2 \cdot Z_{i-4}^{(2)} \\ & + cz^3 \cdot Z_{i-5}^{(3)} + \&c. \\ & + e \cdot Z_{i-3}^{(0)} + ez \cdot Z_{i-4}^{(1)} + ez^2 \cdot Z_{i-5}^{(2)} \\ & + ez^3 \cdot Z_{i-6}^{(3)} + \&c. \\ & + \&c. \\ & + \frac{1}{t} \cdot \left\{ \begin{array}{l} c \cdot Z_{i-1}^{(0)} + cz \cdot Z_{i-2}^{(1)} + cz^2 \cdot Z_{i-3}^{(2)} \\ + cz^3 \cdot Z_{i-4}^{(3)} + \&c. \\ + e \cdot Z_{i-2}^{(0)} + ez \cdot Z_{i-3}^{(1)} + ez^2 \cdot Z_{i-4}^{(2)} \\ + ez^3 \cdot Z_{i-5}^{(3)} + \&c. \\ + \&c. \end{array} \right\}; (\mu) \end{aligned}$$

Ff ij

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r^2} \cdot \left\{ \begin{aligned} & e \cdot Z_{i-n+1}^{(0)} + eZ \cdot Z_{i-n+1}^{(1)} + eZ^2 \cdot Z_{i-n+1}^{(2)} \\ & + eZ^3 \cdot Z_{i-n+1}^{(3)} + \&c. \\ & + \&c. \end{aligned} \right\} \\
& + \&c. \\
& \dots\dots\dots \\
& + \frac{1}{r^{n-1}} \cdot \{ q \cdot Z_{i-n+1}^{(0)} + qZ \cdot Z_{i-n+1}^{(1)} + qZ^2 \cdot Z_{i-n+1}^{(2)} + \&c. \}
\end{aligned}$$

Présentement, si l'on désigne par $\nabla \cdot y_x$, la quantité $ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} \dots + q \cdot y_{x+n}$; par $\nabla^2 \cdot y_x$, la quantité $a \cdot \nabla \cdot y_x + b \cdot \nabla \cdot y_{x+1} + c \cdot \nabla \cdot y_{x+2} \dots + q \cdot \nabla \cdot y_{x+n}$; par $\nabla^3 \cdot y_x$, la quantité $a \cdot \nabla^2 \cdot y_x + b \cdot \nabla^2 \cdot y_{x+1} + c \cdot \nabla^2 \cdot y_{x+2} \dots + q \cdot \nabla^2 \cdot y_{x+n}$, & ainsi de suite; il est visible, par l'article II, que le coefficient de r^x dans le développement de $\frac{uZ}{r}$, fera $\nabla^x \cdot y_{x+n}$; en multipliant donc l'équation précédente par u , & en ne considérant dans chaque terme que le coefficient de r^x , c'est-à-dire en repassant des fonctions génératrices aux variables correspondantes, on aura

$$\begin{aligned}
y_{x+n} = & y_x \cdot \{ bZ_{i-n+1}^{(0)} + cZ_{i-n+1}^{(0)} + eZ_{i-n+1}^{(0)} \dots + q \cdot Z_i^{(0)} \} \\
& + \nabla \cdot y_x \cdot \{ bZ_{i-n+1}^{(1)} + cZ_{i-n+1}^{(1)} + eZ_{i-n+1}^{(1)} \dots + q \cdot Z_{i-n}^{(1)} \} \\
& + \nabla^2 \cdot y_x \cdot \{ bZ_{i-n+1}^{(2)} + cZ_{i-n+1}^{(2)} + eZ_{i-n+1}^{(2)} \dots + q \cdot Z_{i-n}^{(2)} \} \\
& + \&c. \\
& + y_{x+1} \cdot \{ cZ_{i-n+1}^{(0)} + eZ_{i-n+1}^{(0)} \dots + q \cdot Z_{i-n}^{(0)} \} \\
& + \nabla \cdot y_{x+1} \cdot \{ cZ_{i-n+1}^{(1)} + eZ_{i-n+1}^{(1)} \dots + q \cdot Z_{i-n-1}^{(1)} \}; (B) \\
& + \&c.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ y_{x+2} \cdot \{ e Z_{i-n+1}^{(0)} + \dots + q \cdot Z_{i-n}^{(0)} \} \\
 &+ \nabla y_{x+2} \cdot \{ e Z_{i-n+1}^{(1)} + \dots + q \cdot Z_{i-n}^{(1)} \} \\
 &+ \&c. \\
 &\dots\dots\dots \\
 &+ q \cdot y_{x+n-1} \cdot Z_{i-n+1}^{(0)} + q \cdot \nabla y_{x+n-1} \cdot Z_{i-n+1}^{(1)} \\
 &+ q \cdot \nabla^2 y_{x+n-1} \cdot Z_{i-n+1}^{(2)} + \&c.
 \end{aligned}$$

Cette formule servira à interpoler les suites, dont la dernière raison des termes est celle d'une suite récurrente; car il est clair, que dans ce cas, $\nabla \cdot y_x$, $\nabla^2 \cdot y_x$, $\nabla^3 \cdot y_x$, &c, iront toujours en diminuant, & finiront par être nuls dans l'infini.

Si l'une de ces quantités est nulle, par exemple, si l'on a $\nabla \cdot y_x = 0$, la formule précédente donnera l'expression générale de y_x , qui satisfait à cette équation. Pour le faire voir, supposons d'abord $\nabla \cdot y_i = 0$, ou, ce qui revient au même,

$$0 = ay_i + by_{i+1} + cy_{i+2} + \dots + q \cdot y_{i+n};$$

si l'on fait dans ce cas $x = 0$, dans la formule précédente, elle deviendra

$$\begin{aligned}
 y_i = & y_0 \cdot \{ b Z_{i-n+1}^{(0)} + c Z_{i-n+2}^{(0)} + e Z_{i-n+3}^{(0)} + \dots + q \cdot Z_i^{(0)} \} \\
 &+ y_1 \cdot \{ c Z_{i-n+2}^{(0)} + e Z_{i-n+3}^{(0)} + \dots + q \cdot Z_{i-1}^{(0)} \} \\
 &+ y_2 \cdot \{ e Z_{i-n+3}^{(0)} + \dots + q \cdot Z_{i-2}^{(0)} \} \\
 &+ \&c. \\
 &\dots\dots\dots \\
 &+ q \cdot y_{n-1} \cdot Z_{i-n+1}^{(0)}.
 \end{aligned}$$

$$y_i = y_0 \cdot \{ b \cdot Z_{i-1}^{(0)} + c Z_{i-1}^{(1)} + &c\dots\dots + q \cdot Z_{i-1}^{(n)} \}$$
$$+ \nabla \cdot y_0 \cdot \{ b \cdot Z_{i-1}^{(1)} + c Z_{i-1}^{(2)} + &c\dots\dots + q \cdot Z_{i-1}^{(n)} \}$$
$$+ y_1 \cdot \{ c Z_{i-1}^{(0)} + &c\dots\dots + q \cdot Z_{i-1}^{(n)} \}$$
$$+ \nabla y_1 \cdot \{ c Z_{i-1}^{(1)} + &c\dots\dots + q \cdot Z_{i-1}^{(n)} \}$$
$$\dots\dots\dots$$
$$+ q \cdot Z_{i-1}^{(n)} \cdot y_{n-1} + q \cdot Z_{i-1}^{(n)} \cdot \nabla \cdot y_{n-1},$$

Y I.

$$\frac{1}{z^i} = \frac{z^{n-i}}{(a^2 + b^2 + c^2 + \dots + q^2)}.$$

Or le coefficient de r^{x+i} , dans le développement du second membre de cette équation, est égal à celui de θ^{x+i-n} dans le développement de $\frac{1}{(a\theta^x + b\theta^{x-1} + c\theta^{x-2} + \dots + q)^n}$, & par l'article précédent, ce dernier coefficient est égal à $Z_{x+i-n}^{(i-1)}$; donc le coefficient de r^{x+i} , dans le développement de $\frac{\lambda}{z^2}$, fera

$$X_{x+i-n} \cdot Z_0^{(i-1)} + X_{x+i-n-1} \cdot Z_1^{(i-1)} + \dots + X_0 \cdot Z_{x+i-n}^{(i-1)},$$

ou $\Sigma \cdot X_r \cdot Z_{x+i-n-r}^{(i-1)}$, l'intégrale étant prise relativement à r , & depuis $r = 0$ jusqu'à $r = x + i - ns$; cette intégrale fera l'expression de y'_{x+i} .

Dans le cas présent, il est facile de la réduire à des intégrales relatives à i ; car il résulte de l'expression que nous avons donnée de $Z_i^{(i-1)}$ dans l'article précédent, que celle de $Z_{x+i-n-r}^{(i-1)}$ est réductible à des termes de cette forme $K \zeta^r \cdot r^\mu$, en sorte que le terme correspondant de $\Sigma \cdot X_r \cdot Z_{x+i-n-r}^{(i-1)}$ fera $K \cdot \Sigma \cdot \zeta^r \cdot r^\mu X_r$, K étant fonction de $x + i - ns$; or si l'on désigne par la caractéristique Σ' , l'intégrale relative à i , on aura

$$K \cdot \Sigma \cdot \zeta^r \cdot r^\mu \cdot X_r = K \cdot \Sigma' \cdot \zeta^{x+i-n} \cdot (x + i - ns)^\mu \cdot X_{x+i-n},$$

pourvu que l'on termine l'intégrale relative à r , lorsque $r = x + i - ns$; on réduira ainsi l'intégrale $\Sigma \cdot X_r \cdot Z_{x+i-n-r}^{(i-1)}$ à des intégrales uniquement relatives à la variable i . Cela posé, si dans la formule (B) on fait $x = 0$, & $\nabla^s \cdot y_i = 0$, elle donnera

[illegible]

$y_0, \nabla \cdot y_0 \dots \nabla^{s-1} \cdot y_0, y_1, \nabla \cdot y_1 \dots \nabla^{s-1} \cdot y_1, \&c. \dots$
 $\dots y_{n-1}, \nabla \cdot y_{n-1} \dots \nabla^{s-1} \cdot y_{n-1}$ étant les sn arbitraires
 de l'intégrale de l'équation $\nabla^s \cdot y_i = 0$, ou $\nabla^s \cdot y_i + \nabla^s \cdot y_i'' = 0$;
 or $\nabla^s \cdot y_i''$ étant égal à X_i , cette équation devient

$$0 = \nabla' \cdot y_i' + X_i;$$

on aura donc, par la formule précédente, l'intégrale de toutes les équations linéaires aux différences finies, dont les coefficients sont constans, dans le cas où elles ont un dernier terme qui est fonction de i .

vii.

ON peut donner à l'expression de $\frac{1}{r'}$, une infinité d'autres formes parmi lesquelles il s'en trouve qui peuvent être

être utiles dans plusieurs cas. Voici comment on peut y parvenir.

Pour cela, supposons qu'au lieu de donner, comme ci-dessus, à $\frac{1}{r}$, cette forme

$$\frac{1}{r} = Z + \frac{1}{r} \cdot Z^{(1)} + \frac{1}{r^2} \cdot Z^{(2)} \dots + \frac{1}{r^{n-1}} \cdot Z^{(n-1)},$$

on lui donne celle-ci,

$$\frac{1}{r} = Z + \left(\frac{1}{r} - 1\right) \cdot Z^{(1)} + \left(\frac{1}{r} - 1\right)^2 \cdot Z^{(2)} \dots + \left(\frac{1}{r} - 1\right)^{n-1} \cdot Z^{(n-1)};$$

la question se réduit à déterminer Z , $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, &c.

On mettra d'abord l'équation

$$z = a + \frac{b}{r} + \frac{c}{r^2} \dots \dots \dots + \frac{p}{r^{n-1}} + \frac{q}{r^n};$$

sous cette forme,

$$z = a' + b' \cdot \left(\frac{1}{r} - 1\right) + c' \cdot \left(\frac{1}{r} - 1\right)^2 \dots \dots \dots \\ \dots + p' \cdot \left(\frac{1}{r} - 1\right)^{n-1} + q' \cdot \left(\frac{1}{r} - 1\right)^n,$$

& l'on aura

$$a = a' - b' + c' - \&c. \dots \dots \dots \mp p' \pm q';$$

les signes supérieurs ayant lieu si n est pair, & les signes inférieurs si n est impair. On multipliera ensuite, comme précédemment, le numérateur & le dénominateur de la

fraction $\frac{1}{1 - \frac{\theta}{r}}$, par

$$(a - z) \cdot \theta^n + b \theta^{n-1} + c \theta^{n-2} \dots + p \theta + q,$$

en observant de substituer dans le numérateur, 1.^o au lieu de z ,

$$a' + b' \cdot \left(\frac{1}{r} - 1\right) + c' \cdot \left(\frac{1}{r} - 1\right)^2 + \&c;$$

234 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

2.^o au lieu de $a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} + \&c.$ la quantité

$$\theta^n \cdot \{a' + b' \cdot (\frac{1}{\theta} - 1) + c' \cdot (\frac{1}{\theta} - 1)^2 + \&c.\}$$

Si de plus, on fait, pour abrégér, $\frac{1}{\theta} - 1 = \frac{1}{\theta'}$,

on aura

$$\frac{b' \cdot \theta^{n-1} \cdot (1 - \theta - \frac{\theta}{\theta'}) + c' \cdot \theta^{n-2} \cdot [(1 - \theta)^2 - \frac{\theta^2}{\theta'^2}] + \&c. \dots + q \cdot [(1 - \theta)^n - \frac{\theta^n}{\theta'^n}]}{(1 - \frac{\theta}{\theta'}) \cdot (a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} \dots + p\theta + q - z\theta^n)}$$

or on a $1 - \frac{\theta}{\theta'} = 1 - \theta - \frac{\theta}{\theta'}$; en divisant donc le numérateur de la fraction précédente, par cette quantité, elle se réduira à celle-ci,

$$\frac{b' \cdot \theta^{n-1} + c' \theta^{n-2} \cdot (1 - \theta + \frac{\theta}{\theta'}) + c' \theta^{n-3} \cdot [(1 - \theta)^2 + (1 - \theta) \cdot \frac{\theta}{\theta'} + \frac{\theta^2}{\theta'^2}] + \&c. + q \cdot [(1 - \theta)^{n-1} + (1 - \theta)^{n-2} \cdot \frac{\theta}{\theta'} + (1 - \theta)^{n-3} \cdot \frac{\theta^2}{\theta'^2} + \&c.]}{a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} \dots + p\theta + q - z\theta^n}$$

ou, ce qui revient au même, à

$$\frac{b' \theta^{n-1} + c' \theta^{n-2} \cdot (\frac{1}{\theta} - 1) + c' \cdot \theta^{n-3} \cdot (\frac{1}{\theta} - 1)^2 \dots + q \theta^{n-1} \cdot (\frac{1}{\theta} - 1)^{n-1} + \frac{\theta^{n-1}}{\theta'^{n-1}} \cdot \{c' + c' \cdot (\frac{1}{\theta} - 1) \dots + q \cdot (\frac{1}{\theta} - 1)^{n-2}\} + \frac{\theta^{n-2}}{\theta'^{n-2}} \cdot \{c' + \&c. \dots + q \cdot (\frac{1}{\theta} - 1)^{n-3}\} + \dots + \frac{q \theta^{n-1}}{\theta'^{n-1}}}{a\theta^n + b\theta^{n-1} + c\theta^{n-2} \dots + p\theta + q - z\theta^n}$$

De-là, il est facile de conclure que si l'on conserve à $Z_r^{(n-1)}$, la même signification que nous lui avons donnée dans l'article V, & que l'on considère qu'en désignant par q_i , le coefficient de θ^i dans le développement d'une fonction

quelconque de θ , ce même coefficient dans le développement de cette fonction multipliée par $(\frac{1}{\theta} - 1)^\mu$, fera, par l'article II, $\Delta^\mu . q_i$, on aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{i!} = & b^i . Z_{i-n+1}^{(0)} + b^i . z . Z_{i-2n+1}^{(1)} + b^i . z^2 . Z_{i-3n+1}^{(2)} + \&c. \\ & + c^i . \Delta . Z_{i-n+1}^{(0)} + c^i . z . \Delta . Z_{i-2n+1}^{(1)} \\ & + c^i . z^2 . \Delta . Z_{i-3n+1}^{(2)} + \&c. \\ & + e^i . \Delta^2 . Z_{i-n+1}^{(0)} + e^i . z . \Delta^2 . Z_{i-2n+1}^{(1)} \\ & + e^i . z^2 . \Delta^2 . Z_{i-3n+1}^{(2)} + \&c. \\ & \dots\dots\dots \\ & + q . \Delta^{n-1} . Z_{i-n+1}^{(0)} + q . z . \Delta^{n-1} . Z_{i-2n+1}^{(1)} \\ & + q . z^2 . \Delta^{n-1} . Z_{i-3n+1}^{(2)} + \&c. \end{aligned} \left. \vphantom{\frac{1}{i!}} \right\} i(\mu^i)$$

$$+ \frac{1}{i!} \cdot \left\{ \begin{aligned} & c^i . Z_{i-n+1}^{(0)} + c^i . z . Z_{i-2n+1}^{(1)} + \&c. \\ & + e^i . \Delta . Z_{i-n+1}^{(0)} + e^i . z^2 . \Delta . Z_{i-2n+1}^{(1)} + \&c. \\ & + \&c. \end{aligned} \right\}$$

$$+ \frac{1}{i!} \cdot \left\{ \begin{aligned} & e^i . Z_{i-n+1}^{(0)} + e^i . z . Z_{i-2n+1}^{(1)} + \&c. \\ & + \&c. \end{aligned} \right\}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$+ \frac{q}{i!} \cdot \left\{ Z_{i-n+1}^{(0)} + z . Z_{i-2n+1}^{(1)} + \&c. \right\}$$

Présentement, il est visible par l'article II, que le coefficient de r dans le développement de la fonction $\frac{r z'}{i! \mu}$, est

$\Delta^\mu . \nabla^i . y_n$; l'équation précédente donnera donc en la

G g ij

236 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

multipliant par u , & en repassant des fonctions génératrices aux variables correspondantes,

$$\begin{aligned}
 y_{x+i} = & y_x \cdot \{ b^i \cdot Z_{i-n+1}^{(0)} + c^i \cdot \Delta \cdot Z_{i-n+1}^{(0)} + e^i \cdot \Delta^2 \cdot Z_{i-n+1}^{(0)} \dots \\
 & \dots + q \cdot \Delta^{n-1} \cdot Z_{i-n+1}^{(0)} \} \\
 & + \nabla \cdot y_x \cdot \{ b^i \cdot Z_{i-2n+1}^{(1)} + c^i \cdot \Delta \cdot Z_{i-2n+1}^{(1)} + e^i \cdot \Delta^2 \cdot Z_{i-2n+1}^{(1)} \dots \\
 & \dots + q \cdot \Delta^{n-1} \cdot Z_{i-2n+1}^{(1)} \} \\
 & + \nabla^2 \cdot y_x \cdot \{ b^i \cdot Z_{i-3n+1}^{(2)} + c^i \cdot \Delta \cdot Z_{i-3n+1}^{(2)} + e^i \cdot \Delta^2 \cdot Z_{i-3n+1}^{(2)} \dots \\
 & \dots + q \cdot \Delta^{n-1} \cdot Z_{i-3n+1}^{(2)} \} \\
 & + \&c. \\
 & + \Delta \cdot y_x \cdot \{ c^i \cdot Z_{i-n+1}^{(0)} + e^i \cdot \Delta \cdot Z_{i-2n+1}^{(0)} \dots \dots \\
 & \dots \dots + q \cdot \Delta^{n-2} \cdot Z_{i-n+1}^{(0)} \} \\
 & + \Delta \cdot \nabla \cdot y_x \cdot \{ c^i \cdot Z_{i-2n+1}^{(1)} + e^i \cdot \Delta \cdot Z_{i-3n+1}^{(1)} \dots \dots \\
 & \dots \dots + q \cdot \Delta^{n-2} \cdot Z_{i-2n+1}^{(1)} \} \\
 & + \Delta \cdot \nabla^2 \cdot y_x \cdot \{ c^i \cdot Z_{i-3n+1}^{(2)} + e^i \cdot \Delta \cdot Z_{i-4n+1}^{(2)} \dots \dots \\
 & \dots \dots + q \cdot \Delta^{n-2} \cdot Z_{i-3n+1}^{(2)} \} \\
 & + \&c. \\
 & + \Delta^2 \cdot y_x \cdot \{ e^i \cdot Z_{i-n+1}^{(0)} \dots \dots + q \cdot \Delta^{n-3} \cdot Z_{i-n+1}^{(0)} \} \\
 & + \Delta^2 \cdot \nabla \cdot y_x \cdot \{ e^i \cdot Z_{i-2n+1}^{(1)} \dots \dots + q \cdot \Delta^{n-3} \cdot Z_{i-2n+1}^{(1)} \} \\
 & + \&c. \\
 & + q \cdot Z_{i-n+1}^{(0)} \cdot \Delta^{n-1} \cdot y_x + q \cdot Z_{i-2n+1}^{(1)} \cdot \Delta^{n-1} \cdot \nabla \cdot y_x \\
 & + q \cdot Z_{i-3n+1}^{(2)} \cdot \Delta^{n-1} \cdot \nabla^2 \cdot y_x + \&c.
 \end{aligned}$$

V I I I.

SUPPOSONS dans la formule précédente, x & i infiniment grands, de manière que l'on ait $i = \frac{x^i}{\partial x^i}$ & $x = \frac{\partial}{\partial x^i}$, y_{x+i}

deviendra une fonction de $\varpi + x'$, que nous désignerons par $\phi(\varpi + x')$; supposons de plus

$$a' = a''; b' = \frac{b''}{\partial x'}; c' = \frac{c''}{\partial x'^2} \dots \dots q = \frac{q''}{\partial x'^n};$$

l'équation

$$0 = a' + b' \cdot \left(\frac{1}{\theta} - 1\right) + c' \cdot \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^2 \dots + q \cdot \left(\frac{1}{\theta} - 1\right)^n,$$

donnera pour θ , n racines de cette forme,

$$\theta = 1 + f \partial x'; \theta = 1 + f' \partial x'; \theta = 1 + f'' \partial x'; \&c.$$

ce seront les quantités que nous avons nommées $a, a', a'', \&c.$ dans l'expression de $Z^{(i-1)}$ de l'article V, & les valeurs de $f, f', f'', \&c.$ seront données par les n racines de l'équation

$$0 = a'' - b'' f + c'' f^2 \dots \dots \pm q'' \cdot f^n.$$

Maintenant, si l'on fait $\theta = 1 + h \partial x'$, on aura

$$\frac{1}{\theta^i} = \frac{1}{(1 + h \partial x')^i}; \text{ le logarithme hyperbolique de cette der-}$$

nière quantité est $-i \log. (1 + h \partial x') = -i h \partial x' = -h x';$

d'où l'on tire $\frac{1}{\theta^i} = e^{-h x'}$, e étant ici le nombre dont

le logarithme hyperbolique est l'unité; on a d'ailleurs

$$a = a' - b' + c' - \&c. \dots \pm q = a'' - \frac{b''}{\partial x'} + \frac{c''}{\partial x'^2} \dots \pm \frac{q''}{\partial x'^n}$$

& cette valeur de a se réduit au terme $\pm \frac{q''}{\partial x'^n}$, parce qu'il

est infiniment plus grand que les autres; l'expression de $Z^{(i-1)}$

de l'article V, donnera donc en y changeant r en $i - 1$,

$$Z_{i-1}^{(i-1)} = - \frac{\partial x'}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (i-1) \cdot (\pm q'' f^{\partial h^{i-1}})} \cdot \partial^{i-1} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{e^{-h x'}}{(h-f')^2 \cdot (h-f'')^2 \cdot \&c.} \\ + \frac{e^{-h x'}}{(h-f')^2 \cdot (h-f'')^2 \cdot \&c.} \\ + \frac{e^{-h x'}}{(h-f')^2 \cdot (h-f'')^2 \cdot \&c.} \\ + \&c. \end{array} \right\}$$

238 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

la différence ∂^{s-1} étant prise en ne faisant varier que h , & en substituant, après les différenciations, f au lieu de h dans le premier terme, f' au lieu de h dans le second terme, & ainsi de suite. Nommons $X^{(s-1)} \cdot \partial x'$ la quantité précédente, nous aurons, à l'infiniment petit près,

$$Z_{i \pm \mu}^{(s-1)} = Z_{i-}^{(s-1)} = X^{(s-1)} \cdot \partial x';$$

d'ailleurs, on a $y_x = \varphi(\varpi)$, & la caractéristique Δ des différences finies doit se changer ici dans la caractéristique ∂ des différences infiniment petites; en sorte que l'équation

$$\nabla \cdot y_x = a y_x + b y_{x+1} + c y_{x+2} + \&c.$$

ou, ce qui revient au même, celle-ci,

$$\nabla \cdot y_x = a'' + \frac{b''}{\partial x'} \cdot \Delta \cdot y_x + \frac{c''}{\partial x'^2} \cdot \Delta^2 \cdot y_x + \&c.$$

devient, en y changeant $\partial x'$ en $\partial \varpi$,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot y_x = a'' + b'' \cdot \frac{\partial \cdot \varphi(\varpi)}{\partial \varpi} + c'' \cdot \frac{\partial^2 \cdot \varphi(\varpi)}{\partial \varpi^2} \\ + e'' \cdot \frac{\partial^3 \cdot \varphi(\varpi)}{\partial \varpi^3} \dots + g'' \cdot \frac{\partial^4 \cdot \varphi(\varpi)}{\partial \varpi^4}; \end{aligned}$$

l'expression de $y_{x+\mu}$ trouvée dans l'article précédent, deviendra donc

$$\begin{aligned} \varphi \cdot (\varpi + x') = \\ \varphi(\varpi) \cdot \left\{ b'' X^{(0)} + c'' \cdot \frac{\partial X^{(0)}}{\partial x'} + e'' \cdot \frac{\partial^2 X^{(0)}}{\partial x'^2} + \&c. \right\} \\ + \nabla \cdot \varphi(\varpi) \cdot \left\{ b'' X^{(1)} + c'' \cdot \frac{\partial X^{(1)}}{\partial x'} + e'' \cdot \frac{\partial^2 X^{(1)}}{\partial x'^2} + \&c. \right\} \\ + \nabla^2 \cdot \varphi(\varpi) \cdot \left\{ b'' X^{(2)} + c'' \cdot \frac{\partial X^{(2)}}{\partial x'} + e'' \cdot \frac{\partial^2 X^{(2)}}{\partial x'^2} + \&c. \right\} \\ + \&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial \cdot \varphi(\varpi)}{\partial \varpi} \cdot \{c'' X^{(0)} + e'' \cdot \frac{\partial X^{(0)}}{\partial x^1} + \&c.\} \\
& + \frac{\partial \cdot \nabla \cdot \varphi(\varpi)}{\partial \varpi} \cdot \{c'' X^{(1)} + e'' \cdot \frac{\partial X^{(1)}}{\partial x^1} + \&c.\} \\
& + \frac{\partial \cdot \nabla^2 \cdot \varphi(\varpi)}{\partial \varpi} \cdot \{c'' X^{(2)} + e'' \cdot \frac{\partial X^{(2)}}{\partial x^1} + \&c.\} \\
& + \&c. \\
& + \frac{\partial^2 \cdot \varphi(\varpi)}{\partial \varpi^2} \cdot \{e'' X^{(0)} + \&c.\} \quad ; (C) \\
& + \frac{\partial^2 \cdot \nabla \cdot \varphi(\varpi)}{\partial \varpi^2} \cdot \{e'' X^{(1)} + \&c.\} \\
& + \&c. \\
& + q'' \cdot \frac{\partial^{s-1} \cdot \varphi(\varpi)}{\partial \varpi^{s-1}} \cdot X^{(0)} + q'' \cdot \frac{\partial^{s-1} \cdot \nabla \cdot \varphi(\varpi)}{\partial \varpi^{s-1}} \cdot X^{(1)} \\
& + q'' \cdot \frac{\partial^{s-1} \cdot \nabla^2 \cdot \varphi(\varpi)}{\partial \varpi^{s-1}} \cdot X^{(2)} + \&c.
\end{aligned}$$

Cette formule servira à interpoler les suites, dont la dernière raison des termes est celle d'une équation-linéaire aux différences infiniment petites dont les coefficients sont constans.

Si l'on a

$$\nabla \cdot \varphi(\varpi) = a'' \cdot \varphi(\varpi) + b'' \cdot \frac{\partial \cdot \varphi(\varpi)}{\partial \varpi},$$

$$\text{on aura } f = \frac{a''}{b''}, \&c \nabla \cdot \varphi(\varpi) = b'' \cdot e^{-f\varpi} \cdot \frac{\partial \cdot [e^{f\varpi} \cdot \varphi(\varpi)]}{\partial \varpi};$$

l'expression de $X^{(s-1)}$ devient dans ce cas particulier,

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (s-1) \cdot b''^s} \cdot x^{s-1} \cdot e^{-fx^1};$$

on aura donc

$$\begin{aligned}
\varphi \cdot (\varpi + x^1) &= e^{-f\varpi - fx^1} \cdot \left\{ e^{f\varpi} \cdot \varphi(\varpi) + \frac{x^1}{b''} \cdot \frac{\partial \cdot [e^{f\varpi} \cdot \varphi(\varpi)]}{\partial \varpi} \right. \\
&\quad \left. + \frac{x^{1^2}}{b''^2} \cdot \frac{\partial^2 \cdot [e^{f\varpi} \cdot \varphi(\varpi)]}{\partial \varpi^2} + \&c. \right\}
\end{aligned}$$

En supposant $b'' = 1$, & $f = 0$, par conséquent, $a'' = 0$; on aura la formule connue de Taylor.

La formule (C) se terminera toutes les fois que l'on aura $\nabla^2 \cdot \varphi(\varpi) = 0$; si par exemple, $\nabla \cdot \varphi(\varpi) = 0$, on aura

$$\begin{aligned} & \varphi \cdot (\varpi + x') = \\ & \varphi(\varpi) \cdot \left\{ b'' \cdot X^{(0)} + c'' \cdot \frac{\partial X^{(0)}}{\partial x'} + \&c. \dots + q'' \cdot \frac{\partial^{n-1} X^{(0)}}{\partial x'^{n-1}} \right\} \\ & + \frac{\partial \varphi(\varpi)}{\partial \varpi} \cdot \left\{ c'' \cdot X^{(0)} + e'' \cdot \frac{\partial X^{(0)}}{\partial x'} + \&c. \dots + q'' \cdot \frac{\partial^{n-2} X^{(0)}}{\partial x'^{n-2}} \right\} \\ & \dots \dots \dots \\ & + q'' X^{(0)} \cdot \frac{\partial^{n-1} \varphi(\varpi)}{\partial \varpi^{n-1}}, \end{aligned}$$

ce sera l'intégrale de l'équation $0 = \nabla \varphi(\varpi + x')$, ou, ce qui revient au même, de celle-ci,

$$\begin{aligned} 0 = & a'' \cdot \varphi(\varpi + x') + b'' \cdot \frac{\partial \varphi(\varpi + x')}{\partial x'} \\ & + c'' \cdot \frac{\partial^2 \varphi(\varpi + x')}{\partial x'^2} \dots + q'' \cdot \frac{\partial^n \varphi(\varpi + x')}{\partial x'^n}; \end{aligned}$$

$$\varphi(\varpi), \frac{\partial \varphi(\varpi)}{\partial \varpi}, \frac{\partial^2 \varphi(\varpi)}{\partial \varpi^2}, \dots, \frac{\partial^{n-1} \varphi(\varpi)}{\partial \varpi^{n-1}} \text{ étant les } n$$

constantes arbitraires que l'intégration introduit. On aura, par la même formule, les intégrales des équations $\nabla^2 \cdot \varphi(\varpi + x') = 0$, $\nabla^3 \cdot \varphi(\varpi + x') = 0$, &c.

Si l'on fait $\varphi(\varpi + x') = y'_{x'} + y''_{x'}$ & que l'on suppose $\nabla^2 \cdot y'_{x'} = V$, V étant une fonction donnée de x' ; on trouvera facilement, par l'article VI, que si l'on change dans l'expression de $X^{(n-1)}$, x' en $\varpi + x' - r$, & dans V , x' en $r - \varpi$, & que l'on nomme R ce que devient la première de ces deux quantités, & S ce que devient la seconde, on aura $y''_{x'} = \int R S \partial r$, l'intégrale étant prise depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \varpi + x'$; si l'on suppose de plus, dans la formule (C), $\nabla^2 \cdot \varphi(\varpi + x') = 0$, elle

elle donnera

$$\begin{aligned}
 y'' + \int R S \partial r = & y_0 \cdot \{ b'' X^{(0)} + c'' \cdot \frac{\partial X^{(0)}}{\partial x^1} + \&c. \} \\
 & + \nabla \cdot y_0 \cdot \{ b'' X^{(1)} + c'' \cdot \frac{\partial X^{(1)}}{\partial x^1} + \&c. \} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + \nabla^{(r-1)} \cdot y_0 \cdot \{ b'' X^{(r-1)} + c'' \cdot \frac{\partial X^{(r-1)}}{\partial x^1} + \&c. \} \\
 & + \left(\frac{\partial y_0}{\partial \varpi} \right) \cdot \{ c'' \cdot X^{(0)} + \&c. \} \\
 & + \nabla \cdot \left(\frac{\partial y_0}{\partial \varpi} \right) \cdot \{ c'' \cdot X^{(1)} + \&c. \} \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + \nabla^{(r-1)} \cdot \left(\frac{\partial y_0}{\partial \varpi} \right) \cdot \{ c'' \cdot X^{(r-1)} + \&c. \} \\
 & + \&c. \\
 & + q'' \cdot \left(\frac{\partial^{r-1} y_0}{\partial \varpi^{r-1}} \right) \cdot X^{(0)} + q'' \cdot \nabla \cdot \left(\frac{\partial^{r-1} y_0}{\partial \varpi^{r-1}} \right) \cdot X^{(1)} \dots \\
 & \dots + q'' \cdot \nabla^{r-1} \cdot \left(\frac{\partial^{r-1} y_0}{\partial \varpi^{r-1}} \right) \cdot X^{(r-1)},
 \end{aligned}$$

$y_0, \left(\frac{\partial y_0}{\partial \varpi} \right), \&c. \nabla \cdot y_0, \nabla \cdot \left(\frac{\partial y_0}{\partial \varpi} \right), \&c.$ étant les sn constantes arbitraires de l'intégrale de l'équation

$$0 = \nabla^r \cdot \phi(\varpi + x^1), \text{ ou } \nabla^r \cdot y^1_{x^1} + V = 0;$$

la formule précédente servira donc à intégrer toutes les équations linéaires aux différences infiniment petites, dont les coefficients sont constans, lorsqu'elles ont un dernier terme qui est fonction de x^1 seul.

I X.

De la transformation des Suites.

ON voit par ce qui précède, avec quelle facilité toute la théorie des suites récurrentes découle de la considération

Mém. 1779.

H h

242 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

des fonctions génératrices ; cette considération peut servir encore à transformer d'une manière plus générale & plus simple que par les méthodes connues , une suite dans une autre dont les termes suivent une loi donnée.

Pour cela , considérons la suite

$$y_0 + y_1 + y_2 + y_3 \dots + y_x + y_{x+1} \dots + y_\infty; (\gamma)$$

& nommons, comme ci-dessus, u la somme de la série,

$$y_0 + y_1 \cdot t + y_2 \cdot t^2 + y_3 \cdot t^3 \dots + y_x \cdot t^x + y_{x+1} \cdot t^{x+1} \dots + y_\infty \cdot t^\infty;$$

il est visible que le coefficient de t^x , dans le développement de la fraction $\frac{u}{1 - \frac{1}{t}}$, sera égal à la somme de la suite

proposée (γ) , depuis le terme y_x jusqu'à l'infini: or, si l'on multiplie le numérateur & le dénominateur de cette fraction par

$$a + b + c + e + \&c. = (a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} + \&c.),$$

le numérateur sera divisible par $1 - \frac{1}{t}$, & le quotient de la division sera

$$u \cdot \left\{ \begin{array}{l} b + c + e + \&c. \\ + \frac{1}{t} (c + e + \&c.) + \frac{1}{t^2} (e + \&c.) \\ + \&c. \end{array} \right\};$$

donc si l'on fait pour abréger,

$$a + b + c + e + \&c. = K,$$

$$a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} + \frac{e}{t^3} + \&c. = Z,$$

on aura

$$\frac{u}{1 - \frac{1}{t}} = u \cdot \frac{[b + c + e + \&c. + \frac{1}{t} \cdot (c + e + \&c.) + \frac{1}{t^2} \cdot (e + \&c.) + \&c.]}{K - Z};$$

en développant le second membre de cette équation, par rapport aux puissances de z , on aura

$$a \cdot \left\{ \begin{array}{l} b + c + e + \&c. \\ + \frac{1}{1} \cdot (c + e + \&c.) \\ + \frac{1}{2} \cdot (e + \&c.) \\ + \&c. \end{array} \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{K} + \frac{z}{K^2} + \frac{z^2}{K^3} + \frac{z^3}{K^4} + \&c. \right\}$$

Maintenant, le coefficient de r^x , dans un terme quelconque tel que $\frac{r^x}{r^x}$, est, par l'article II, égal à $\nabla^x \cdot y_{x+x}$; ce coefficient sera donc, dans la quantité précédente, égal à

$$\begin{aligned} (b + c + e + \&c.) \cdot \left\{ \frac{y_x}{K} + \frac{\nabla y_x}{K^2} + \frac{\nabla^2 y_x}{K^3} + \frac{\nabla^3 y_x}{K^4} + \&c. \right\} \\ + (c + e + \&c.) \cdot \left\{ \frac{y_{x+1}}{K} + \frac{\nabla y_{x+1}}{K^2} + \frac{\nabla^2 y_{x+1}}{K^3} + \frac{\nabla^3 y_{x+1}}{K^4} + \&c. \right\} \\ + (e + \&c.) \cdot \left\{ \frac{y_{x+2}}{K} + \frac{\nabla y_{x+2}}{K^2} + \frac{\nabla^2 y_{x+2}}{K^3} + \frac{\nabla^3 y_{x+2}}{K^4} + \&c. \right\} \\ + \&c. \end{aligned}$$

ce sera la valeur de la suite proposée (y) depuis le terme y_x jusqu'à l'infini.

Si l'on fait $x = 0$, on aura une nouvelle suite égale à la proposée, mais dont les termes suivront une autre loi; & si les quantités $\nabla \cdot y_x$, $\nabla^2 y_x$, &c. vont en décroissant, cette nouvelle suite sera convergente; elle se terminera toutes les fois que l'on aura $\nabla^x \cdot y_x = 0$, ce qui aura lieu lorsque la suite proposée sera récurrente; on aura donc de cette manière la somme des séries récurrentes.

La transformation des suites se réduit à déterminer l'intégrale $\Sigma \cdot y_x$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$, & toutes les manières d'exprimer cette intégrale donneront autant de transformées différentes; ce qui consiste, par ce qui

précède, à déterminer le coefficient de r^x dans le développement de $\frac{u}{1 - \frac{1}{r}}$. Pour cela, soit généralement z une

fonction quelconque de $\frac{1}{r}$, & nommons $\nabla \cdot y_x$ le coefficient de r^x dans $u z$; les coefficients de r^x dans $u z^2, u z^3, u z^4$, &c. seront $\nabla^2 \cdot y_x, \nabla^3 \cdot y_x, \nabla^4 \cdot y_x$, &c. Cela posé, on multipliera le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{u}{1 - \frac{1}{r}}$ par $K - z$, & l'on prendra K de manière qu'il soit égal à z , lorsqu'on fait r égal 1 dans cette dernière quantité; $K - z$ fera ainsi divisible par $1 - \frac{1}{r}$. Soit $q + \frac{q^{(1)}}{r} + \frac{q^{(2)}}{r^2} + \frac{q^{(3)}}{r^3} + \&c.$ le quotient de la division; on aura

$$\begin{aligned} \frac{u}{1 - \frac{1}{r}} = & \frac{uq}{K} \cdot \left(1 + \frac{z}{K} + \frac{z^2}{K^2} + \frac{z^3}{K^3} + \&c.\right) \\ & + \frac{uq^{(1)}}{K \cdot r} \cdot \left(1 + \frac{z}{K} + \frac{z^2}{K^2} + \frac{z^3}{K^3} + \&c.\right) \\ & + \&c. \end{aligned}$$

ce qui donne, en repassant des fonctions génératrices à leurs variables correspondantes,

$$\begin{aligned} \Sigma \cdot y_x = & \frac{q \cdot y_x}{K} + \frac{q \cdot \nabla \cdot y_x}{K^2} + \frac{q \cdot \nabla^2 \cdot y_x}{K^3} + \&c. \\ & + \frac{q^{(1)} \cdot y_{x+1}}{K} + \frac{q^{(1)} \cdot \nabla \cdot y_{x+1}}{K^2} + \frac{q^{(1)} \cdot \nabla^2 \cdot y_{x+1}}{K^3} + \&c. \\ & + \frac{q^{(2)} \cdot y_{x+2}}{K} + \frac{q^{(2)} \cdot \nabla \cdot y_{x+2}}{K^2} + \frac{q^{(2)} \cdot \nabla^2 \cdot y_{x+2}}{K^3} + \&c. \\ & + \&c. \end{aligned}$$

l'intégrale $\Sigma \cdot y_x$ étant prise depuis y_x jusqu'à y_∞ ; & si l'on fait dans l'équation précédente $x = 0$, on aura une nouvelle suite égale à la proposée, & qui sera par conséquent la transformée.

X.

THÉORÈMES sur le développement des fonctions & de leurs différences, en séries.

EN appliquant à des cas particuliers les résultats que nous avons donnés dans l'article II, on aura une infinité de théorèmes sur le développement de fonctions en suites; nous allons présenter ici les plus remarquables.

On a généralement

$$u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^n = u \cdot \left\{ \left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^i - 1 \right\}^n,$$

or il est clair que le coefficient de t^x dans le premier membre de cette équation, est la différence $n^{\text{ième}}$ de y_x , x variant de i ;

car ce coefficient dans $u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)$, est $y_{x+1} - y_x$, ou

$\Delta \cdot y_x$, en désignant par la caractéristique Δ les différences finies, lorsque x varie de la quantité i ; d'où il est aisé de conclure que ce même coefficient dans le développement de

$u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^n$, est $\Delta^n \cdot y_x$. D'ailleurs, si l'on développe

$u \cdot \left\{ \left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^i - 1 \right\}^n$, suivant les puissances

de $\frac{1}{t} - 1$, les coefficients de t^x dans les développemens

de $u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)$, $u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^2$, $u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^3$, &c.

seront, par l'article II, $\Delta \cdot y_x$, $\Delta^2 \cdot y_x$, $\Delta^3 \cdot y_x$, &c. en sorte

que ce coefficient dans $u \cdot \left\{ \left(1 + \frac{1}{t} - 1\right)^i - 1 \right\}^n$,

sera $\left\{ \left(1 + \Delta \cdot y_x\right)^i - 1 \right\}^n$, pourvu que dans le développement de cette quantité, on applique à la caractéristique Δ les exposans des puissances de $\Delta \cdot y_x$, & qu'ainsi au lieu d'une puissance quelconque $(\Delta \cdot y_x)^m$, on écrive $\Delta^m \cdot y_x$, on aura donc

$$\Delta^n \cdot y_x = \left\{ \left(1 + \Delta \cdot y_x\right)^i - 1 \right\}^n; (1)$$

246 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Si l'on désigne par la caractéristique Σ l'intégrale finie, lorsque x varie de i , $\Sigma^n . y_x$ sera visiblement égal par l'article II, au coefficient de t^x dans le développement de la fonction $u . (\frac{1}{t} - 1)^{-n}$, en faisant abstraction ici des constantes arbitraires que l'intégration doit introduire; or on'a

$$u . (\frac{1}{t} - 1)^{-n} = u . \{ (1 + \frac{1}{t})^i - 1 \}^{-n};$$

de plus, le coefficient de t^x dans $u . (\frac{1}{t} - 1)^{-n}$, est, quel que soit m , $\Sigma^m . y_x$, en faisant abstraction des constantes arbitraires, & ce coefficient dans $u . (\frac{1}{t} - 1)^{-n}$, est $\Delta^m . y_x$; on aura donc, en faisant toujours abstraction des constantes arbitraires,

$$\Sigma^n . y_x = \{ (1 + \Delta . y_x)^i - 1 \}^{-n}; (2)$$

pourvu que dans le développement du second membre de cette équation, on applique à la caractéristique Δ les exposans des puissances de $\Delta . y_x$, & que l'on change les différences négatives en intégrales; & comme dans ce développement, l'intégrale $\Sigma^n . y_x$ se rencontre, & que cette intégrale peut être censée renfermer n constantes arbitraires, l'équation (2) est encore vraie en ayant égard aux constantes arbitraires.

On peut observer ici que cette équation se déduit de l'équation (1), en y faisant n négatif, & en y changeant les différences négatives en intégrales, c'est-à-dire en écrivant $\Sigma^n . y_x$ au lieu de $\Delta^{-n} . y_x$, & $\Sigma^m . y_x$ au lieu de $\Delta^{-m} . y_x$.

Les équations (1) & (2) auroient également lieu si x , au lieu de varier de l'unité dans $\Delta . y_x$, y varioit d'une quantité quelconque ϖ ; mais alors la variation de x dans $\Delta . y_x$, au lieu d'être i , seroit $i \varpi$. En effet, il est clair que si dans y_x on fait $x = \frac{x'}{\varpi}$, x' variera de ϖ lorsque x variera de

l'unité; $\Delta . y_x$ se changera ainsi dans $\Delta . y_{x'}$, la variation de x' étant ϖ , & $'\Delta . y_x$ se changera dans $'\Delta . y_{x'}$, la variation de x' étant $i\varpi$. Cela posé, si l'on suppose dans ces équations, que la variation de x est infiniment petite & égale à ∂x dans $\Delta . y_x$; cette différence se changera dans la différentielle infiniment petite ∂y_x ; si de plus on fait i infini & $i\partial x = \alpha$, α étant une quantité finie, la variation de x dans $'\Delta . y_x$ fera α ; on aura donc

$$' \Delta^n . y_x = \{ (1 + \partial y_x)^i - 1 \}^n$$

$$' \Sigma^n . y_x = \frac{1}{[(1 + \partial y_x)^i - 1]^n}.$$

or on a

$$\log.(1 + \partial y_x)^i = i . \log.(1 + \partial y_x) = i\partial y_x = i\partial x . \frac{\partial y_x}{\partial x} = \alpha . \frac{\partial y_x}{\partial x},$$

ce qui donne

$$(1 + \partial y_x)^i = e^{\alpha . \frac{\partial y_x}{\partial x}},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; donc

$$' \Delta^n . y_x = (e^{\alpha . \frac{\partial y_x}{\partial x}} - 1)^n; \quad (3)$$

$$' \Sigma^n . y_x = \frac{1}{(e^{\alpha . \frac{\partial y_x}{\partial x}} - 1)^n}; \quad (4)$$

en ayant soin d'appliquer à la caractéristique ∂ les exposans des puissances de ∂y_x , & de changer les différences négatives en intégrales.

Si dans les équations (1) & (2), on suppose encore i infiniment petit & égal à ∂x , on aura $'\Delta^n . y_x = \partial^n . y_x$, & $'\Sigma^n . y_x = \frac{1}{\partial x^n} \int^n . y \partial x^n$; on a d'ailleurs

$$(1 + \Delta y_x)^i = e^{\partial x \log.(1 + \Delta y_x)} = 1 + \partial x \log.(1 + \Delta y_x);$$

248 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
ces équations deviendront ainsi

$$\frac{\partial^n y_x}{\partial x^n} = [\log.(1 + \Delta y_x)]^n; (5)$$

$$\int^n y_x \cdot \partial x^n = \frac{1}{[\log.(1 + \Delta y_x)]^n}; (6)$$

On peut remarquer ici une analogie singulière entre les puissances positives & les différences; l'équation

$${}^1\Delta \cdot y_x = (1 + \Delta y_x)^i - 1$$

a encore lieu en élevant ses deux membres à la puissance n , pourvu que l'on applique aux caractéristiques Δ & ${}^1\Delta$ les puissances de $\Delta \cdot y_x$ & de ${}^1\Delta \cdot y_x$; car il est clair que dans ce cas on aura l'équation (1).

La même analogie subsiste entre les puissances négatives & les intégrales, & l'équation précédente a lieu encore en élevant ses deux membres à la puissance $-n$, pourvu que l'on change en intégrales du même ordre, les puissances négatives de $\Delta \cdot y_x$ & de ${}^1\Delta \cdot y_x$; on formera ainsi l'équation (2).

Il en est de même de l'équation

$${}^1\Delta \cdot y_x = e^{a \cdot \frac{\partial y_x}{\partial x}} - 1,$$

en élevant ses deux membres aux puissances n & $-n$; elle sera encore vraie, & se changera dans les équations (3) & (4), pourvu que l'on change les puissances positives de ${}^1\Delta \cdot y_x$ & de ∂y_x en différences du même ordre, & les puissances négatives en intégrales du même ordre. On voit au reste, que ces analogies tiennent à ce que les produits de la fonction u , génératrice de y_x , par les puissances successives de $\frac{1}{x} - 1$, sont les fonctions génératrices des différences finies successives de y_x , tandis que les quotiens de u , par ces mêmes puissances, sont les fonctions génératrices des intégrales finies de y_x .

XI. LES

X I.

LES formules précédentes ne peuvent être d'usage que dans le cas où les différences finies & infiniment petites de y_x vont en décroissant; mais il y a une infinité de cas dans lesquels cela n'a pas lieu, & où il est cependant utile d'avoir l'expression des différences & des intégrales, en séries convergentes; le plus simple de tous, est celui dans lequel les termes d'une série dont les différences sont convergentes, sont multipliés par les termes d'une progression géométrique: nous allons nous en occuper d'abord.

Le terme général des suites ainsi formées, peut être représenté par $h^x \cdot y_x$, y_x étant le terme général d'une suite dont les différences sont convergentes. Cela posé, nommons u la somme de la suite infinie

$$y_0 + y_1 \cdot h \cdot r + y_2 \cdot h^2 \cdot r^2 + y_3 \cdot h^3 \cdot r^3 + \&c. \dots + y_{\infty} \cdot h^{\infty} \cdot r^{\infty};$$

on a

$$u \cdot \left(\frac{1}{h^r} - 1 \right)^n = u \cdot \{ h^i \cdot \left(1 + \frac{1}{h^r} - 1 \right)^i - 1 \}^n.$$

Le coefficient de r^n , dans le premier membre de cette équation, est la différence finie $n^{\text{ième}}$ de $h^x \cdot y_x$, x variant de la quantité i ; d'ailleurs, si l'on développe le second membre, par rapport aux puissances de $\frac{1}{h^r} - 1$, le coefficient de r^n ,

dans $u \cdot \left(\frac{1}{h^r} - 1 \right)^n$, fera, quel que soit r , $h^x \cdot \Delta^n \cdot y_x$;

l'équation précédente donnera donc, en repassant par l'article II, des fonctions génératrices à leurs variables correspondantes,

$$\Delta^n \cdot h^x \cdot y_x = h^x \cdot \{ h^i \cdot (1 + \Delta \cdot y_x)^i - 1 \}^n; \quad (7)$$

pourvu que dans le développement du second membre de cette équation, on applique à la caractéristique Δ , les exposans des puissances de $\Delta \cdot y_x$, & qu'ainsi, au lieu de $(\Delta y_x)^n$, on écrive $\Delta^n \cdot y_x$, c'est-à-dire y_x .

Mém. 1779.

En changeant n en $-n$, on aura, comme dans l'article précédent,

$${}^n\Sigma.h^n.y_n = \frac{h^n}{[h^n.(1+\Delta y_n)^{-1}-1]^n} + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \&c.... + f; (8)$$

$a, b, \dots f$, étant les n constantes arbitraires de l'intégrale du premier membre, dont l'addition devient inutile dans le cas où $h = 1$, parce qu'alors le second membre renferme l'intégrale $\Sigma^n.y_n$, qu'il ne renferme plus lorsque h diffère de l'unité.

Si l'on suppose y_n égal à une fonction y' de x' , x' étant égal à $\frac{x}{r}$, & r étant supposé infini; on aura $\Delta y_n = \partial y'$,

la différence $\partial x'$ étant égale à $\frac{1}{r}$; de plus, si l'on fait $h' = p$, on aura $h^n = p^n$, & la fonction $h^n.y_n$ se changera dans $p^n.y'$; or, si l'on suppose i infiniment grand, & $\frac{i}{r} = a$, il est clair que x variant de i , x' variera de a ; en sorte que ${}^n\Delta.p^n.y'$ & ${}^n\Sigma.p^n.y'$ seront la différence & l'intégrale finie $n^{\text{ème}}$ de $p^n.y'$, x' variant de la quantité a ; on a d'ailleurs $h^i = p^a$; les équations (7) & (8) deviendront conséquemment

$${}^n\Delta.p^n.y' = p^n \cdot \{p^a \cdot (1 + \partial y')^i - 1\}^n,$$

$${}^n\Sigma.p^n.y' = \frac{p^n}{[p^a \cdot (1 + \partial y')^i - 1]^n} + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \&c,$$

or on a

$$(1 + \partial y')^i = e^{a \cdot \frac{\partial y'}{\partial x'}}; \text{ donc}$$

$${}^n\Delta.p^n.y' = p^n \cdot (p^a \cdot e^{a \cdot \frac{\partial y'}{\partial x'}} - 1)^n; (9)$$

$${}^n\Sigma.p^n.y' = \frac{p^n}{\{p^a \cdot e^{a \cdot \frac{\partial y'}{\partial x'}} - 1\}^n} + ax^{n-1} + bx^{n-2} \dots + f; (10)$$

en ayant soin, dans le développement de ces équations, d'écrire y' , au lieu de $(\frac{\partial y'}{\partial x'})^0$, & $\frac{\partial^\mu y'}{\partial x'^\mu}$, au lieu de $(\frac{\partial y'}{\partial x'})^\mu$, μ étant quelconque.

- Si dans les formules (7) & (8), on suppose i infiniment petit & égal à ∂x , $\Delta^n \cdot h^n \cdot y_x$ se changera dans $\partial^n \cdot h^n \cdot y_x$, & $\Sigma^n \cdot h^n \cdot y_x$ dans $f^n \cdot h^n \cdot y_x$; on a d'ailleurs

$$h^i \cdot (1 + \Delta \cdot y_x)^i = 1 + \partial x \cdot \log. [h(1 + \Delta \cdot y_x)];$$

partant on aura

$$\frac{\partial^n \cdot h^n \cdot y_x}{\partial x^n} = h^n \cdot [\log. h \cdot (1 + \Delta \cdot y_x)]^n; \quad (11)$$

$$f^n \cdot h^n \cdot y_x \cdot \partial x^n = \frac{h^n}{[\log. h \cdot (1 + \Delta \cdot y_x)]^n} + ax^{n-1} + bx^{n-2} \dots + f; \quad (12)$$

Je dois observer ici que les équations (1), (2), (3), (4), (5) & (6) de l'article précédent, ont été trouvées par M. de la Grange, dans les Mémoires de Berlin pour l'année 1771, au moyen de l'analogie qui existe entre les puissances positives & les différences, & entre les puissances négatives & les intégrales; mais cet illustre Auteur se contente de la supposer sans en donner la démonstration qu'il regarde comme très-difficile; quant aux équations (7), (8), (9), (10), (11) & 12, elles sont nouvelles, à l'exception de l'équation (10), dont M. Euler a donné le cas particulier où $n = 1$, dans ses Institutions de Calcul différentiel.

X I I.

ON auroit une infinité de théorèmes analogues à ceux des articles précédens, si au lieu de considérer les différences & les intégrales de y_x , on considéroit toute autre fonction de cette variable; il sera facile de les déduire de la solution générale du Problème suivant.

$\Gamma \cdot (y_x)$ représentant une fonction quelconque linéaire de y_x ,

I i ij

y_{x+1} , y_{x+2} , &c. & $\nabla \cdot y_x$ une autre fonction linéaire de ces mêmes variables; on propose de trouver l'expression de $\Gamma \cdot y_x$, dans une suite ordonnée suivant les quantités $\nabla \cdot y_x$, $\nabla^2 \cdot y_x$, $\nabla^3 \cdot y_x$, &c.

Pour cela, soit u la fonction génératrice de y_x , u s celle de $\Gamma \cdot y_x$, & uz celle de $\nabla \cdot y_x$, s & z étant fonctions de $\frac{1}{t}$; on commencera par tirer de l'équation qui exprime la relation de $\frac{1}{t}$ & de z , la valeur de $\frac{1}{t}$ en z , & en la substituant dans s , on aura la valeur de s en z ; mais comme il peut arriver que l'on ait plusieurs valeurs de $\frac{1}{t}$ en z , on aura autant d'expressions différentes de s . Pour en avoir une qui puisse appartenir indifféremment à toutes ces valeurs de s , nous supposerons que le nombre des valeurs de $\frac{1}{t}$ en z soit n , & nous donnerons à l'expression de s la forme suivante,

$$s = Z + \frac{1}{t} \cdot Z^{(1)} + \frac{1}{t^2} \cdot Z^{(2)} \dots + \frac{1}{t^{n-1}} \cdot Z^{(n-1)},$$

Z , $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, &c. étant des fonctions de Z , qu'il s'agit de déterminer; or si l'on substitue successivement dans cette équation, au lieu de $\frac{1}{t}$, ses n valeurs en z , on formera n équations au moyen desquelles on déterminera les n quantités Z , $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, &c. il ne s'agira plus ensuite que de réduire ces quantités en séries ordonnées par rapport aux puissances de z , & de les substituer dans l'équation précédente. Cela posé, si l'on multiplie cette équation par u , le coefficient de t^n dans us , sera $\Gamma \cdot y_x$; ce même coefficient dans un terme quelconque, tel que $\frac{u z^n}{t^n}$, sera par l'article II, égal à $\nabla^n \cdot y_{x+n}$. l'équation précédente donnera donc, en repassant des fonctions génératrices aux variables correspondantes, une expression de

$\Gamma \cdot y_x$ par une suite ordonnée suivant les quantités $\nabla \cdot y_x$, $\nabla^2 \cdot y_x$, $\nabla^3 \cdot y_x$, &c. $\nabla \cdot y_{x+1}$, $\nabla^2 \cdot y_{x+1}$, &c. $\nabla \cdot y_{x+n-1}$, &c.

On peut supposer encore pour plus de généralité, que les quantités $Z^{(1)}$, $Z^{(2)}$, $Z^{(3)}$, &c. au lieu d'être multipliées par $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1^2}$, $\frac{1}{1^3}$, &c. sont multipliées par des fonctions quelconques de $\frac{1}{1}$, & l'on aura par ce moyen, une infinité d'expressions différentes de $\Gamma \cdot y_x$.

Si l'on suppose

$$s = \frac{1}{1^a},$$

$$z = a + \frac{b}{1} + \frac{c}{1^2} + \dots + \frac{g}{1^n},$$

$\Gamma \cdot y_x$ se changera dans y_{x+1} ; on aura donc, par ce procédé, la valeur de y_{x+1} en fonction de $\nabla \cdot y_x$, $\nabla^2 \cdot y_x$, &c. mais la méthode que nous avons donnée pour cet objet dans l'article V, est d'un usage beaucoup plus facile.

X I I I.

Des Suites à deux variables.

Considérons une fonction $y_{x, x'}$ de deux variables x & x' , & nommons u la suite infinie,

$$\begin{aligned} & y_{0,0} + y_{1,0} \cdot t + y_{2,0} \cdot t^2 + y_{3,0} \cdot t^3 + \dots + y_{n,0} \cdot t^n + y_{n+1,0} \cdot t^{n+1} + \dots \\ & \dots + y_{\infty,0} \cdot t^\infty \\ & + y_{0,1} \cdot t^1 + y_{1,1} \cdot t^1 \cdot t + y_{2,1} \cdot t^1 \cdot t^2 + \dots + y_{n-1,1} \cdot t^1 \cdot t^{n-1} + y_{n,1} \cdot t^1 \cdot t^n + \dots \\ & \dots + y_{\infty,1} \cdot t^1 \cdot t^\infty \\ & + y_{0,2} \cdot t^{1^2} + y_{1,2} \cdot t^{1^2} \cdot t + \dots + y_{n-2,2} \cdot t^{1^2} \cdot t^{n-2} + \dots \\ & \dots + y_{\infty,2} \cdot t^{1^2} \cdot t^\infty \\ & + \text{&c.} \end{aligned}$$

le coefficient de $t^x, t^{x'}$, sera $y_{x,x'}$; ainsi u sera la fonction génératrice de $y_{x,x'}$, & si l'on désigne par la caractéristique Δ , les différences finies lorsque x seul varie, & par la caractéristique Δ' , ces différences lorsque x' seul varie, la fonction génératrice de $\Delta, y_{x,x'}$ sera, par l'article II, $u \cdot (\frac{1}{t} - 1)$, & celle de $\Delta', y_{x,x'}$ sera $u \cdot (\frac{1}{t'} - 1)$; partant la fonction génératrice de $\Delta, \Delta', y_{x,x'}$ sera $u \cdot (\frac{1}{t} - 1) \cdot (\frac{1}{t'} - 1)$; d'où il est facile de conclure que celle de $\Delta^i, \Delta'^{i'} \cdot y_{x,x'}$ sera $u \cdot (\frac{1}{t} - 1)^i \cdot (\frac{1}{t'} - 1)^{i'}$.

En général, si l'on désigne par $\nabla \cdot y_{x,x'}$ la quantité

$$\begin{aligned} A \cdot y_{x,x'} + B \cdot y_{x+1,x'} + C \cdot y_{x+2,x'} + \&c, \\ + B' \cdot y_{x,x'+1} + C' \cdot y_{x,x'+2} + \&c, \\ + C'' \cdot y_{x,x'+3} + \&c, \\ + \&c. \end{aligned}$$

Si l'on désigne pareillement par $\nabla^2 \cdot y_{x,x'}$, une fonction dans laquelle $\nabla \cdot y_{x,x'}$ entre de la même manière que $y_{x,x'}$ entre dans $\nabla \cdot y_{x,x'}$; si l'on désigne encore par $\nabla^3 \cdot y_{x,x'}$, une fonction dans laquelle $\nabla^2 \cdot y_{x,x'}$ entre de la même manière que $y_{x,x'}$ dans $\nabla \cdot y_{x,x'}$, & ainsi de suite; la fonction génératrice de $\nabla^2 \cdot y_{x,x'}$ sera

$$u \cdot \left\{ \begin{aligned} &A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \&c. \\ &+ \frac{B'}{t'} + \frac{C'}{t't'} + \&c. \\ &+ \frac{C''}{t'^2} + \&c. \\ &+ \&c. \end{aligned} \right\}.$$

Partant

$$x \cdot r^i \cdot t^{i^2} \cdot \left(\frac{1}{r} - 1\right)^i \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{i^2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} A + \frac{B}{r} + \&c. \\ + \frac{B'}{r} + \&c. \end{array} \right\}^2$$

est la fonction génératrice de $\Delta^i \cdot \Delta^{i^2} \cdot \nabla^n \cdot y_{x+n} \cdot y_{x'}^{n^2}$.

s étant supposée une fonction quelconque de $\frac{1}{r}$ & de $\frac{1}{t}$, si l'on développe s^i suivant les puissances de ces variables, & que l'on désigne par $\frac{K}{r^m \cdot t^{m^2}}$ un terme quelconque de ce développement; le coefficient de $r^r \cdot t^{r^2}$ dans $\frac{K \cdot s}{r^m \cdot t^{m^2}}$ sera $K \cdot y_{x+m} \cdot y_{x'}^{m^2}$; on aura donc le coefficient de $r^r \cdot t^{r^2}$ dans $u s^i$, ou ce qui revient au même, on aura $\nabla^i \cdot y_{x,x'}$, 1.^o en substituant dans s, y_x au lieu de $\frac{1}{r}$, & $y_{x'}$ au lieu de $\frac{1}{t}$; 2.^o en développant ce que devient alors $u s^i$ suivant les puissances de y_x & de $y_{x'}$, & en écrivant au lieu d'un terme quelconque, tel $K \cdot (y_x)^m \cdot (y_{x'})^{m^2}$, $K \cdot y_{x+m} \cdot y_{x'}^{m^2}$, & par conséquent en substituant $K \cdot y_{x,x'}$ au lieu du terme tout constant K ou $K \cdot (y_x)^0 \cdot (y_{x'})^0$.

Si au lieu de développer s^i suivant les puissances de $\frac{1}{r}$ & de $\frac{1}{t}$, on le développe suivant les puissances de $\frac{1}{r} - 1$ & de $\frac{1}{t} - 1$, & que l'on désigne par $K \cdot \left(\frac{1}{r} - 1\right)^m \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{m^2}$, un terme quelconque de ce développement; le coefficient de $r^r \cdot t^{r^2}$, dans $K \cdot u \left(\frac{1}{r} - 1\right)^m \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^{m^2}$, sera $K \cdot \Delta^m \cdot \Delta^{m^2} \cdot y_{x,x'}$; on aura donc $\nabla^i \cdot y_{x,x'}$, 1.^o en substituant dans $s, \Delta \cdot y_{x,x'}$ au lieu de

$\frac{1}{t} - 1$, & $\Delta' . y_{x,x'}$ au lieu de $\frac{1}{t'} - 1$; 2.^o en développant ce que devient alors Δ' suivant les puissances de $\Delta . y_{x,x'}$ & de $\Delta' . y_{x,x'}$, & en appliquant aux caractéristiques Δ & Δ' les exposans de ces puissances, c'est-à-dire en écrivant au lieu d'un terme quelconque tel que $K . (\Delta . y_{x,x'})^m . (\Delta' . y_{x,x'})^n$, celui-ci, $K . \Delta^m . \Delta'^n . y_{x,x'}$.

Soit Σ la caractéristique des intégrales finies relatives à x , & Σ' celle des intégrales relatives à x' ; soit de plus z la fonction génératrice de $\Sigma^i . \Sigma'^{i'}$. $y_{x,x'}$; on aura $z . (\frac{1}{t} - 1)^i . (\frac{1}{t'} - 1)^{i'}$ pour la fonction génératrice de $y_{x,x'}$; cette fonction génératrice doit, en n'ayant égard qu'aux puissances positives ou nulles de t & de t' , se réduire à u ; on aura ainsi

$$z . (\frac{1}{t} - 1)^i . (\frac{1}{t'} - 1)^{i'} = u + \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t^3} \dots + \frac{q}{t^i} \\ + \frac{a'}{t'} + \frac{b'}{t'^2} + \frac{c'}{t'^3} \dots + \frac{q'}{t'^{i'}},$$

a, b, c, \dots, q , étant des fonctions arbitraires de t' , & $a', b', c' \dots q'$, étant des fonctions arbitraires de t ; partant

$$z = \frac{u . t^{i'} + a . t^{-1} . t'^{i'} + b . t^{-2} . t'^{i'} \dots + q . t^{-i} . t'^{i'} + a' . t . t'^{i'-1} + b' . t . t'^{i'-2} \dots + q' . t^i}{(1 - t)^i . (1 - t')^{i'}}.$$

X I V.

De l'interpolation des Suites à deux variables, & de l'intégration des équations linéaires aux différences partielles finies & infiniment petites.

$y_{x+1, x'+1}$, est évidemment égal au coefficient de $t^x . t'^{x'}$ dans le développement de $\frac{z}{t . t'}$; or on a

$$\frac{x}{t^r \cdot t^i} = u \cdot \left(1 + \frac{1-t}{t}\right)^i \cdot \left(1 + \frac{1-t^i}{t^i}\right)^{i^i} =$$

$$\left\{ \begin{aligned} & 1 + i \cdot \frac{1-t}{t} + \frac{i \cdot (i-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1-t}{t}\right)^2 \\ & + \frac{i \cdot (i-1) \cdot (i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1-t}{t}\right)^3 + \&c. \\ & + i^i \cdot \left(\frac{1-t^i}{t^i}\right) + i^i \cdot i \cdot \left(\frac{1-t^i}{t^i}\right) \cdot \left(\frac{1-t}{t}\right) \\ & + i^i \cdot \frac{i \cdot (i-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1-t^i}{t^i}\right) \cdot \left(\frac{1-t}{t}\right)^2 + \&c. \\ & + \frac{i^i \cdot (i^i-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1-t^i}{t^i}\right)^2 \\ & + \frac{i^i \cdot (i^i-1)}{1 \cdot 2} \cdot i \cdot \left(\frac{1-t^i}{t^i}\right)^2 \cdot \frac{1-t}{t} + \&c. \\ & + \&c. \end{aligned} \right.$$

le coefficient de $u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^r \cdot \left(\frac{1}{t^i} - 1\right)^{r^i}$ étant
égal à $\frac{i \cdot (i-1) \cdot (i-2) \dots (i-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r} \cdot \frac{i^i \cdot (i^i-1) \cdot (i^i-2) \dots (i^i-r^i+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots r^i}$.

Maintenant, le coefficient de $t^r \cdot t^{r^i}$, dans le développement
de $u \cdot \left(\frac{1}{t} - 1\right)^r \cdot \left(\frac{1}{t^i} - 1\right)^{r^i}$, est $\Delta^r \cdot \Delta^{r^i} \cdot y_{r, r^i}$;
on aura donc en passant des fonctions génératrices aux
variables correspondantes,

$$\begin{aligned} y_{r+i, r^i+i^i} &= y_{r, r} + i \cdot \Delta \cdot y_{r, r} + \frac{i \cdot (i-1)}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^2 \cdot y_{r, r} + \&c. \\ &+ i^i \cdot \Delta^i \cdot y_{r, r} + i^i \cdot i \cdot \Delta^i \cdot \Delta \cdot y_{r, r} + \&c. \\ &+ \frac{i^i \cdot (i^i-1)}{1 \cdot 2} \cdot \Delta^{i^2} \cdot y_{r, r} + \&c. \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

Équation qui peut être mise sous cette forme très-simple,

$$y_{r+i, r^i+i^i} = (1 + \Delta \cdot y_{r, r})^i \cdot (1 + \Delta^i \cdot y_{r, r})^{i^i}$$

Mém. 1779.

Kk

pourvu que dans le développement du second membre de cette dernière équation, on applique aux caractéristiques Δ & Δ' les exposans des puissances de $\Delta \cdot y_{x,x'}$ & de $\Delta' \cdot y_{x,x'}$, & par conséquent qu'au lieu du terme tout constant, ou multiplié par $(\Delta \cdot y_{x,x'})^0 \cdot (\Delta' \cdot y_{x,x'})^0$, on écrive $y_{x,x'}$.

X V.

SUPPOSONS maintenant qu'au lieu d'interpoler suivant les différences de la fonction $y_{x,x'}$, on veuille interpoler suivant d'autres loix; pour cela, soit

$$\begin{aligned} z = A + \frac{B}{i} + \frac{C}{i^2} + \frac{D}{i^3} + \dots + \frac{P}{i^{n-1}} + \frac{q}{i^n} i \\ + \frac{B''}{i^1} + \frac{C''}{i^1 \cdot i} + \frac{D''}{i^1 \cdot i^2} + \&c. \\ + \frac{C'''}{i^{1,2}} + \frac{D'''}{i^{1,2} \cdot i} + \&c, \\ + \&c. \end{aligned}$$

.....

$$+ \frac{1}{i^{1,n}}.$$

Si l'on fait

$$A + \frac{B''}{i^1} + \frac{C''}{i^{1,2}} + \dots + \frac{1}{i^{1,n}} = a,$$

$$B + \frac{C''}{i^1} + \frac{D''}{i^2} + \&c. = b,$$

$$C + \frac{D''}{i^1} + \&c. = c,$$

&c.

on aura

$$z = a + \frac{b}{i} + \frac{c}{i^2} + \&c. + \dots + \frac{q}{i^n}.$$

Il est facile d'en conclure, comme dans l'article V, les valeurs

successives de $\frac{1}{i^{n+1}}$, $\frac{1}{i^{n+2}}$, $\frac{1}{i^{n+3}}$, &c. en fonctions de a , b , c , &c. & z ; & il est visible que dans aucun terme de l'expression de $\frac{1}{i^i}$, la somme des puissances de $\frac{1}{i}$ & de $\frac{1}{i^2}$, ne surpassera pas i , lorsque i sera un nombre entier positif, n étant supposé égal ou moindre que n .

Considérons maintenant la formule (μ) de l'article V, & supposons qu'en développant suivant les puissances de $\frac{1}{i}$, la quantité

$$\begin{aligned} & b \cdot Z_{i-1+1}^{(0)} + b z \cdot Z_{i-2+1}^{(1)} + \&c. \\ & + c Z_{i-1+1}^{(0)} + c z \cdot Z_{i-2+1}^{(1)} + \&c. \\ & + \&c. \end{aligned}$$

on ait

$$\begin{aligned} M + N z + \&c. + \frac{1}{i} \cdot (M^{(1)} + N^{(1)} z + \&c.) \\ + \frac{1}{i^2} \cdot (M^{(2)} + N^{(2)} z + \&c.) \dots + \frac{1}{i^i} \cdot M^{(i)}; \end{aligned}$$

les puissances ultérieures de $\frac{1}{i}$ se détruisant réciproquement, puisque l'expression de $\frac{1}{i}$ ne doit point les renfermer. Supposons pareillement qu'en développant la quantité

$$\begin{aligned} & c \cdot Z_{i-1+1}^{(0)} + c z \cdot Z_{i-2+1}^{(1)} + \&c. \\ & + e Z_{i-1+1}^{(0)} + e z \cdot Z_{i-2+1}^{(1)} + \&c. \end{aligned}$$

on ait

$$\begin{aligned} M_1 + N_1 z + \&c. + \frac{1}{i} \cdot (M_1^{(1)} + N_1^{(1)} z + \&c.) \\ + \frac{1}{i^2} \cdot (M_1^{(2)} + N_1^{(2)} z + \&c.) \dots + \frac{1}{i^{i-1}} \cdot M_1^{(i-1)}; \end{aligned}$$

K k ij

260 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
qu'en développant la quantité

$$e Z_{i-1,1}^{(0)} + \&c. \\ + \&c.$$

on ait

$$M_1 + N_1 \cdot z + \&c. + \frac{1}{r} \cdot (M_1^{(1)} + N_1^{(1)} \cdot z + \&c.) +$$

$$[\dots + \frac{1}{r^{i-2}} \cdot M_1^{(i-2)} ,$$

& ainsi de suite ; on aura

$$\frac{\pi}{r} = M + N z + \&c. + \frac{1}{r} \cdot (M^{(1)} + N^{(1)} \cdot z + \&c.)$$

$$+ \frac{1}{r^2} \cdot (M^{(2)} + N^{(2)} \cdot z + \&c.)$$

$$[\dots]$$

$$+ \frac{1}{r^i} \cdot M^{(i)}$$

$$+ \frac{1}{r} \cdot \left\{ \begin{array}{l} M_1 + N_1 \cdot z + \&c. \\ + \frac{1}{r} \cdot (M_1^{(1)} + N_1^{(1)} \cdot z + \&c.) \\ + \frac{1}{r^2} \cdot (M_1^{(2)} + N_1^{(2)} \cdot z + \&c.) \\ \dots \\ + \frac{1}{r^{i-1}} \cdot M_1^{(i-1)} \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{1}{r^2} \cdot \left\{ \begin{array}{l} M_2 + N_2 \cdot z + \&c. \\ + \frac{1}{r} \cdot (M_2^{(1)} + N_2^{(1)} \cdot z + \&c.) \\ \dots \\ + \frac{1}{r^{i-2}} \cdot M_2^{(i-2)} \end{array} \right\}$$

$$[\dots]$$

$$+ \frac{1}{r^{i-1}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} M_{n-1} + N_{n-1} \cdot z + \&c. \\ + \frac{1}{r^i} \cdot (M_{n-1}^{(1)} + N_{n-1}^{(1)} \cdot z + \&c.) \\ \dots\dots\dots \\ + \frac{1}{r^{i-n+1}} \cdot M_{n-1}^{(i-n+1)} \end{array} \right\}$$

Cela posé, si l'on nomme $\nabla \cdot y_{x,x'}$ la quantité

$$\begin{aligned} & A \cdot y_{x,x'} + B \cdot y_{x+1,x'} + C \cdot y_{x+2,x'} + \&c. \\ & + B' \cdot y_{x,x'+1} + C' \cdot y_{x+1,x'+1} + \&c. \\ & + C'' \cdot y_{x,x'+2} + \&c. \\ & + \&c. \end{aligned}$$

le coefficient de $r^i \cdot z^{i'}$ dans le développement de la quantité

$\frac{u \cdot z^\mu}{r^i \cdot z^{i'}}$, sera par l'article XIII, $\nabla^\mu \cdot y_{x+1,x'+1}^{(i,i')}$; l'équation

précédente donnera conséquemment, en la multipliant par u , & en passant des fonctions génératrices aux variables correspondantes,

$$\begin{aligned} y_{x+1,x'} = & \left\{ \begin{array}{l} M \cdot y_{x,x'} + N \cdot \nabla \cdot y_{x,x'} + \&c. \\ + M^{(1)} \cdot y_{x,x'+1} + N^{(1)} \cdot \nabla \cdot y_{x,x'+1} + \&c. \\ + M^{(2)} \cdot y_{x,x'+2} + N^{(2)} \cdot \nabla \cdot y_{x,x'+2} + \&c. \\ + \&c. \\ \dots\dots\dots \\ + M^{(i)} \cdot y_{x,x'+i} \end{array} \right\} \\ & + \left\{ \begin{array}{l} M_1 \cdot y_{x+1,x'} + N_1 \cdot \nabla \cdot y_{x+1,x'} + \&c. \\ + M_1^{(1)} \cdot y_{x+1,x'+1} + N_1^{(1)} \cdot \nabla \cdot y_{x+1,x'+1} + \&c. \\ \dots\dots\dots \\ + M_1^{(i-1)} \cdot y_{x+1,x'+i-1} \end{array} \right\} \\ & + \&c. \end{aligned}$$

$$+ \left\{ \begin{array}{l} M_{n-1} \cdot y_{x+n-1, x'} + N_{n-1} \cdot \nabla \cdot y_{x+n-1, x'} + \&c. \\ + M_{n-1}^{(1)} \cdot y_{x+n-1, x'+1} + N_{n-1}^{(1)} \cdot \nabla \cdot y_{x+n-1, x'+1} + \&c. \\ \dots\dots\dots \\ + M_{n-1}^{(i-n+1)} \cdot y_{x+n-1, x'+i-n+1} \end{array} \right\}$$

X V I.

Si l'on suppose $\nabla \cdot y_{i, x'} = 0$, on aura, en faisant $x = 0$ dans l'équation précédente,

$$\begin{aligned} y_{i, x'} = & M \cdot y_{0, x'} + M^{(1)} \cdot y_{0, x'+1} + M^{(2)} \cdot y_{0, x'+2} + \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots + M^{(i)} \cdot y_{0, x'+i} \\ + & M_1 \cdot y_{1, x'} + M_1^{(1)} \cdot y_{1, x'+1} + M_1^{(2)} \cdot y_{1, x'+2} + \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots + M_1^{(i-1)} \cdot y_{1, x'+i-1} \\ + & \&c. \\ \dots\dots\dots \\ + & M_{n-1} \cdot y_{n-1, x'} + M_{n-1}^{(1)} \cdot y_{n-1, x'+1} + \dots\dots\dots \\ & \dots\dots\dots + M_{n-1}^{(i-n+1)} \cdot y_{n-1, x'+i-n+1} \end{aligned}$$

$M^{(i)}$, $M_1^{(i)}$, $M_{n-1}^{(i)}$, &c. étant des fonctions de i & de r , l'expression précédente de $y_{i, x'}$ peut être mise sous cette forme très-simple,

$$y_{i, x'} = \sum_r \left\{ M^{(r)} \cdot y_{0, x'+r} + M_1^{(r-1)} \cdot y_{1, x'+r-1} + M_2^{(r-2)} \cdot y_{2, x'+r-2} + \dots\dots\dots + M_{n-1}^{(r-n+1)} \cdot y_{n-1, x'+r-n+1} \right\} \cdot (\lambda)^r$$

l'intégrale étant prise par rapport à r , depuis $r = 0$ jusqu'à $r = i + 1$, par rapport au premier terme; depuis $r = 1$ jusqu'à $r = i + 1$, par rapport au second terme, &c. ainsi de suite. Cette expression de $y_{i, x'}$ fera l'intégrale complète de l'équation $\nabla \cdot y_{i, x'} = 0$, ou, ce qui revient au même, de celle-ci,

$$D = A \cdot y_{i,x'} + B \cdot y_{i+1,x'} + C \cdot y_{i+2,x'} \dots + P \cdot \dot{y}_{i+n-1,x'} + q \cdot y_{i+n,x'}$$
$$\quad + B' \cdot y_{i,x'+1} + C' \cdot y_{i+1,x'+1} + \&c.$$
$$\qquad\qquad + C'' \cdot y_{i,x'+2} + \&c.$$
$$\qquad\qquad\qquad + \&c.$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\qquad\qquad\qquad + y_{i,x'+n}.$$

Il est visible que dans cette intégrale, les quantités $y_{0,x'}$, $y_{1,x'}$, $y_{2,x'}$, $y_{n-1,x'}$ sont les n fonctions arbitraires qu'introduit l'intégration de l'équation $\nabla y_{i,x'} = 0$; pour les déterminer, il faut connoître immédiatement, ou du moins pouvoir conclure des conditions du Problème, les n premiers rangs verticaux de la Table suivante,

$$\begin{aligned} & y_{0,0}, y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0} \dots y_{x,0}, y_{x+1,0} \dots y_{\infty,0} \\ & y_{0,1}, y_{1,1}, y_{2,1}, y_{3,1} \dots y_{x,1}, y_{x+1,1} \dots y_{\infty,1} \\ & y_{0,2}, y_{1,2}, y_{2,2}, y_{3,2} \dots y_{x,2}, y_{x+1,2} \dots y_{\infty,2} ; (Q) \\ & \vdots \\ & y_{0,x'}, y_{1,x'}, y_{2,x'}, y_{3,x'} \dots y_{x,x'}, y_{x+1,x'} \dots y_{\infty,x'} \\ & \&c. \end{aligned}$$

R E M A R Q U E.

DANS un grand nombre de Problèmes, & principalement dans ceux qui concernent l'analyse des hasards, les n premiers rangs verticaux sont des suites récurrentes dont la loi est connue; dans ce cas, $y_{0,x}$, $y_{1,x}$, &c. sont données par des termes de la forme $A.p^x$; supposons conséquemment que l'expression de $y_{0,x}$ renferme le terme $A.p^x$, la partie correspondante de $\Sigma.M^{(r)}.y_{0,x} +$, sera

$$A.p^x, \{M^0 + M^{(1)}.p + M^{(2)}.p^2 + M^{(3)}.p^3 \dots + M^{(j)}.p^j\};$$

mais $M^{(0)} + \frac{M^{(1)}}{r^1} + \frac{M^{(2)}}{r^{1,2}} \dots + \frac{M^{(n)}}{r^{1,2}} \dots$ est le

développement de $b.Z_{i=1}^{(0)} + c.Z_{i=1}^{(0)} + \dots$

suivant les puissances de $\frac{1}{r}$; en changeant donc dans cette dernière quantité $\frac{1}{r}$ en p , & nommant P ce qu'elle devient alors, on aura $A.P.p^{x'}$ pour la partie de $\Sigma.M^{(n)}.y_{0,x'+r}$ qui répond au terme $A.p^{x'}$. Il suit de-là, que si la valeur de $y_{0,x'}$ est égale à $A.p^{x'} + A'.p^{x'} + A''.p^{x'} + \&c.$ & que l'on nomme $P', P'', \&c.$ ce que devient P , en y changeant successivement p en $p', p'', \&c.$ on aura

$$\Sigma.M^{(r)}.y_{0,x'+r} = A.P.p^{x'} + A'.P'.p^{x'} + A''.P''.p^{x'} + \&c.$$

On trouvera pareillement que si la valeur de $y_{1,x'}$ est exprimée par $B.q^{x'} + B'.q^{x'} + B''.q^{x'} + \&c.$ & que l'on nomme $Q, Q', Q'', \&c.$ ce que devient la quantité $cZ_{i-1,x'+1}^{(o)} + eZ_{i-1,x'+1}^{(o)} + \&c.$ lorsqu'on y change successivement $\frac{1}{r}$ en $q, q', q'', \&c.$ on aura

$$\Sigma.M^{(r-1)}.y_{1,x'+r-1} = BQ.q^{x'} + B'Q'.q^{x'} + B''Q''.q^{x'} + \&c.$$

& ainsi de suite; on aura ainsi l'expression de $y_{i,x'}$ la plus simple à laquelle on puisse parvenir.

Si l'on a $\nabla^s.y_{x,x'} = 0$, on aura, en faisant $x = 0$ dans l'expression générale de $y_{x+1,x'}$ de l'article précédent,

$$\begin{aligned} y_{i,x'} = & M.y_{0,x'} + M^{(1)}.y_{0,x'+1} + \&c. \dots\dots\dots \\ & \dots\dots + M^{(i)}.y_{0,x'+i} \\ & + N.\nabla.y_{0,x'} + N^{(1)}.\nabla.y_{0,x'+1} + \&c. \\ & + M_1.y_{1,x'} + M_1^{(1)}.y_{1,x'+1} + \&c. \dots\dots\dots \\ & \dots\dots + M_1^{(i-1)}.y_{1,x'+i-1} \\ & + N_1.\nabla.y_{1,x'} + N_1^{(1)}.\nabla.y_{1,x'+1} + \&c. \\ & \dots\dots\dots \\ & + M_{n-1}.y_{n-1,x'} + M_{n-1}^{(1)}.y_{n-1,x'+1} \dots\dots\dots \\ & \dots\dots + M_{n-1}^{(i-n+1)}.y_{n-1,x'+i-n+1} \\ & + N_{n-1}.\nabla.y_{n-1,x'} + \&c. \end{aligned}$$

$y_{0,x}, y_{1,x}, \dots, y_{n-1,x}, \nabla \cdot y_{0,x}, \nabla \cdot y_{1,x}, \dots, \nabla \cdot y_{n-1,x}$ étant les $2n$ fonctions arbitraires de l'intégrale de l'équation $\nabla^2 \cdot y_{i,x} = 0$; on aura de la même manière, les intégrales des équations $\nabla^3 \cdot y_{i,x} = 0$; $\nabla^4 \cdot y_{i,x} = 0$, &c.

J'ai nommé ailleurs (*voyez les Tomes VI & VII des Mémoires des Savans Étrangers*) les séries formées d'après l'équation $\nabla^r \cdot y_{i,x} = 0$, *suites récurrorécurrentes*; elles diffèrent des suites récurrentes, en ce que dans celles-ci les termes ne sont fonctions que d'une seule variable: ainsi tous leurs termes dans la *Table (Q)*, sont ou dans un même rang vertical, ou dans un même rang horizontal, ou sur une même droite inclinée à l'horizon d'une manière quelconque; au lieu que les termes d'une suite *récurrorécurrente* étant fonctions de deux variables, remplissent toute l'étendue de la *Table (Q)*, & forment une surface, de sorte que les quantités arbitraires qui dans le cas des suites récurrentes, sont déterminées par autant de points de la ligne sur laquelle leurs termes sont disposés, se déterminent ici par des lignes droites ou par des polygones placés arbitrairement dans la *Table* précédente. L'équation qui exprime la loi d'une suite récurrente est aux différences finies; celle qui exprime la loi d'une suite *récurrorécurrente* est aux différences finies partielles, & son intégrale renferme un nombre de fonctions arbitraires égal au degré de cette équation.

X V I I.

LA valeur de $y_{i,x}$ dans la formule (λ) de l'article précédent, dépendant de la connoissance de $M^{(0)}$, $M^{(0-1)}$, &c. il est visible que ces quantités seront connues lorsque l'on aura le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de $Z_{i-1,1}^{(0)}$; tout se réduit donc à déterminer ce coefficient: or on a par l'article V,

$$\begin{aligned}
Z_i^{(0)} = & - \frac{1}{a \cdot a^{i+1} \cdot (a - a') \cdot (a - a'') \cdot \&c.}, \\
& - \frac{1}{a \cdot a^{i+1} \cdot (a' - a) \cdot (a' - a'') \cdot \&c.}, \\
& - \frac{1}{a \cdot a^{i+1} \cdot (a'' - a) \cdot (a'' - a') \cdot \&c.}, \\
& - \&c.
\end{aligned}$$

$a, a', a'', \&c.$ étant fonctions de $\frac{1}{r}$. Si l'on fait $\frac{1}{r} = s$, & que l'on différencie l'expression précédente de $Z_i^{(0)}$, n fois de suite par rapport à s , on aura $n + 1$ équations au moyen desquelles en éliminant les n quantités $a^i, a'^i, a''^i, \&c.$ on parviendra à une équation entre $Z_i^{(0)}, \frac{\partial Z_i^{(0)}}{\partial s}, \frac{\partial^2 Z_i^{(0)}}{\partial s^2}, \&c.$ dont les coefficients seront fonctions de $a', a'', \&c.$ & de leurs différences: or il est clair que $a, a', a'', \&c.$ doivent entrer de la même manière dans ces coefficients; on pourra donc, par les méthodes connues, les déterminer en fonctions rationnelles des coefficients de l'équation qui donne les valeurs de $a, a', \&c.$ & des différences de ces coefficients, & par conséquent en fonctions rationnelles de s ; en faisant ensuite disparaître les dénominateurs de ces fonctions, on aura une équation linéaire entre $Z_i^{(0)}$ & ses différentielles, dont les coefficients seront des fonctions rationnelles & entières de s , ou, ce qui revient au même, de $\frac{1}{r}$. Cela posé, considérons un terme quelconque de cette équation, tel que $\frac{K}{r^m} \cdot \frac{\partial^\mu Z_i^{(0)}}{\partial s^\mu}$, & nommons λ , le coefficient de $\frac{1}{r^m}$ dans le développement de $Z_i^{(0)}$; ce coefficient, dans le développement de $\frac{K}{r^m} \cdot \frac{\partial^\mu Z_i^{(0)}}{\partial s^\mu}$, sera $K \cdot (r - m + \mu)$.

$1. (r - m + \mu - 1) \cdot (r - m + \mu - 2) \dots$
 $1. \dots (r - m) \cdot \lambda_{r-m+\mu}$; en repassant ainsi des
fonctions génératrices à leurs variables correspondantes, l'é-
quation précédente entre $Z_{i-m+\mu}^{(0)}$ & ses différences, donnera
une équation entre $\lambda_r, \lambda_{r+1}, \&c.$ dont les coefficients sont
variables, & en l'intégrant, on aura la valeur de λ_r .

Il suit de-là que l'intégration de toute équation linéaire
aux différences finies partielles dont les coefficients sont cons-
tans, dépend 1.^o de l'intégration d'une équation linéaire aux
différences finies dont les coefficients sont variables; 2.^o d'une
intégrale *définie*; je nomme ainsi toute intégrale prise depuis
une valeur déterminée de la variable jusqu'à une autre valeur
déterminée. L'intégrale définie dont dépend la valeur de $y_{i,r}$
dans la formule (λ) , est relative à r , & doit s'étendre depuis
 $r = 0$ jusqu'à $r = i$. Relativement aux équations diffé-
rentielles du premier ordre, on a

$$Z_i^{(0)} = - \frac{1}{a \cdot a^{i+1}};$$

on a de plus,

$$a = A + B' s,$$

$$a = - \frac{B}{a},$$

ce qui donne

$$Z_i^{(0)} = - \frac{(A + B' s)^i}{(-B)^{i+1}} s.$$

D'où l'on tire cette équation différentielle,

$$0 = \frac{\partial Z_i^{(0)}}{\partial s} \cdot (A + B' s) - i B' \cdot Z_i^{(0)},$$

ce qui donne l'équation aux différences finies,

$$0 = A(r + 1) \cdot \lambda_{r+1} + B' r \cdot \lambda_r - i B' \lambda_{r,i}$$

on a ensuite dans ce cas,

$$M^{(r)} = B \cdot \lambda_{r,i} \quad \text{Li ij}$$

la formule (λ) de l'article précédent, deviendra donc

$$y_{i,x} = B \cdot \Sigma \cdot \lambda_r \cdot y_{0,x} + r,$$

ce sera l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles,

$$0 = Ay_{i,x} + B \cdot y_{i+1,x} \\ + B' \cdot y_{i,x+1}$$

pourvu que l'intégrale soit prise depuis $r = 0$, jusqu'à $r = i + 1$, & que la constante arbitraire de la valeur de λ_r ,

$$\text{soit telle que } \lambda_0 = - \frac{A'}{(-B)^{i+1}}.$$

En passant du fini à l'infiniment petit, la méthode précédente donnera l'intégrale des équations linéaires aux différences infiniment petites partielles dont les coefficients sont constans, 1.^o en intégrant une équation linéaire aux différences infiniment petites; 2.^o au moyen d'intégrales définies; ce qui donne l'intégration de ces équations dans une infinité de cas qui se refusent aux méthodes connues; mais comme le passage du fini à l'infiniment petit peut offrir ici quelques difficultés, j'ai préféré de chercher une méthode directement applicable aux équations linéaires aux différences infiniment petites partielles, & j'ai trouvé la suivante qui a l'avantage de s'étendre aux équations linéaires dont les coefficients sont variables. Je me bornerai à considérer les équations différentielles du second ordre, comme étant celles qui se présentent le plus fréquemment dans l'application de l'analyse aux questions physiques.

X V I I I.

TOUTES les équations linéaires aux différences infiniment petites partielles du second ordre, peuvent être mises sous cette forme,

$$0 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial s'} \right) + m \left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) + n \left(\frac{\partial u}{\partial s'} \right) + l u(S);$$

m, n & l étant des fonctions quelconques données de s & de s' ,

& si l'on nomme $\varphi_1(s)$, l'intégrale $\int \partial s \cdot \varphi(s)$; $\varphi_2(s)$, l'intégrale $\int \partial s \cdot \varphi_1(s)$; $\varphi_3(s)$, l'intégrale $\int \partial s \cdot \varphi_2(s)$, & ainsi de suite; si l'on nomme pareillement $\psi_1(s')$, l'intégrale $\int \partial s' \cdot \psi(s')$; $\psi_2(s')$, l'intégrale $\int \partial s' \cdot \psi_1(s')$; $\psi_3(s')$, l'intégrale $\int \partial s' \cdot \psi_2(s')$, & ainsi de suite, la valeur de u peut être exprimée par une suite de cette forme,

$$u = A \cdot \varphi_1(s) + A^{(1)} \cdot \varphi_2(s) + A^{(2)} \cdot \varphi_3(s) \\ + A^{(3)} \cdot \varphi_4(s) + \&c. + B \cdot \psi_1(s') \\ + B^{(1)} \cdot \psi_2(s') + B^{(2)} \cdot \psi_3(s') + B^{(3)} \cdot \psi_4(s') + \&c.$$

$\varphi(s)$ & $\psi(s')$ étant deux fonctions arbitraires, l'une de s , & l'autre de s' ; (voyez sur cela les *Mémoires de l'Académie pour l'année 1773*, page 355 & suiv.). Cela posé, si l'on substitue cette valeur de u dans l'équation (S), & que l'on compare séparément les termes multipliés par $\varphi(s)$, $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, &c. $\psi(s)$, $\psi_1(s')$, $\psi_2(s')$, &c. on aura pour déterminer A , $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, &c. B , $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, &c. les équations suivantes,

$$0 = \left(\frac{\partial A}{\partial s'} \right) + m A;$$

$$0 = \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial s'} \right) + m A^{(1)} + \left(\frac{\partial \partial A}{\partial s \partial s'} \right) + m \left(\frac{\partial A}{\partial s} \right) + n \left(\frac{\partial A}{\partial s'} \right) + l \cdot A \left. \vphantom{\frac{\partial A}{\partial s'}} \right\}; (\gamma)$$

$$0 = \left(\frac{\partial A^{(2)}}{\partial s'} \right) + m A^{(2)} + \left(\frac{\partial \partial A}{\partial s \partial s'} \right) + m \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial s} \right) + n \left(\frac{\partial A^{(1)}}{\partial s'} \right) + l \cdot A^{(1)} \left. \vphantom{\frac{\partial A^{(1)}}{\partial s'}} \right\}; (\gamma)$$

&c.

$$0 = \left(\frac{\partial B}{\partial s} \right) + n B;$$

$$0 = \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial s} \right) + n B^{(1)} + \left(\frac{\partial \partial B}{\partial s \partial s'} \right) + m \left(\frac{\partial B}{\partial s} \right) + n \left(\frac{\partial B}{\partial s'} \right) + l \cdot B \left. \vphantom{\frac{\partial B}{\partial s'}} \right\}; (\gamma)$$

$$0 = \left(\frac{\partial B^{(2)}}{\partial s} \right) + n B^{(2)} + \left(\frac{\partial \partial B}{\partial s \partial s'} \right) + m \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial s} \right) + n \left(\frac{\partial B^{(1)}}{\partial s'} \right) + l \cdot B^{(1)} \left. \vphantom{\frac{\partial B^{(1)}}{\partial s'}} \right\}; (\gamma)$$

&c.

Lorsqu'en satisfaisant à ces équations, on parvient à trouver $A^{(\mu)} = 0$, ou $B^{(\mu)} = 0$, μ étant un nombre entier

positif, alors u peut toujours s'exprimer en termes finis, en n'ayant égard qu'aux seules variables s & s' de l'équation; j'ai donné dans les Mémoires cités une méthode générale & fort simple, pour avoir dans ce cas l'intégrale complète de cette équation; mais si l'une ou l'autre des deux équations $A^{(\mu)} = 0$, & $B^{(\mu)} = 0$, ne peut avoir lieu, il faut nécessairement, pour avoir l'expression de u en termes finis, y introduire une nouvelle variable de la manière suivante.

Pour cela, nous observerons que si l'on fait commencer l'intégrale $\int \partial s . \varphi(s)$, lorsque $s = 0$, on aura

$$\int \partial s . \varphi(s) = \partial s . \{ \varphi(0) + \varphi(\partial s) + \varphi(2 \partial s) + \varphi(3 \partial s) \dots \\ \dots + \varphi(r \partial s) + \varphi[(r+1) . \partial s] \dots + \varphi(s) \};$$

donc si l'on nomme T la suite

$$\varphi(0) + s . \varphi(\partial s) + s^2 . \varphi(2 \partial s) + s^3 . \varphi(3 \partial s) \dots \\ \dots + s^r . \varphi(r \partial s) + s^{r+1} . \varphi[(r+1) . \partial s] \dots + s^{\frac{s}{\partial s}} . \varphi(s),$$

$\int \partial s . \varphi(s)$ ou $\varphi_1(s)$ sera égal au coefficient de $s^{\frac{s}{\partial s}}$ dans le développement de la fonction $\frac{T . \partial s}{1 - s}$; il est aisé d'en conclure,

que $\varphi_1(s)$ sera égal au coefficient de $s^{\frac{s}{\partial s}}$ dans le développement de $\frac{T . \partial s}{(1 - s)^2}$, & généralement que $\varphi_\mu(s)$ sera égal

au coefficient de $s^{\frac{s}{\partial s}}$ dans le développement de $\frac{T . \partial s^\mu}{(1 - s)^\mu}$;

d'ailleurs, il est visible que le coefficient de $\varphi(r \partial s)$ dans

$\varphi_\mu(s)$ est égal au coefficient de $s^{\frac{s}{\partial s} - r}$ dans le déve-

loppement de $\frac{\partial s^\mu}{(1 - s)^\mu}$, & par conséquent égal à

$$\frac{\left(\frac{s}{\partial s} - r + 1\right) \cdot \left(\frac{s}{\partial s} - r + 2\right) \cdot \left(\frac{s}{\partial s} - r + 3\right) \dots \left(\frac{s}{\partial s} - r + \mu - 1\right) \cdot \partial s^\mu}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu - 1)}$$

Supposons r infini & égal à $\frac{z}{\partial s}$, nous aurons $\frac{(s-z)^{\mu-1} \cdot \partial s}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (\mu-1)}$
 pour ce coefficient; d'où il suit que le coefficient de $\varphi(r \partial s)$
 ou $\varphi(z)$ dans l'expression de u , sera

$$\partial s \cdot \left\{ A + A^{(1)} \cdot (s-z) + \frac{A^{(2)}}{1 \cdot 2} \cdot (s-z)^2 + \frac{A^{(3)}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (s-z)^3 \right. \\ \left. + \frac{A^{(4)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (s-z)^4 + \&c. \right\}$$

donc si l'on nomme $\Gamma \cdot (s-z)$ la somme de la suite

$$A + A^{(1)} \cdot (s-z) + \frac{A^{(2)}}{1 \cdot 2} \cdot (s-z)^2 + \frac{A^{(3)}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (s-z)^3 + \&c.$$

& que l'on suppose $\partial s = \partial z$, on aura $\int \partial z \cdot \Gamma \cdot (s-z) \cdot \varphi(z)$
 égal à la suite

$$A \cdot \varphi_1 \cdot (s) + A^{(1)} \cdot \varphi_2 \cdot (s) + A^{(2)} \cdot \varphi_3 \cdot (s) + A^{(3)} \cdot \varphi_4 \cdot (s) + \&c.$$

pourvu que l'intégrale soit prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s$.

Si l'on nomme pareillement $\Pi \cdot (s' - z)$, la somme de
 la suite

$$B + B^{(1)} \cdot (s' - z) + \frac{B^{(2)}}{1 \cdot 2} \cdot (s' - z)^2 + \frac{B^{(3)}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (s' - z)^3 + \&c.$$

on trouvera, par le même procédé, que $\int \partial z \cdot \Pi \cdot (s' - z) \cdot \psi(z)$
 est égal à la suite

$$B \cdot \psi_1 \cdot (s') + B^{(1)} \cdot \psi_2 \cdot (s') + B^{(2)} \cdot \psi_3 \cdot (s') + \&c.$$

pourvu que l'intégrale soit prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s'$;
 on aura donc

$$u = \int \partial z \cdot \Gamma \cdot (s - z) \cdot \varphi(z) \\ + \int \partial z \cdot \Pi \cdot (s' - z) \cdot \psi(z).$$

l'intégrale du premier terme étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s$, & celle du second terme étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s'$. On peut observer ici que les fonctions $\Gamma.(s - z)$, & $\Pi.(s' - z)$, sont autant de valeurs particulières qui satisfont pour u , à l'équation proposée aux différences partielles. En effet, il est clair, par la nature des valeurs de A , $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, &c. que si l'on substitue dans cette équation, au lieu de u , la suite

$$A + A^{(1)}.(s - z) + \frac{A^{(2)}}{1.2}.(s - z)^2 + \&c.$$

z étant regardé comme constant, elle sera satisfaite. Mais parmi toutes les valeurs particulières de u , qui renferment une constante arbitraire z , il faut choisir pour $\Gamma.(s - z)$ celle qui donne $0 = (\frac{\partial u}{\partial s'}) + mu$, lorsque $z = s$; parce qu'alors u se réduit à A , & que l'on doit avoir $0 = (\frac{\partial A}{\partial s'}) + mA$; il faut pareillement choisir pour $\Pi.(s' - z)$ une valeur particulière de u , qui renferme une constante arbitraire z , & dans laquelle on ait $0 = (\frac{\partial u}{\partial s}) + nu$, lorsque $z = s'$, parce que dans ce cas, u se réduit à B , & que l'on doit avoir $0 = (\frac{\partial B}{\partial s}) + nB$. On peut parvenir directement à ces résultats, de la manière suivante.

Supposons que l'intégrale $\int p \partial z . \phi(z)$, prise depuis z égal à une constante quelconque jusqu'à $z = s$, soit une valeur particulière de u ; on aura dans ce cas,

$$(\frac{\partial u}{\partial s'}) = \int (\frac{\partial p}{\partial s'}) . \partial z . \phi(z),$$

$$(\frac{\partial u}{\partial s}) = \int (\frac{\partial p}{\partial s}) . \partial z . \phi(z) + P . \phi(s),$$

P étant

P étant ce que devient p , lorsqu'on y fait $z = s$; de-là, on tirera

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial s'}\right) = f\left(\frac{\partial^2 p}{\partial s \partial s'}\right) \cdot \partial z \cdot \phi(z) + \left(\frac{\partial p}{\partial s'}\right) \cdot \phi(s);$$

en substituant ces valeurs dans l'équation (S) aux différences partielles, on aura

$$0 = \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial s'}\right) + m P \right\} \cdot \phi(s) \\ + \int \partial z \cdot \phi(z) \cdot \left\{ \left(\frac{\partial^2 p}{\partial s \partial s'}\right) + m \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) + n \left(\frac{\partial p}{\partial s'}\right) + l p \right\},$$

ce qui donne, en égalant séparément à zéro, les termes affectés du signe intégral,

$$0 = \left(\frac{\partial p}{\partial s'}\right) + m P,$$

$$0 = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial s \partial s'}\right) + m \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) + n \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial s'}\right) + l \cdot p.$$

On voit ainsi que si l'on a deux valeurs particulières de u , représentées par p & p' , qui renferment une constante arbitraire z , & qui soient telles que l'on ait

$$0 = \left(\frac{\partial p}{\partial s'}\right) + m P,$$

$$0 = \left(\frac{\partial p'}{\partial s}\right) + n P',$$

P étant ce que devient p lorsqu'on y fait $z = s$, & P' étant ce que devient p' lorsqu'on y fait $z = s'$, on aura pour l'expression complète de u ,

$$u = \int p \partial z \cdot \phi(z) + \int p' \partial z \cdot \psi(z),$$

$\phi(z)$ & $\psi(z)$ étant deux fonctions arbitraires de z , & l'intégrale du premier terme étant prise depuis z égal à une constante quelconque que nous supppserons zéro, jusqu'à $z = s$; celle du second terme étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s'$.

Si l'on change z en st dans le terme $\int p \partial z \cdot \phi(z)$, & que l'on nomme q ce que devient p par ce changement, on aura

$$\int p \partial z \cdot \phi(z) = \int q s \cdot \partial t \cdot \phi(st),$$

& comme l'intégrale relative à z doit être prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s$, il est clair que l'intégrale relative à t doit être prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$. Si l'on nomme pareillement q' ce que devient p' , lorsqu'on y change z en $s't$, on aura

$$\int p' \partial z \cdot \psi(z) = \int q' s' \partial t \cdot \psi(s't),$$

l'intégrale relative à t étant prise encore depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$; on peut conséquemment donner à u cette forme,

$$u = \int \partial t \cdot \{s q \cdot \phi(st) + s' q' \cdot \psi(s't)\},$$

l'intégrale étant prise depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$.

Si l'on nomme K l'intégrale $\int p \partial z \cdot \phi(z)$, prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \infty$; cette intégrale prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s$, sera visiblement égale à $K - \int p \partial z \cdot \phi(z)$, cette dernière intégrale étant prise depuis $z = s$ jusqu'à $z = \infty$; donc si l'on fait $z = s + z'$, & que l'on nomme r ce que devient p par ce changement, on aura

$$\int p \partial z \cdot \phi(z) = K - \int r \partial z' \cdot \phi(s + z'),$$

l'intégrale relative à z étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s$, & l'intégrale relative à z' étant prise depuis $z' = 0$ jusqu'à $z' = \infty$. Si l'on nomme pareillement K' l'intégrale $\int p' \partial z \cdot \psi(z)$ prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \infty$; que l'on fasse $z = s' + z'$, & que l'on nomme r' ce que devient p' par ce changement, on aura

$$\int p' \partial z \cdot \psi(z) = K' - \int r' \partial z' \cdot \psi(s' + z'),$$

l'intégrale relative à z étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s'$,

& l'intégrale relative à z' étant prise depuis $z' = 0$ jusqu'à $z' = \infty$; on aura donc

$$u = K + K' - \int \partial z' \cdot \{r \cdot \varphi(s + z') + r' \cdot \psi(s' + z')\}.$$

Les fonctions $\varphi(s + z')$ & $\psi(s' + z')$ étant arbitraires & pouvant même être supposées discontinues, on peut sans nuire à la généralité de cette valeur de u , les supposer telles que l'on ait $K + K' = 0$; on aura donc, en changeant le signe de ces fonctions,

$$u = \int \partial z' \cdot \{r \cdot \varphi(s + z') + r' \cdot \psi(s' + z')\}$$

l'intégrale étant prise depuis $z' = 0$ jusqu'à $z' = \infty$.

Ces différentes formes que l'on peut donner à u , ont chacune des avantages particuliers, suivant les différens Problèmes que l'on se propose de résoudre; on verra ci-après (*article XX*) un usage de la dernière, dans la théorie du son; mais on doit observer qu'elles sont toutes dépendantes d'intégrales définies, & qu'elles ne peuvent être ramenées à des intégrales indéfinies, que dans le cas où l'une ou l'autre des quantités p & p' est une fonction rationnelle & entière de z .

Toute la difficulté de l'intégration des équations linéaires aux différences partielles du second ordre, se réduit ainsi à déterminer ces quantités; c'est ce qui paroît très-difficile en général: nous nous bornerons conséquemment à considérer quelques cas particuliers qui sont relatifs à plusieurs Problèmes intéressans que l'on n'a pu résoudre encore que d'une manière particulière.

X I X.

SUPPOSONS d'abord m, n & l constans dans l'équation (S), on satisfera aux équations (γ) & (γ') de l'article précédent, en faisant

$$\begin{aligned} A &= e^{-ms' - ns}, \\ A^{(1)} &= e^{-ms' - ns} \cdot (mn - l) \cdot s', \\ A^{(2)} &= e^{-ms' - ns} \cdot \frac{(mn - l)^2}{1 \cdot 2} \cdot s'^2, \\ &\text{M m ij} \end{aligned}$$

$$A^{(\mu)} = e^{-ms' - ns} \cdot \frac{(mn - 1)}{1.2.3 \dots \mu} \cdot s^{\mu},$$

&c.

$$B = e^{-ms' - ns},$$

$$B^{(1)} = e^{-ms' - ns} \cdot (mn - 1) \cdot s,$$

$$B^{(2)} = e^{-ms' - ns} \cdot \frac{(mn - 1)^2}{1.2} \cdot s^2,$$

.....

$$B^{(\mu)} = e^{-ms' - ns} \cdot \frac{(mn - 1)^{\mu}}{1.2.3 \dots \mu} \cdot s^{\mu},$$

&c.

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; on aura ainsi

$$\Gamma \cdot (s - z) = e^{-ms' - ns} \cdot \left\{ 1 + (mn - 1) \cdot s' \cdot (s - z) + \frac{(mn - 1)^2}{1.2} \cdot s'^2 \cdot (s - z)^2 + \frac{(mn - 1)^3}{1.2.3} \cdot s'^3 \cdot (s - z)^3 + \&c. \right\}$$

en sorte que $\Gamma \cdot (s - z)$ est égal à une fonction de $s' \cdot (s - z)$, multipliée par $e^{-ms' - ns}$; soit y cette fonction, & nommons θ la quantité $s' \cdot (s - z)$; $e^{-ms' - ns} \cdot y$ fera, par ce précède, une intégrale particulière de l'équation proposée aux différences partielles; on la substituera donc pour u dans cette équation, & l'on observera que dans ce cas

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) = -n e^{-ms' - ns} \cdot y + e^{-ms' - ns} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \right);$$

or on a $\left(\frac{\partial \theta}{\partial s} \right) = s'$; partant

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s} \right) = e^{-ms' - ns} \cdot \left\{ -ny + s' \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \right\};$$

on aura pareillement

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial s^1}\right) &= e^{-ms^1 - ns} \cdot \{ -my + (s - z) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) \}, \\ \left(\frac{\partial \partial x}{\partial s \cdot \partial s^1}\right) &= e^{-ms^1 - ns} \cdot \{ mn \cdot y - n(s - z) \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) \\ &\quad - m \cdot s^1 \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + \theta \cdot \left(\frac{\partial \partial y}{\partial \theta^2}\right) \}. \end{aligned}$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation (S), on aura celle-ci aux différences ordinaires,

$$0 = (l - mn) \cdot y + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + \theta \cdot \left(\frac{\partial \partial y}{\partial \theta^2}\right),$$

& il faudra déterminer les deux constantes arbitraires de son intégrale, de manière que l'on ait $y = 1$, & $\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) = mn - l$ lorsque $\theta = 0$. Soit $\mathbf{I}(\theta)$ ce que devient cette intégrale, on aura

$$\mathbf{I} \cdot (s - z) = e^{-ms^1 - ns} \cdot \mathbf{I} \cdot \{ s^1 \cdot (s - z) \};$$

il est aisé de voir que l'on aura pareillement

$$\mathbf{II} \cdot (s^1 - z) = e^{-ms^1 - ns} \cdot \mathbf{I} \cdot [s \cdot (s^1 - z)];$$

partant

$$u = e^{-ms^1 - ns} \cdot \left\{ \int \partial z \cdot \mathbf{I} \cdot [s^1 \cdot (s - z)] \cdot \phi(z) \right. \\ \left. + \int \partial z \cdot \mathbf{I} \cdot [s \cdot (s^1 - z)] \cdot \psi(z) \right\}$$

l'intégrale du premier terme étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s$, & l'intégrale du second terme étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s^1$; en effet, si l'on substitue cette valeur de u dans l'équation proposée aux différences partielles, on s'assurera facilement qu'elle y satisfait; mais pour faire cette substitution, on doit observer en général que si l'intégrale $\int u \partial z$ doit être prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s$, la différence prise par

rapport à s , est $\partial s \cdot \int (\frac{\partial u}{\partial s}) \partial z + U \partial s$, U étant ce que devient u lorsqu'on y suppose $z = s$.

Si l , m & n étant toujours supposés constants, on a $l - mn = 0$, on aura $y = 1$, & l'expression de u deviendra

$$u = e^{-ms' - ns} \cdot \left\{ \int \partial z \cdot \varphi(z) \right\} + e^{-ms' - ns} \cdot [\varphi_1(s) + \psi_1(s')];$$

en sorte que la valeur de u est alors indépendante de toute intégrale définie; mais ce cas est le seul où cela puisse avoir lieu, & c'est ce qui résulte pareillement de ce qui a été démontré dans les Mémoires de l'Académie, *année 1773*, page 369.

L'équation des cordes vibrantes dans un milieu résistant comme la vitesse, est

$$a^2 \cdot (\frac{\partial \partial u}{\partial x^2}) = (\frac{\partial \partial u}{\partial t^2}) + b (\frac{\partial u}{\partial t}),$$

u étant l'ordonnée de la corde vibrante dont l'abscisse est x ; t représentant le temps, & a & b étant deux constantes dépendantes, l'une de la grosseur & de la tension de la corde, & l'autre de l'intensité de la résistance. Si l'on fait $at + x = s$, & $at - x = s'$, l'équation précédente deviendra

$$0 = (\frac{\partial \partial u}{\partial s \cdot \partial s'}) + \frac{b}{4a} \cdot (\frac{\partial u}{\partial s}) + \frac{b}{4a} \cdot (\frac{\partial u}{\partial s'});$$

l'expression précédente de u deviendra donc, en y substituant au lieu de s & de s' , leurs valeurs $at + x$ & $at - x$,

$$u = e^{\frac{bt}{4a}} \cdot \left\{ \int \partial z \cdot \mathbf{I} \cdot [(at - x) \cdot (at + x - z)] \cdot \varphi(z) \right\} + \int \partial z \cdot \mathbf{I} \cdot [(at + x) \cdot (at - x - z)] \cdot \psi(z)$$

la première intégrale étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = at + x$, & la seconde intégrale étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = at - x$. On voit par-là que le

Problème des cordes vibrantes dépend alors de l'intégration de l'équation différentielle

$$0 = -\frac{b^2}{16a^2} \cdot y + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) + \theta \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}\right);$$

on voit de plus qu'à cause du facteur $e^{-\frac{b^2}{2}}$, l'ordonnée u de la corde vibrante diminue sans cesse & devient nulle après un temps infini, ce qui d'ailleurs est visible *a priori*.

X X.

SUPPOSONS encore dans l'équation générale (S) de l'art. XVIII, $m = \frac{f}{s+s'}$, $n = \frac{g}{s+s'}$ & $l = \frac{h}{(s+s')^2}$, en sorte que l'on ait à intégrer cette équation aux différences partielles,

$$0 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial s'}\right) + \frac{f}{s+s'} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + \frac{g}{s+s'} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial s'}\right) + \frac{h \cdot u}{(s+s')^2}; (T)$$

on s'assurera facilement que les valeurs suivantes satisfont aux équations (γ) & (γ') de l'article cité,

$$A = (s+s')^{-f},$$

$$A^{(1)} = \{f \cdot (1 - g) + h\} \cdot \frac{A}{s+s'},$$

$$2.A^{(2)} = \{(f+1) \cdot (2 - g) + h\} \cdot \frac{A^{(1)}}{s+s'},$$

$$3.A^{(3)} = \{(f+2) \cdot (3 - g) + h\} \cdot \frac{A^{(2)}}{s+s'},$$

$$[.....]$$

$$\mu.A^{(\mu)} = \{(f+\mu-1) \cdot (\mu - g) + h\} \cdot \frac{A^{(\mu-1)}}{s+s'},$$

&c.

$$B = (s + s')^{-f},$$

$$B^{(1)} = \{g \cdot (1 - f) + h\} \cdot \frac{B}{s + s'},$$

$$2.B^{(1)} = \{(g + 1) \cdot (2 - f) + h\} \cdot \frac{B^{(1)}}{s + s'},$$

$$3.B^{(1)} = \{(g + 2) \cdot (3 - f) + h\} \cdot \frac{B^{(1)}}{s + s'},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\mu.B^{(\mu)} = \{(g + \mu - 1) \cdot (\mu - f) + h\} \cdot \frac{B^{(\mu-1)}}{s + s'},$$

&c.

on aura ainsi

$$\Gamma.(s - z) = (s + s')^{-f} \cdot \left\{ \begin{aligned} &1 + \{f(1 - g) + h\} \cdot \frac{s - z}{s + s'} \\ &+ \{(f + 1) \cdot (2 - g) + h\} \cdot \left(\frac{s - z}{s + s'}\right)^2 + \&c. \end{aligned} \right\}$$

donc si l'on fait $\frac{s - z}{s + s'} = \theta$, $\Gamma.(s - z)$ sera égal à une fonction de θ , multipliée par $(s + s')^{-f}$. Nommons y cette fonction, en sorte que $\Gamma.(s - z) = (s + s')^{-f} \cdot y$; $(s + s')^{-f} \cdot y$ sera une valeur particulière de u , & l'on aura dans ce cas

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) = -f \cdot (s + s')^{-f-1} \cdot y + (s + s')^{-f} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) \cdot \left(\frac{\partial \theta}{\partial s}\right);$$

or on a

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial s}\right) = \frac{1}{s + s'} - \frac{(s - z)}{(s + s')^2} = \frac{1}{s + s'} \cdot (1 - \theta);$$

partant

$$\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) = (s + s')^{-f-1} \cdot \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right) \cdot (1 - \theta) - f y \right\};$$

on

on trouvera pareillement

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial s'} \right) &= - (s + s')^{-f-1} \cdot \{fy + \theta \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)\}, \\ \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s \partial s'} \right) &= (s + s')^{-f-2} \cdot \left\{ \begin{aligned} &f \cdot (f+1) \cdot y + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \cdot (2f\theta + 2\theta - f - 1) \\ &- \theta \cdot (1 - \theta) \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'équation proposée aux différences partielles, on aura l'équation suivante aux différences ordinaires,

$$\begin{aligned} 0 &= \theta \cdot (1 - \theta) \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \right) + \{ \theta \cdot (g - f - 2) + 1 \} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + (fg - f - h) \cdot y; (a') \end{aligned}$$

il faudra déterminer les deux constantes arbitraires de son intégrale, de manière que l'on ait $y = 1$, &

$\left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right) = f \cdot (1 - g) + h$, lorsque $\theta = 0$; en nommant donc $\Gamma \cdot (\theta)$ ce que devient alors y , on aura

$$\Gamma \cdot (s - z) = \frac{\Gamma \cdot \left(\frac{s - z}{s + s'} \right)}{(s + s')^f}.$$

Si l'on change g en f , & réciproquement f en g dans l'équation (a') , on aura

$$0 = \theta \cdot (1 - \theta) \cdot \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \right) + \{ \theta \cdot (f - g - 2) + 1 \} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right) + (fg - g - h) \cdot y; (b')$$

& si l'on détermine les deux constantes arbitraires, de manière

que l'on ait $y = 1$, & $\left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right) = g(1 - f) + h$,

lorsque $\theta = 0$; en nommant $\Pi \cdot (\theta)$ ce que devient alors y , on aura

$$\Pi \cdot (s' - z) = \frac{\Pi \cdot \left(\frac{s' - z}{s + s'} \right)}{(s + s')^g}.$$

Mém. 1779.

Nn

Les deux fonctions $\mathbf{I}(\theta)$ & $\Pi(\theta)$, ont entr'elles une relation fort simple, au moyen de laquelle, lorsque l'une des deux sera connue, l'autre le sera pareillement : en effet, si dans l'équation (b') , on fait $y' = (1 - \theta)f^{-\varepsilon}.y$, on aura

$$0 = \theta.(1 - \theta).(\frac{\partial y'}{\partial \theta}) + \{\theta.(g - f - 2) + 1\}.(\frac{\partial y'}{\partial \theta}) + (fg - f - h).y',$$

équation qui est la même que l'équation (a') . De plus, comme on doit avoir, relativement à l'équation (b') , $y = 1$, & $(\frac{\partial y}{\partial \theta}) = g - fg + h$, lorsque $\theta = 0$; on aura dans ce même cas, $y' = 1$, &

$$(\frac{\partial y}{\partial \theta}) = (\frac{\partial y'}{\partial \theta}) - (f - g).y' = g - fg + h,$$

ce qui donne $(\frac{\partial y'}{\partial \theta}) = f - fg + h$; ainsi les deux constantes arbitraires de l'intégrale de l'équation en y' , sont les mêmes que celles de l'intégrale de l'équation (a') , ce qui donne $y' = \mathbf{I}(\theta)$; partant $\Pi(\theta) = (1 - \theta)f^{-\varepsilon}.\mathbf{I}(\theta)$; on a d'ailleurs, relativement à l'équation (b') , $\theta = \frac{s' - z}{s + s'}$; donc

$$\Pi.(\frac{s' - z}{s + s'}) = \frac{(s + z)^{f-\varepsilon}.\mathbf{I}(\frac{s' - z}{s + s'})}{(s + s')^{f-\varepsilon}},$$

$$\& \quad \Pi.(s' - z) = \frac{(s + z)^{f-\varepsilon}.\mathbf{I}(\frac{s' - z}{s + s'})}{(s + s')^f},$$

on aura conséquemment par l'article XVIII,

$$u = \frac{1}{(s + s')^f} \cdot \left\{ \int \partial z.\mathbf{I}(\frac{s' - z}{s + s'}) \cdot \varphi(z) + \int \partial z.(s + z)^{f-\varepsilon}.\mathbf{I}(\frac{s' - z}{s + s'}) \cdot \psi(z) \right\}; (V)$$

la première intégrale étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s$, & la seconde étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s'$.

Si l'une ou l'autre des deux quantités $\int \left(\frac{s-z}{s+s'} \right) dz$ & $\int \left(\frac{s'-z}{s+s'} \right) dz$, celle-ci, par exemple, $\int \left(\frac{s-z}{s+s'} \right) dz$ est une fonction rationnelle & entière de z ; alors l'expression de u , considérée relativement à la fonction arbitraire correspondante qui dans ce cas est $\phi(z)$, sera exprimée par une suite finie de termes multipliés par les intégrales successives de $\phi(s)$; car il est clair qu'alors $\int dz \cdot \int \left(\frac{s-z}{s+s'} \right) \phi(z)$, sera composé de termes de la forme $H \cdot \int z^\mu dz \cdot \phi(z)$, μ étant un nombre entier positif: or on a en intégrant par parties,

$$\int z^\mu \cdot dz \cdot \phi(z) = z^\mu \cdot \phi_1(z) - \mu \cdot z^{\mu-1} \cdot \phi_2(z) + \mu \cdot (\mu-1) \cdot z^{\mu-2} \cdot \phi_3(z) \dots \\ \dots \pm 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \mu \cdot \phi_{\mu+1}(z) + C,$$

expression délivrée du signe \int , & dans laquelle on doit faire $z = s$. On voit ainsi que la partie de l'expression de u relative à la fonction arbitraire $\phi(z)$, est indépendante non-seulement de toute intégrale définie, mais encore de toute espèce d'intégrale: or il résulte de ce que j'ai démontré dans les Mémoires cités de 1773, que l'expression complète de u est alors entièrement indépendante de toute intégrale définie, c'est-à-dire qu'elle peut être exprimée par des intégrales indéfinies uniquement relatives aux variables s & s' de l'équation proposée. On peut s'en assurer encore très-aisément au moyen de la formule (V); car il est visible que l'intégrale

$$\int dz \cdot (s+z)^{f-s} \cdot \int \left(\frac{s'-z}{s+s'} \right) \cdot \psi(z)$$

sera dans ce cas réductible à des termes de cette forme,

$$H \int z^\mu dz \cdot (s+z)^{f-s} \cdot \psi(z),$$

N n ij

μ étant un nombre entier positif ou zéro : or on peut par des intégrations par parties, réduire l'intégrale

$$\int z^\mu \partial z \cdot (s + z)^{f-g} \cdot \psi(z)$$

à des termes délivrés du signe \int , & à des intégrales de cette forme,

$$\int \partial z \cdot (s + z)^r \cdot \psi_i(z);$$

cette dernière intégrale devant être prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = s'$, est évidemment égale à celle-ci,

$$\int \partial s' \cdot (s + s')^r \cdot \psi_i(s),$$

& par conséquent indépendante de toute intégrale définie : on voit par-là comment l'intégrale

$$\int \partial z \cdot (s + z)^{f-g} \cdot \mathbf{I} \cdot \left(\frac{s' - z}{s + s'} \right) \cdot \psi(z)$$

peut se réduire à des intégrales indéfinies, quoique le facteur

$$(s + z)^{f-g} \cdot \mathbf{I} \cdot \left(\frac{s' - z}{s + s'} \right)$$

puisse ne pas être une fonction rationnelle & entière de z .

Maintenant la condition nécessaire pour que l'expression de $\mathbf{I} \cdot \left(\frac{s' - z}{s + s'} \right)$, réduite en série, se termine, est que l'on ait $A^{(\mu)} = 0$, μ étant un nombre positif, ce qui donne

$$0 = (f + \mu - 1) \cdot (\mu - g) + h;$$

d'où l'on tire

$$\mu = \frac{1 + g - f \pm \sqrt{(f + g - 1)^2 - 4h}}{2}.$$

Lorsque l'une ou l'autre de ces deux valeurs de μ est zéro ou un nombre entier positif, alors $\mathbf{I} \cdot \left(\frac{s' - z}{s + s'} \right)$ est une

fonction rationnelle & entière de z ; en changeant f en g & réciproquement, on aura

$$\mu = \frac{1 + f - g \pm \sqrt{(f + g - 1)^2 - 4h}}{2},$$

& si l'une ou l'autre de ces valeurs de μ est zéro ou un nombre entier positif, la valeur de $\square \cdot \left(\frac{s' - z}{s + s'}\right)$ sera une fonction rationnelle & entière de z ; dans tous ces cas, l'expression de u ne dépendra d'aucune intégrale définie, autrement elle en sera nécessairement dépendante.

Si l'on nomme x la distance d'une molécule d'air à l'origine du son dans l'état d'équilibre, $x + u$ la distance après le temps t , on aura

$$\left(\frac{\partial \partial u}{\partial t^2}\right) = a^2 \cdot \left(\frac{\partial \partial u}{\partial x^2}\right) + \frac{ma^2}{x} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{ma^2 u}{x^2},$$

a^2 étant un coefficient constant dépendant de l'élasticité & de la densité de l'air, & m étant 0, ou 1, ou 2, suivant que l'on considère l'air ou avec une seule, ou avec deux, ou avec trois dimensions (*voyez sur cet objet les savantes Recherches de M. de la Grange sur le son, insérées dans le Tome II des Mémoires de la Société Royale de Turin*). Soit $x + at = s$; $x - at = s'$; l'équation précédente deviendra

$$0 = \left(\frac{\partial \partial u}{\partial s \partial s'}\right) + \frac{m}{2(s + s')} \cdot \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial s'}\right)\right] - \frac{mu}{(s + s')^2};$$

la formule (V) deviendra donc

$$u = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int \partial z \cdot \mathbf{I} \cdot \left(\frac{x + at - z}{2x}\right) \cdot \phi(z) \right. \\ \left. + \int \partial z \cdot \mathbf{I} \cdot \left(\frac{x - at - z}{2x}\right) \cdot \psi(z) \right\}$$

la première intégrale étant prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = x + at$, & la seconde étant prise depuis $z = 0$

jusqu'à $z = x - at$. La fonction $J.(\frac{x \pm at - z}{2s})$ est la valeur de y , dans l'équation différentielle,

$$0 = \theta.(1 - \theta).(\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}) + \theta.(1 - 2\theta).(\frac{\partial y}{\partial \theta}) + \frac{m^2 + 2m}{4}.y,$$

dans laquelle $\theta = \frac{x \pm at - z}{2s}$, les deux constantes arbitraires de son intégrale devant se déterminer, en sorte que l'on ait $y = 1$, & $(\frac{\partial y}{\partial \theta}) = -\frac{m}{4}.(2 + m)$.

Si l'on a $m = 0$ ou $m = 2$, la valeur de y , ordonnée suivant les puissances de θ , se termine, & alors la valeur de u est indépendante de toute intégrale définie; mais lorsque $m = 1$, ce qui a lieu quand on ne considère l'air qu'avec deux dimensions, l'expression de u est nécessairement dépendante d'une intégrale définie.

Si l'on change dans $J.(\frac{x \pm at - z}{2s})$, z en $x \pm at + z'$, on aura par l'article XVIII,

$$u = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{z'}{2s}} \partial z'. J.(-\frac{z'}{2s}). \{ \varphi(x + at + z') + \psi(x - at + z') \}$$

l'intégrale étant prise depuis $z' = 0$ jusqu'à $z' = \infty$. Il résulte évidemment de cette valeur de u , que la molécule d'air dont elle exprime le dérangement, ne commence à s'ébranler que lorsque $x - at + z'$ est égal ou moindre que le rayon de la petite sphère agitée au commencement; d'où il suit que dans les trois cas où l'air a une ou deux ou trois dimensions, la vitesse du son est la même, & se détermine par l'équation $t = \frac{s}{a}$; on voit ainsi que les formes précédentes des intégrales des équations aux différences partielles, ont le même avantage dans les questions physiques, que les formes connues jusqu'à présent.

Nous pourrions encore appliquer la méthode précédente à la recherche des vibrations des cordes inégalement épaisses, à la théorie du son dans des tuyaux d'une figure quelconque, & à plusieurs autres questions importantes; mais ces discussions nous écarteroient trop de notre objet principal.

X X L

REVENONS présentement aux équations linéaires aux différences finies partielles: quoique les formules que nous avons données dans l'article XVI, pour les intégrer, aient la plus grande généralité, il y a cependant quelques cas où elles ne peuvent servir; ces cas ont lieu lorsque l'équation $z = 0$ donne l'expression de $\frac{1}{r}$ en $\frac{1}{r'}$ par une suite infinie, ce qui arrive toutes les fois que dans la fonction z , la plus haute puissance de $\frac{1}{r}$ est multipliée par une fonction rationnelle & entière de $\frac{1}{r'}$. Pour avoir alors l'expression de $y_{x,x'}$ en termes finis, il est nécessaire de recourir à quelques artifices d'analyse que nous allons exposer, en les appliquant à l'équation suivante,

$$\frac{1}{r.r'} - \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r} - c = 0;$$

cette équation donne

$$\frac{1}{z} = \frac{c + \frac{a}{r^2}}{\frac{1}{r^2} - b};$$

partant,

$$\frac{1}{r^2.r'.r'^2} = \frac{(c + \frac{a}{r^2})^2}{r'^2 \cdot (\frac{1}{r^2} - b)^2}.$$

En développant par rapport aux puissances de $\frac{1}{r^2}$, le second membre de cette équation, on auroit une suite infinie, ce qui donneroit $y_{x, x'}$ en suite infinie; pour obvier à cet inconvénient, nous mettrons l'équation précédente sous cette forme,

$$\frac{1}{r^2 \cdot r'^2 \cdot x'^2} = \frac{\left(\frac{1}{r^2} - b + b\right)^{x'} \cdot [c + ab + a\left(\frac{1}{r^2} - b\right)]^x}{\left(\frac{1}{r^2} - b\right)^x}.$$

Si l'on développe le second membre de cette équation par rapport aux puissances de $\frac{1}{r^2} - b$, on aura

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2 \cdot r'^2 \cdot x'^2} = & \left\{ \left(\frac{1}{r^2} - b\right)^{x'} + x' \cdot b \cdot \left(\frac{1}{r^2} - b\right)^{x'-1} \right. \\ & + \frac{x' \cdot (x'-1)}{1 \cdot 2} \cdot b^2 \cdot \left(\frac{1}{r^2} - b\right)^{x'-2} + \&c. \Big\} \\ & \times \left\{ a^x + x \cdot (c + ab) \cdot \frac{a^{x-1}}{\frac{1}{r^2} - b} \right. \\ & + \frac{x \cdot (x-1)}{1 \cdot 2} \cdot (c + ab)^2 \cdot \frac{a^{x-2}}{\left(\frac{1}{r^2} - b\right)^2} + \&c. \Big\} \end{aligned}$$

Soit

$$V = a^x;$$

$$V^{(1)} = x' \cdot b \cdot a^{x'} + x \cdot (c + ab) \cdot a^{x-1};$$

$$V^{(2)} = \frac{x' \cdot (x'-1)}{1 \cdot 2} \cdot b^2 \cdot a^{x'} + x' \cdot x \cdot b \cdot (c + ab) \cdot a^{x-1} + \frac{x \cdot (x-1)}{1 \cdot 2} \cdot (c + ab)^2 \cdot a^{x-2}$$

$$\begin{aligned} V^{(3)} = & \frac{x' \cdot (x'-1) \cdot (x'-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot b^3 \cdot a^{x'} + \frac{x' \cdot (x'-1)}{1 \cdot 2} \cdot x \cdot b^2 \cdot (c + ab) \cdot a^{x-1} \\ & + x' \cdot \frac{x \cdot (x-1)}{1 \cdot 2} \cdot b \cdot (c + ab)^2 \cdot a^{x-2} + \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (c + ab)^3 \cdot a^{x-3}; \end{aligned}$$

&c.

ou

on aura

$$\frac{x}{t^x \cdot t^{x'}} = u \cdot \left\{ \begin{aligned} &V \cdot \left(\frac{1}{t} - b\right)^{x'} + V^{(1)} \cdot \left(\frac{1}{t} - b\right)^{x'-1} \\ &+ V^{(2)} \cdot \left(\frac{1}{t} - b\right)^{x'-2} \dots + V^{(x')} \\ &+ \frac{V^{(x'+1)}}{\frac{1}{t} - b} + \frac{V^{(x'+2)}}{\left(\frac{1}{t} - b\right)^2} \dots + \frac{V^{(x+x')}}{\left(\frac{1}{t} - b\right)^x} \end{aligned} \right\}$$

or l'équation

$$\frac{1}{t \cdot t'} - \frac{a}{t} - \frac{b}{t'} - c = 0,$$

donne

$$\frac{1}{t} - b = \frac{\frac{1}{t} - a}{c + ab}.$$

partant

$$\frac{x}{t^x \cdot t^{x'}} = u \cdot \left\{ \begin{aligned} &V \cdot \left(\frac{1}{t} - b\right)^{x'} + V^{(1)} \cdot \left(\frac{1}{t} - b\right)^{x'-1} \dots + V^{(x')} \\ &+ \frac{V^{(x'+1)}}{c + ab} \cdot \left(\frac{1}{t} - a\right) + \frac{V^{(x'+2)}}{(c + ab)^2} \cdot \left(\frac{1}{t} - a\right)^2 \dots \\ &\dots + \frac{V^{(x+x')}}{(c + ab)^x} \cdot \left(\frac{1}{t} - a\right)^x \end{aligned} \right\}$$

Pour repasser maintenant des fonctions génératrices à leurs variables correspondantes, nous observerons 1.^o que le coefficient de $t^0 \cdot t^{x'}$ dans $\frac{x}{t^x \cdot t^{x'}}$, est $y_{x, x'}$; 2.^o que ce même coefficient dans un terme quelconque tel que $u \cdot \left(\frac{1}{t} - b\right)^r$ ou $u b^r \cdot \left(\frac{1}{bt} - 1\right)^r$, est égal à

$$b^r \cdot \left\{ \frac{y_{0, r}}{b^r} - r \cdot \frac{y_{0, r-1}}{b^{r-1}} + \frac{r \cdot (r-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{y_{0, r-2}}{b^{r-2}} - \dots \right\}$$

Mém. 1779.

Qq

& par conséquent égal à $b^r \cdot \Delta^r \cdot \left(\frac{y_{0,x^r}}{b^{x^r}} \right)$, la caractéristique différentielle Δ se rapportant à la variabilité de x^r , & cette variable devant être supposée nulle après les différenciations; 3.° que ce coefficient dans $u \cdot \left(\frac{1}{b} - a \right)^r$, est $a^r \cdot \Delta^r \cdot \left(\frac{y_{x,0}}{a^x} \right)$, la caractéristique Δ se rapportant à la variabilité de x , & cette variable devant être supposée nulle après les différenciations; on aura donc avec cette condition,

$$\begin{aligned} y_{x,x^r} = & V \cdot b^{x^r} \cdot \Delta^{x^r} \cdot \left(\frac{y_{0,x^r}}{b^{x^r}} \right) + V^{(1)} \cdot b^{x^r-1} \cdot \Delta^{x^r-1} \cdot \left(\frac{y_{0,x^r}}{b^{x^r}} \right) \\ & + V^{(2)} \cdot b^{x^r-2} \cdot \Delta^{x^r-2} \cdot \left(\frac{y_{0,x^r}}{b^{x^r}} \right) \dots \dots + V^{(x^r)} \cdot y_{0,x^r} \\ & + \frac{V^{(x^r+1)}}{c+ab} \cdot a \cdot \Delta \cdot \left(\frac{y_{x,0}}{a^x} \right) + \frac{V^{(x^r+2)}}{(c+ab)^2} \cdot a^2 \cdot \Delta \cdot \left(\frac{y_{x,0}}{a^x} \right) \dots \\ & + \frac{V^{(x^r+x^r)}}{(c+ab)^{x^r}} \cdot a^{x^r} \cdot \Delta^{x^r} \cdot \left(\frac{y_{x,0}}{a^x} \right); \end{aligned}$$

ce fera l'intégrale complète de l'équation

$$y_{x,x^r+1} - a \cdot y_{x,x^r} - b \cdot y_{x+1,x^r} - c \cdot y_{x,x^r} = 0,$$

& il est visible que cette intégrale suppose que l'on connoît le premier rang horizontal & le premier rang vertical de la Table (Q) de l'article XVI.

XXII.

POUR éclaircir par un exemple la méthode que nous avons donnée précédemment pour intégrer les équations aux différences finies partielles, supposons que l'on ait l'équation

$$0 = r \cdot \left(\frac{1}{r} - 1 \right)^x - r^x \cdot \left(\frac{1}{r} - 1 \right)^y,$$

en aura

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{2} \cdot t^2 + \frac{1}{2t} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{t} - t' \right).$$

Soit

$$\frac{1}{t} = Z + \frac{1}{t} \cdot Z^{(1)},$$

Z & $Z^{(1)}$ étant des fonctions de t^2 & de x ; on déterminera ces fonctions en substituant successivement dans l'équation précédente, au lieu de $\frac{1}{t}$, les deux valeurs; ce qui donne

$$\left\{ \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2t} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} - t' \right) \right\}^2 = Z + Z^{(1)} \cdot \left\{ \frac{1}{2t} + \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} - t' \right) \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2t} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} - t' \right) \right\}^2 = Z + Z^{(1)} \cdot \left\{ \frac{1}{2t} + \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} - t' \right) \right\}$$

d'où il est aisé de conclure

$$Z = \frac{\frac{1}{t^2} - t'^2}{\frac{1}{t^2} - 1},$$

$$Z^{(1)} = \frac{\frac{1}{t^2} - t'^2}{\frac{1}{t^2} - t'^2}.$$

partant

$$\frac{1}{t^2} = u \cdot \frac{\left(\frac{1}{t^2} - t'^2 \right)}{\frac{1}{t^2} - 1} + \frac{1}{t} \cdot \frac{\left(\frac{1}{t^2} - t'^2 \right)}{\frac{1}{t^2} - t'^2}.$$

Présentement le coefficient de $t^0 \cdot t'^2$ dans $\frac{1}{t^2}$, est $y_{2,2}$ & si l'on désigne par $\Gamma \cdot \lambda_{ij}$ & $\Pi \cdot \lambda_{ij}$ les coefficients de t^i dans le développement des fonctions $\frac{1}{t^2 - 1}$ & $\frac{1}{t^2 - t'^2}$

O o ij

u étant égal à la suite infinie, $\lambda_0 + \lambda_1.t + \lambda_2.t^2 + \dots$

on aura 1.^o $\Gamma \cdot y_{0,x+x'} - z$ pour le coefficient de $t^0.t'^x$ dans $\frac{u}{t^{x'-x} \cdot (t^{x'} - 1)}$; 2.^o $\Gamma \cdot y_{0,x'} - z$ pour ce coefficient

dans $\frac{t^{x'} \cdot u}{t^{x'} - 1}$; 3.^o $\Pi \cdot y_{1,x+x'}$ pour ce coefficient

dans $\frac{\frac{u}{t} \cdot \frac{1}{t^{x'}}$; 4.^o $\Pi \cdot y_{1,x'} - z$ pour ce coefficient

dans $\frac{\frac{u}{t} \cdot t^{x'}}{\frac{1}{t^{x'}} - t^{x'}}$; on aura donc

$$y_{x,x'} = \Gamma \cdot y_{0,x+x'} - z - \Gamma \cdot y_{0,x'} - z + \Pi \cdot y_{1,x+x'} - \Pi \cdot y_{1,x'} - z;$$

& si l'on représente $\Gamma \cdot y_{0,x+x'} - z + \Pi \cdot y_{1,x+x'}$ par $\phi(x+x')$, & $-\Gamma \cdot y_{0,x'} - z - \Pi \cdot y_{1,x'} - z$ par $\psi(x' - x)$, $\phi(x)$ & $\psi(x)$ étant deux fonctions arbitraires de x , on aura

$$y_{x,x'} = \phi(x+x') + \psi(x' - x).$$

Cela posé, si l'on multiplie l'équation $0 = t \cdot (\frac{1}{t} - 1)^2$ par u , & que l'on repasse des fonctions génératrices à leurs variables correspondantes, on aura l'équation aux différences partielles,

$$y_{x+1,x'} - 2y_{x,x'} + y_{x-1,x'} = y_{x,x'+1} - 2y_{x,x'} + y_{x,x'-1};$$

son intégrale complète sera par conséquent

$$y_{x,x'} = \phi(x+x') + \psi(x' - x),$$

ce qui est visible d'ailleurs par la simple substitution, mais

J'ai cru que l'on ne seroit pas fâché de voir comment cette intégrale se déduit des méthodes précédentes.

Supposons maintenant que dans la Table suivante,

$$\begin{array}{ccccccccccc} y_{0,0}, & y_{1,0}, & y_{2,0}, & y_{3,0}, & y_{4,0} & \dots & y_{n-1,0}, & y_{n,0} \\ y_{0,1}, & y_{1,1}, & y_{2,1}, & y_{3,1}, & y_{4,1} & \dots & y_{n-1,1}, & y_{n,1} \\ y_{0,2}, & y_{1,2}, & y_{2,2}, & y_{3,2}, & y_{4,2} & \dots & y_{n-1,2}, & y_{n,2} \\ y_{0,3}, & y_{1,3}, & y_{2,3}, & y_{3,3}, & y_{4,3} & \dots & y_{n-1,3}, & y_{n,3} ; (Z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & \text{\&c.} \end{array}$$

$$y_{0,\infty}, y_{1,\infty}, y_{2,\infty}, y_{3,\infty}, y_{4,\infty} \dots y_{n-1,\infty}, y_{n,\infty}$$

on connoisse les deux premiers rangs horizontaux compris entre les deux colonnes verticales extrêmes,

$$\begin{array}{ccccccc} y_{0,0}, & y_{0,1}, & y_{0,2}, & \dots & y_{0,\infty} \\ y_{n,0}, & y_{n,1}, & y_{n,2}, & \dots & y_{n,\infty} \end{array}$$

& que l'on connoisse de plus tous les termes de ces deux colonnes; on pourra déterminer toutes les valeurs de $y_{x,x}$, qui tombent entre ces deux colonnes; car si l'on veut former le troisième rang horizontal, on reprendra l'équation

$$y_{x+1,x} - 2y_{x,x} + y_{x-1,x} = y_{x,x+1} - 2y_{x,x} + y_{x,x-1}$$

qui se réduit à

$$y_{x,x+1} = y_{x+1,x} + y_{x-1,x} - y_{x,x-1}$$

en y faisant $x = 1$, & successivement $x = 1$, $x = 2$, $x = 3 \dots x = n - 1$, on aura

$$y_{1,2} = y_{2,1} + y_{0,1} - y_{1,0}$$

$$y_{2,2} = y_{3,1} + y_{1,1} - y_{2,0}$$

$$y_{3,2} = y_{4,1} + y_{2,1} - y_{3,0}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_{n-1,2} = y_{n,1} + y_{n-2,1} - y_{n-1,0}$$

on formera de la même manière le quatrième rang horizontal, & ainsi de suite à l'infini; mais si l'on vouloit déterminer les valeurs de $y_{x, x'}$ qui tombent hors de la Table (Z), les conditions précédentes ne suffiroient pas, & il seroit nécessaire d'y en joindre d'autres.

Cherchons présentement l'expression de $y_{x, x'}$; pour cela, reprenons l'intégrale

$$y_{x, x'} = \varphi(x' + x) + \psi(x' - x), \dots$$

& supposons que le second rang horizontal qui détermine une des deux fonctions arbitraires, soit tel que l'on ait $\psi(x' - x) = \varphi(x - x')$, on aura

$$y_{x, x'} = \varphi(x' + x) + \varphi(x - x');$$

en faisant $x' = 0$, on aura $\varphi(x) = \frac{1}{2} \cdot y_{x, 0}$; partant

$$y_{x, x'} = \frac{1}{2} \cdot y_{x+x', 0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-x', 0}.$$

Il est aisé de voir que cette équation satisfait à l'équation proposée aux différences partielles; mais elle n'est qu'une intégrale particulière qui répond au cas où le second rang horizontal se forme du premier, au moyen de l'équation

$$y_{x, x} = \frac{1}{2} \cdot y_{x+1, 0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-1, 0}.$$

Tant que $x + x'$ sera égal ou moindre que n , & que $x - x'$ sera positif ou nul, on aura la valeur de $y_{x, x'}$ au moyen du premier rang horizontal; mais lorsque x' croissant, $x + x'$ deviendra plus grand que n , & que $x - x'$ deviendra négatif, il faudra déterminer les valeurs de $y_{x+x', 0}$ & de $y_{x-x', 0}$, au moyen des colonnes verticales extrêmes. Supposons que tous les termes de ces deux colonnes soient zéro, & qu'ainsi l'on ait $y_{x, x'} = 0$ & $y_{x, x'} = 0$; en faisant $x = 0$ dans l'équation,

$$y_{0, x'} = \frac{1}{2} \cdot y_{x', 0} + \frac{1}{2} \cdot y_{-x', 0}$$

on aura

$$y_{-x',0} = -y_{x',0}$$

en y faisant ensuite $x = n$, on aura

$$y_{n+x',0} = -y_{n-x',0}$$

Si l'on change dans cette dernière équation, x' en $n + x'$, on aura

$$y_{n+n+x',0} = -y_{n-x',0} = y_{x',0}$$

en changeant encore x' en $n + x'$, on aura

$$y_{3n+x',0} = y_{n+x',0} = -y_{n-x',0}$$

D'où l'on tire généralement

$$y_{2n+x',0} = y_{x',0}$$

&

$$y_{(2r+1)n+x',0} = -y_{n-x',0}$$

On pourra ainsi, au moyen de ces deux équations, continuer les valeurs de $y_{x',0}$ à l'infini, du côté des valeurs positives de x , & l'on en conclura celles qui répondent à x négatif, au moyen de l'équation $y_{-x',0} = -y_{x',0}$; de-là résulte la construction suivante.

Si l'on représente les valeurs de $y_{x',0}$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, par les ordonnées des angles d'un polygone dont l'abscisse soit x , & dont les deux extrémités A & B aboutissent aux points où $x = 0$ & $x = n$; on portera ce polygone depuis $x = n$ jusqu'à $x = 2n$, en lui donnant une position contraire à celle qu'il avoit depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, c'est-à-dire une position telle que les parties qui étoient au-dessus de l'axe des abscisses se trouvent au-dessous, le point B du polygone restant d'ailleurs dans cette seconde position à la même place que dans la première, & le point A répondant ainsi à l'abscisse $x = 2n$; on placera ensuite ce même polygone depuis $x = 2n$ jusqu'à $x = 3n$, en lui donnant une position contraire à la seconde, &

par conséquent semblable à la première, de manière que le point A conserve dans cette troisième position, la même place que dans la seconde, & qu'ainsi le point B réponde à l'abscisse $x = 3n$; en continuant de placer ainsi ce polygone alternativement au-dessus & au-dessous de l'axe des abscisses, les ordonnées menées aux angles de ces polygones seront les valeurs de $y_{x,0}$ qui répondent à x positif.

Pareillement, on placera ce polygone depuis $x = 0$ jusqu'à $x = -n$, en lui donnant une position contraire à celle qu'il avoit depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, le point A restant d'ailleurs dans cette seconde position, à la même place que dans la première; on placera ensuite ce polygone depuis $x = -n$ jusqu'à $x = -2n$, en lui donnant une position contraire à la seconde, le point B restant d'ailleurs à la même place, & ainsi de suite à l'infini. Les ordonnées de ces polygones représenteront les valeurs de $y_{x,0}$ qui répondent à x négatif; on aura ensuite la valeur de $y_{x,x'}$, en prenant la moitié de la somme des deux ordonnées qui répondent aux abscisses $x + x'$ & $x - x'$.

Cette construction géométrique est générale, quelle que soit la nature du polygone que nous venons de considérer; elle servira à déterminer toutes les valeurs de $y_{x,x'}$, comprises depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, & depuis $x' = 0$ jusqu'à $x' = \infty$, pourvu que l'on ait $y_{0,x'} = 0$ & $y_{x,0} = 0$, & que d'ailleurs le second rang horizontal de la Table (Z), soit tel que l'on ait

$$y_{x,1} = \frac{1}{2} \cdot y_{x+1,0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-1,0}$$

ou ce qui revient au même,

$$y_{x,1} - y_{x,0} = \frac{1}{2} \cdot \{ y_{x+1,0} - 2y_{x,0} + y_{x-1,0} \}.$$

On peut au reste s'assurer facilement de la vérité des résultats précédens dans des exemples particuliers, en donnant à n des valeurs particulières, en prenant ensuite des nombres à volonté pour former le premier rang horizontal de la Table (Z), & en formant le second rang au moyen de

de l'équation $y_{x,x} = \frac{1}{2} \cdot y_{x+x',0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-x',0}$; enfin, en supposant généralement $y_{0,x'} = 0$, & $y_{x,x'} = 0$; car, si au moyen de ces conditions & de l'équation proposée aux différences partielles,

$$y_{x,x'} + 1 = y_{x+1,x'} + y_{x-1,x'} - y_{x,x'-1},$$

on forme les autres rangs horizontaux de la Table (Z), on trouvera qu'ils feront les mêmes que ceux qui résultent de la construction précédente.

On a, par ce qui précède,

$$y_{x,x'} + n = \frac{1}{2} \cdot y_{x+x'+n,0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-n-x',0}.$$

De plus, $y_{x+x'+n,0} = - y_{n-x-x',0}$

& $y_{n-n-x',0} = - y_{n+x'-n,0}$

donc

$$y_{x,x'} + n = - \frac{1}{2} \cdot y_{n-x-x',0} - \frac{1}{2} \cdot y_{n-x+x',0} = - y_{n-x,x'}.$$

Il suit de-là que dans la Table (Z), le $(x' + n)^{\text{ième}}$ rang horizontal est le $x'^{\text{ième}}$ rang horizontal, pris avec un signe contraire & dans un ordre renversé, c'est-à-dire que le terme $r^{\text{ième}}$ du rang $(x' + n)^{\text{ième}}$ est le terme $(n - r)^{\text{ième}}$ du $x'^{\text{ième}}$ rang, pris avec un signe contraire.

On a ensuite

$$y_{x,x'} + 2n = \frac{1}{2} \cdot y_{2n+x+x',0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-x'-2n,0}$$

on a d'ailleurs

$$y_{2n+x+x',0} = y_{x+x',0}$$

$$\& y_{x-x'-2n,0} = - y_{2n+x'-x,0} = - y_{x'-x,0} = y_{x-x',0}$$

partant

$$y_{x,x'} + 2n = \frac{1}{2} \cdot y_{x+x',0} + \frac{1}{2} \cdot y_{x-x',0} = y_{x,x'}$$

d'où il suit que le $(x' + 2n)^{\text{ième}}$ rang horizontal est exactement égal au $x'^{\text{ième}}$ rang.

Considérons présentement les vibrations d'une corde dont la figure initiale soit quelconque, mais fort peu éloignée de l'axe des abscisses; nommons x l'abscisse; t le temps; $y_{x,t}$ l'ordonnée d'un point quelconque de la corde après le temps t ; concevons de plus l'abscisse x partagée dans une infinité de petites parties égales à ∂x , & que nous prendrons pour l'unité. Cela posé, on aura par les principes connus de Dynamique,

$$\left(\frac{\partial^2 y_{x,t}}{\partial t^2}\right) = \frac{a^2}{\partial x^2} \cdot (y_{x+\partial x,t} - 2y_{x,t} + y_{x-\partial x,t}),$$

a étant un coefficient constant dépendant de la tension & de la grosseur de la corde. Si l'on fait $t = \frac{x'}{a}$, on aura $\partial t = \frac{\partial x'}{a}$, & $y_{x,t}$ deviendra une fonction de x & de x' , que nous désignerons par $y_{x,x'}$; or la grandeur de ∂t étant arbitraire, on peut la supposer telle que la variation de x' soit égale à celle de x , que nous avons prise pour l'unité; l'équation précédente deviendra ainsi

$$y_{x,x'} + \cdot - 2y_{x,x'} + y_{x,x'} - \cdot = y_{x+\partial x,x'} - 2y_{x,x'} + y_{x-\partial x,x'}$$

x & x' étant des nombres infinis. Cette équation est la même que nous venons de considérer; ainsi la construction géométrique que nous avons donnée, au moyen du polygone qui représente la valeur de $y_{x,0}$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = n$, peut être employée dans ce cas: le polygone sera ici la courbe initiale de la corde; mais pour cela, il faut supposer n égal à la longueur de la corde, & la concevoir partagée dans une infinité de parties; il faut de plus que la corde soit fixe à ses deux extrémités, afin que l'on ait $y_{0,x'} = 0$ & $y_{n,x'} = 0$; d'ailleurs, l'équation de condition

$$y_{x,0} - y_{x,0} = \frac{1}{2} \cdot (y_{x+\partial x,0} - 2y_{x,0} + y_{x-\partial x,0})$$

se change dans celle-ci,

$$\partial t \cdot \left(\frac{\partial y_{x,0}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \cdot \partial x^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 y_{x,0}}{\partial x^2} \right),$$

ce qui donne $\left(\frac{\partial y_{x,0}}{\partial t} \right) = 0$; or $\left(\frac{\partial y_{x,0}}{\partial t} \right)$ est la vitesse initiale de la corde; cette vitesse doit donc être nulle à l'origine du mouvement. Toutes les fois que ces conditions auront lieu, la construction précédente donnera toujours le mouvement de la corde, quelle que soit d'ailleurs sa figure initiale, pourvu cependant que dans tous les points $y_{x+1,0} - 2y_{x,0} + y_{x-1,0}$ soit infiniment petit du second ordre, c'est-à-dire que deux côtés contigus de la courbe ne forment point entre eux un angle fini. Cette condition est nécessaire pour que l'équation différentielle du Problème puisse subsister, & pour que celle-ci

$$\left(\frac{\partial y_{x,0}}{\partial t} \right) \cdot \partial t = \frac{1}{2} \cdot (y_{x+1,0} - 2y_{x,0} + y_{x-1,0})$$

donne $\left(\frac{\partial y_{x,0}}{\partial t} \right) = 0$; mais d'ailleurs il est évident par ce qui précède, que la figure initiale de la corde peut être discontinue & composée d'un nombre quelconque d'arcs de cercle, ou de portions de courbe qui se touchent.

On voit aisément que toutes les différentes situations de la corde répondent aux rangs horizontaux de la Table (Z), & comme les rangs qui correspondent aux valeurs de x' , $x' + 2n$, $x' + 4n$, &c. sont les mêmes par ce qui précède, il en résulte que la corde reviendra à la même situation après les temps t , $t + \frac{2n}{a}$, $t + \frac{4n}{a}$, &c. n étant toujours la longueur totale de la corde.

Cette analyse des cordes vibrantes établit, si je ne me trompe, d'une manière incontestable la possibilité d'admettre des fonctions discontinues dans ce Problème; & il me paroît que l'on en peut généralement conclure que ces fonctions

peuvent être employées dans tous les Problèmes qui se rapportent aux différences partielles, pourvu qu'elles puissent subsister avec les équations différentielles & avec les conditions du Problème. On peut considérer en effet toute équation aux différences partielles infiniment petites, comme un cas particulier d'une équation aux différences partielles finies, dans laquelle on suppose que les variables deviennent infinies : or rien n'étant négligé dans la théorie des équations aux différences finies, il est visible que les fonctions arbitraires de leurs intégrales ne sont point assujetties à la loi de continuité, & que les constructions de ces équations par le moyen des polygones, ont lieu quelle que soit la nature de ces polygones. Maintenant lorsqu'on passe du fini à l'infiniment petit, ces polygones se changent dans des courbes qui par conséquent peuvent être discontinues : ainsi la loi de continuité ne paroît nécessaire ni dans les fonctions arbitraires des intégrales des équations aux différences partielles infiniment petites, ni dans les constructions géométriques qui représentent ces intégrales ; il faut seulement observer que si l'équation différentielle est de l'ordre n , & que l'on nomme u la variable principale, x & t étant les deux autres variables, il ne doit point y avoir de saut entre deux valeurs consécutives de $(\frac{\partial^n u}{\partial x^n \partial t^n})$, c'est-à-dire que la différence de cette quantité doit être infiniment petite par rapport à cette quantité elle-même. Cette condition est nécessaire pour que l'équation différentielle proposée puisse subsister, parce que toute équation différentielle suppose que les différences de u dont elle est composée, divisées par les puissances respectives de ∂x & de ∂t , sont des quantités finies & comparables entr'elles ; mais rien n'oblige d'admettre la condition précédente, relativement aux différences de u de l'ordre n ou d'un ordre supérieur : on doit donc assujettir les fonctions arbitraires de l'intégrale, à ce qu'il n'y ait point de saut entre deux valeurs consécutives d'une différence de ces fonctions moindre que n , & les courbes qui les représentent doivent être assujetties à une condition semblable, en

sorte qu'il ne doit point y avoir de saut entre deux tangentes consécutives, si l'équation est différentielle du second ordre; ou entre deux rayons osculateurs consécutifs, si elle est différentielle du troisième ordre, & ainsi de suite. Par exemple, dans le Problème des cordes vibrantes que nous venons d'analyser, & qui conduit à une équation différentielle du second ordre, il est nécessaire que les courbes dont on fait usage pour le construire, soient telles que deux côtés contigus ne forment point entr'eux un angle fini: or c'est ce qui aura lieu dans la construction que nous avons donnée, si la figure initiale de la corde est telle que cette condition soit remplie; car en la posant alternativement au-dessus & au-dessous de l'axe des abscisses, comme nous l'avons prescrit, la courbe infinie qui en résulte satisfait dans toute son étendue à la même condition.

Le seul cas qui semble faire exception à ce que nous venons de dire, est celui dans lequel l'intégrale renferme les fonctions arbitraires & leurs différences; car en la substituant dans l'équation différentielle pour y satisfaire, on y introduit les différences des fonctions arbitraires d'un ordre supérieur à n , ce qui suppose que la loi de continuité s'étend au-delà des différences de l'ordre $n - 1$; mais on doit alors considérer comme les véritables fonctions arbitraires de l'intégrale, les différences les plus élevées de ces fonctions, & regarder toutes les différences inférieures comme leurs intégrales successives, moyennant quoi la règle donnée précédemment sur la continuité des fonctions arbitraires & de leurs différences, subsistera dans son entier. On peut même la présenter d'une manière plus simple, en observant qu'il n'y a point de saut entre deux valeurs consécutives de l'intégrale d'une fonction quelconque arbitraire & discontinue; car en nommant $\phi(s)$ cette fonction, deux valeurs consécutives de son intégrale $\int ds \cdot \phi(s)$ ne diffèrent entr'elles que de la quantité $\partial s \cdot \phi(s)$, qui seroit toujours infiniment petite, quand même il y auroit un saut entre deux valeurs consécutives de $\phi(s)$. La règle précédente peut donc se

réduire à la suivante. Si l'intégrale d'une équation aux différences partielles de l'ordre n , renferme la différence $r^{\text{ième}}$ d'une fonction arbitraire de s , on pourra, au lieu de la différence $(n + 1)^{\text{ième}}$ de cette fonction divisée par ds^{n+1} , employer une fonction quelconque discontinue de s .

Lorsque dans le problème des cordes vibrantes, la figure initiale de la corde est telle que deux de ses côtés contigus forment un angle fini, par exemple, lorsqu'elle est formée par la réunion de deux lignes droites, il me semble que géométriquement la solution précédente ne peut être admise; mais si l'on considère physiquement ce Problème & tous les autres de ce genre, tels que celui du son, il paroît que l'on peut appliquer la construction que nous avons donnée, même au cas où la corde seroit formée du système de plusieurs lignes droites; car on voit *a priori* que son mouvement doit très-peu différer de celui qu'elle prendroit, en supposant qu'aux points où ces lignes se rencontrent, il y ait des petites courbes qui permettent d'employer cette construction.

XXXII.

On peut encore appliquer le calcul des fonctions génératrices, à l'intégration des équations aux différences partielles, en partie finies, & en partie infiniment petites; pour cela, considérons l'équation

$$0 = ay_{x,x'} + b.\Delta.y_{x,x'} - \left(\frac{\partial y_{x,x'}}{\partial x'}\right),$$

la caractéristique finie Δ se rapportant à la variable x , dont la différence est l'unité, & la caractéristique ∂ se rapportant à la variable x' , dont la différence est conséquemment $\partial x'$.

L'équation génératrice de la précédente est

$$0 = a + b \cdot \left(\frac{1}{1} - 1\right) - \frac{1}{\partial x'} \cdot \left(\frac{1}{\partial x'} - 1\right);$$

d'où l'on tire à l'infiniment petit près,

$$\frac{1}{x^n} = \frac{1}{(b \partial x')^n} \cdot \left\{ \frac{1}{x'^{\partial x'} \cdot (1 + a \partial x' - b \partial x')} - 1 \right\}^n.$$

Or si l'on nomme $y_{n,x'}$ le coefficient de $x'^n \cdot x'^{\partial x'}$ dans $\frac{1}{x^n}$, le coefficient de $x'^n \cdot x'^{\partial x'}$ dans $\frac{1}{x^n}$, sera $y_{n,x'}$; ce même coefficient

dans $\frac{1}{x^n} \cdot \left\{ \frac{1}{x'^{\partial x'} \cdot (1 + a \partial x' - b \partial x')} - 1 \right\}^n$, sera

$$\frac{1}{(1 + a \partial x' - b \partial x')^{\frac{n}{\partial x'}}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \frac{y_{0,x'} + x \partial x'}{(1 + a \partial x' - b \partial x')^{\frac{n}{\partial x'} + 1}} - x \cdot \frac{y_{0,x'} + (n - x) \partial x'}{(1 + a \partial x' - b \partial x')^{\frac{n}{\partial x'} + n - 1}} \\ & + \frac{x \cdot (x - 1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{y_{0,x'} + (n - 2) \partial x'}{(1 + a \partial x' - b \partial x')^{\frac{n}{\partial x'} + n - 2}} - \&c. \end{aligned} \right\}$$

$$= (1 + a \partial x' - b \partial x')^{\frac{n}{\partial x'}} \cdot \partial x' \cdot \left\{ \frac{y_{0,x'}}{(1 + a \partial x' - b \partial x')^{\frac{n}{\partial x'}}} \right\}$$

or on a

$$(1 + a \partial x' - b \partial x')^{\frac{n}{\partial x'}} = e^{(a-b) \cdot x'},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; le coefficient de $x'^n \cdot x'^{\partial x'}$ dans $\frac{1}{x^n} \cdot \left\{ \frac{1}{x'^{\partial x'} \cdot (1 + a \partial x' - b \partial x')} - 1 \right\}^n$,

sera donc $e^{(a-b) \cdot x'} \cdot \partial x' \cdot \{y_{0,x'} \cdot e^{(b-a) \cdot x'}\}$; partant on aura

$$y_{n,x'} = \frac{e^{(a-b) \cdot x'}}{b^n} \cdot \frac{\partial x' \cdot e^{(b-a) \cdot x'} \cdot y_{0,x'}}{(\partial x')^n},$$

ou plus simplement,

$$y_{n,x'} = \frac{e^{(a-b) \cdot x'}}{b^n} \cdot \frac{\partial x' \cdot \varphi(x')}{(\partial x')^n},$$

$\varphi(x')$ étant une fonction arbitraire de x' ,

On peut intégrer par le même procédé, l'équation générale

$$0 = \Delta^n \cdot y_{x,x'} + a \cdot \Delta^{n-1} \cdot \left(\frac{\partial y_{x,x'}}{\partial x'} \right) \\ + b \cdot \Delta^{n-2} \cdot \left(\frac{\partial^2 y_{x,x'}}{\partial x'^2} \right) + \&c.$$

son équation génératrice est

$$0 = \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^n + \frac{a}{\partial x'} \cdot \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{t \partial x'} - 1 \right) \\ + \frac{b}{\partial x'^2} \cdot \left(\frac{1}{t} - 1 \right)^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{t \partial x'} - 1 \right)^2 + \&c.$$

en nommant donc a, a', a'' les n racines de l'équation

$$0 = v^n + a \cdot v^{n-1} + b \cdot v^{n-2} + c \cdot v^{n-3} + \&c.$$

on aura les n équations partielles,

$$\frac{1}{t} = 1 + \frac{a}{\partial x'} \cdot \left(\frac{1}{t \partial x'} - 1 \right), \\ \frac{1}{t} = 1 + \frac{a'}{\partial x'} \cdot \left(\frac{1}{t \partial x'} - 1 \right), \\ \&c.$$

la première donne

$$\frac{1}{t^n} = \frac{a^n}{(\partial x')^n} \cdot \left\{ \frac{1}{t \partial x' \cdot \left(1 - \frac{\partial x'}{a} \right)} - 1 \right\}^n$$

or le coefficient de $t^0, t^{1, n'}$ dans $\frac{a^n}{t^n}$, est $y_{x,x'}$; ce même

coefficient dans $a \cdot \left\{ \frac{1}{t \partial x' \cdot \left(1 - \frac{\partial x'}{a} \right)} - 1 \right\}^n$, est

$$\left(1 - \frac{\partial x^1}{a}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \frac{y_0, x^1 + x \cdot \partial x^1}{\left(1 - \frac{\partial x^1}{a}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1} + x}} - x \cdot \frac{y_0, x^1 + (x-1) \cdot \partial x^1}{\left(1 - \frac{\partial x^1}{a}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1} + x-1}} \\ & + \frac{x \cdot (x-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{y_0, x^1 + (x-2) \cdot \partial x^1}{\left(1 - \frac{\partial x^1}{a}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1} + x-2}} - \&c. \end{aligned} \right\}$$

$$= \left(1 - \frac{\partial x^1}{a}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1}} \cdot \partial^x \cdot \frac{y_0, x^1}{\left(1 - \frac{\partial x^1}{a}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1}}} = e^{-\frac{x^1}{a}} \cdot \partial^x \cdot y_{0, x^1} \cdot e^{\frac{x^1}{a}},$$

parce que $\left(1 - \frac{\partial x^1}{a}\right)^{\frac{x^1}{\partial x^1}} = e^{-\frac{x^1}{a}}$; on aura donc

$$y_{x, x^1} = a^x \cdot e^{-\frac{x^1}{a}} \cdot \frac{\partial^x \cdot y_{0, x^1} \cdot e^{\frac{x^1}{a}}}{(\partial x^1)^x},$$

ou plus simplement

$$y_{x, x^1} = a^x \cdot e^{-\frac{x^1}{a}} \cdot \frac{\partial^x \cdot \varphi(x^1)}{(\partial x^1)^x},$$

$\varphi(x^1)$ étant une fonction arbitraire de x^1 .

Il suit de-là, que si l'on désigne par $\varphi^1(x^1)$, $\varphi^{11}(x^1)$, $\varphi^{111}(x^1)$, &c. d'autres fonctions arbitraires de x^1 , l'expression complète de y_x sera

$$\begin{aligned} y_{x, x^1} = & a^x \cdot e^{-\frac{x^1}{a}} \cdot \frac{\partial^x \cdot \varphi(x^1)}{(\partial x^1)^x} \\ & + a^{x'} \cdot e^{-\frac{x^1}{a'}} \cdot \frac{\partial^{x'} \cdot \varphi^1(x^1)}{(\partial x^1)^{x'}} \\ & + a^{x''} \cdot e^{-\frac{x^1}{a''}} \cdot \frac{\partial^{x''} \cdot \varphi^{11}(x^1)}{(\partial x^1)^{x''}} \\ & + \&c. \end{aligned}$$

*THÉORÈMES sur le développement des fonctions
à deux variables, en séries.*

Si l'on applique aux fonctions à deux variables, la méthode exposée dans les *articles X & XI*, on aura sur le développement de ces fonctions en séries, des théorèmes analogues à ceux auxquels nous sommes parvenus dans ces deux articles. Supposons que u soit égal à la suite infinie

$$\begin{aligned} & y_{0,0} + y_{1,0} \cdot t + y_{2,0} \cdot t^2 + y_{3,0} \cdot t^3 + \&c. \\ & + y_{0,1} \cdot t' + y_{1,1} \cdot t' \cdot t + y_{2,1} \cdot t' \cdot t^2 + \&c. \\ & + \&c. \end{aligned}$$

& que l'on désigne par la caractéristique Δ la différence finie de $y_{x,x'}$, prise en faisant varier à la fois x & x' , la fonction génératrice de $\Delta \cdot y_{x,x'}$ sera $u \cdot (\frac{t}{t,t'} - 1)$; d'où il suit,

que la fonction génératrice de $\Delta^n \cdot y_{x,x'}$ sera $u \cdot (\frac{t}{t,t'} - 1)^n$;

or on a $\frac{t}{t,t'} - 1 = (1 + \frac{t}{t} - 1) \cdot (1 + \frac{t}{t'} - 1) - 1$;
ce qui donne

$$u \cdot (\frac{t}{t,t'} - 1)^n = u \cdot \{ (1 + \frac{t}{t} - 1) \cdot (1 + \frac{t}{t'} - 1) - 1 \}^n;$$

partant, si l'on désigne par la caractéristique Δ' la différence finie de $y_{x,x'}$, prise en ne faisant varier que x , & par la caractéristique Δ'' , cette différence prise en ne faisant varier que x' , on aura, en repassant des fonctions génératrices aux variables correspondantes,

$$\Delta^n \cdot y_{x,x'} = \{ (1 + \Delta' \cdot y_{x,x'}) \cdot (1 + \Delta'' \cdot y_{x,x'}) - 1 \}^n,$$

pourvu que dans le développement du second membre de cette équation, on applique aux caractéristiques Δ' & Δ'' les exposans des puissances de $\Delta' \cdot y_{x,x'}$ & de $\Delta'' \cdot y_{x,x'}$.

En changeant n en $-n$, on s'assurera facilement par un raisonnement analogue à celui de l'article *X*, que l'équation précédente deviendra

$$\Sigma^n . y_{x,x'} = \frac{1}{[(1 + \Delta' . y_{x,x'}) . (1 + \Delta'' . y_{x,x'}) - 1]^n},$$

pourvu que dans le développement du second membre de cette équation, on change les différences négatives en intégrales.

Il est clair que $u . (\frac{1}{i! . i'^!} - 1)^n$ est la fonction génératrice de la différence finie $n^{\text{ième}}$ de $y_{x,x'}$, lorsque x varie de i & que x' varie de i' ; or on a

$$u . (\frac{1}{i! . i'^!} - 1)^n = u . \{ (1 + \frac{1}{i} - 1)^i . (1 + \frac{1}{i'} - 1)^{i'} - 1 \}^n,$$

donc, si l'on désigne par la caractéristique Δ les différences finies, & par la caractéristique Σ les intégrales finies, lorsque x varie de i & que x' varie de i' , on aura, en repassant des fonctions génératrices aux variables correspondantes,

$$\Delta^n . y_{x,x'} = \{ (1 + \Delta' . y_{x,x'})^i . (1 + \Delta'' . y_{x,x'})^{i'} - 1 \}^n,$$

$$\Sigma^n . y_{x,x'} = \frac{1}{[(1 + \Delta' . y_{x,x'})^i . (1 + \Delta'' . y_{x,x'})^{i'} - 1]^n},$$

pourvu que dans le développement des seconds membres de ces équations, on applique aux caractéristiques Δ' & Δ'' les exposans des puissances de $\Delta' . y_{x,x'}$ & de $\Delta'' . y_{x,x'}$, & que l'on change les différences négatives en intégrales.

Les deux équations précédentes ont encore lieu, en supposant que dans les différences $\Delta' . y_{x,x'}$ & $\Delta'' . y_{x,x'}$, x & x' , au lieu de varier de l'unité, varient d'une quantité quelconque ω ; on doit seulement observer que dans la différence $\Delta . y_{x,x'}$, x variera de $i\omega$, & x' variera de $i'\omega$; or si l'on suppose ω infiniment petit, les différences $\Delta' . y_{x,x'}$ & $\Delta'' . y_{x,x'}$

se changeront, la première dans $\partial x . (\frac{\partial . y_{x,x'}}{\partial x})$, & la seconde

Qq ij

dans $\partial x' \cdot (\frac{\partial y_{x,x'}}{\partial x'})$; de plus, si l'on fait i & i' infiniment grands, & que l'on suppose $i \partial x = a$, & $i' \partial x' = a'$, on aura

$$(1 + \Delta' y_{x,x'})^i = \{1 + \partial x \cdot (\frac{\partial y_{x,x'}}{\partial x})\}^{\frac{a}{\partial x}} = e^{a \cdot (\frac{\partial y_{x,x'}}{\partial x})},$$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité; on aura pareillement

$$(1 + \Delta'' y_{x,x'})^{i'} = e^{a' \cdot (\frac{\partial y_{x,x'}}{\partial x'})},$$

partant

$$\Delta^n y_{x,x'} = \left\{ e^{a \cdot (\frac{\partial y_{x,x'}}{\partial x})} + e^{a' \cdot (\frac{\partial y_{x,x'}}{\partial x'})} - 1 \right\}^n$$

$$\Sigma^n y_{x,x'} = \frac{1}{\left\{ e^{a \cdot (\frac{\partial y_{x,x'}}{\partial x})} + e^{a' \cdot (\frac{\partial y_{x,x'}}{\partial x'})} - 1 \right\}^n}$$

x variant de a , & x' variant de a' dans les deux premiers membres de ces équations.

Si au lieu de supposer π infiniment petit, on le suppose fini, & i infiniment petit & égal à ∂x ; si l'on suppose de plus i' infiniment petit & égal à $\partial x'$, on aura

$$(1 + \Delta' y_{x,x'})^i = (1 + \Delta' y_{x,x'})^{\partial x} = 1 + \partial x \cdot \log. (1 + \Delta' y_{x,x'});$$

on aura pareillement

$$(1 + \Delta'' y_{x,x'})^{i'} = 1 + \partial x' \cdot \log. (1 + \Delta'' y_{x,x'});$$

d'ailleurs $\Delta^n y_{x,x'}$ se change en $\partial^n y_{x,x'}$; partant

$$\partial^n y_{x,x'} = \{ [1 + \partial x \cdot \log. (1 + \Delta' y_{x,x'})] \cdot [1 + \partial x' \cdot \log. (1 + \Delta'' y_{x,x'})] - 1 \}^n,$$

ou plus simplement

$$\partial^n \cdot y_{x,x'} = \{ \partial x \cdot \log. (1 + \Delta^1 \cdot y_{x,x'}) + \partial x^1 \cdot \log. (1 + \Delta^{11} \cdot y_{x,x'}) \}^n.$$

On pourroit obtenir de cette manière une infinité d'autres formules semblables; mais il suffit d'avoir exposé la méthode pour y parvenir.

Tout ce que nous avons dit sur les fonctions à deux variables, pouvant s'appliquer également à celles de trois ou d'un plus grand nombre de variables, nous n'insisterons pas davantage sur cet objet.



A N A L Y S E
D E L A
TERRE BOLAIRE JAUNE DU BERRY.
MANIÈRE de préparer le Rouge de Prusse
*& le Rouge d'Angleterre. **

Par M. S A G E.

LA
 le 21 Juillet
 1779.

LE Rouge qu'on emploie pour mettre en couleur les carreaux d'appartemens, & quelquefois pour polir les glaces & pour imprimer quelques papiers, se prépare en Hollande avec une espèce de bol jaune que les Hollandois tirent de la seigneurie de Beuvrière, paroisse de Saint George en Berry, à deux lieues de Vierzon, sur les bords du Cher. M. le Monnier, de l'Académie, dit dans un Mémoire qu'il a donné sur cette espèce de terre bolaire, qu'elle se trouve à 18 ou 20 toises de profondeur; qu'avant d'y parvenir, on traverse entr'autres une masse de grès tendre, qui a environ 24 pieds d'épaisseur; qu'on trouve ensuite de l'argile & des cailloux; enfin un banc de sablon blanc très-fin, de l'épaisseur d'un pied: c'est immédiatement au-dessous de ce banc que se trouve la première couche de terre bolaire jaune, qui a la même épaisseur que celle du banc de sablon. On rencontre alternativement des couches de sablon & de terre bolaire; mais ce qu'il y a de remarquable, comme l'observe M. le Monnier, c'est que ce bol ne contient point de sablon.

Les lits de terre bolaire jaune du Berry, n'ont point toujours la même épaisseur; il y en a qui n'ont que 6 pouces, d'autres en ont 18; la nuance jaune varie aussi en intensité:

* J'ai donné à M. Gobet une note sur la préparation de cette terre, il l'a imprimé page 578 du second volume des anciens Minéralogistes.

on trouve quelquefois dans cette terre bolaire, des géodes martiales connues sous le nom de *pierre d'aigle*.

M. le Vicomte de Riffardo, à qui appartient cette terre, m'ayant apporté, en 1777, de cette espèce d'ocre, me demanda quel parti il pourroit en tirer, m'ajoutant qu'il n'avoit pu en trouver le débit à Paris, tandis qu'il espéroit le faire avec avantage, parce qu'il en avoit vendu la même année pour quarante mille livres, à quinze francs les huit quintaux, à un particulier qui la faisoit passer en Hollande: il me dit encore, que depuis environ cent ans, la même compagnie de Hollande achetoit de cette terre bolaire, toute la quantité qu'on pouvoit lui en fournir: M. de Riffardo m'ajouta, que d'après la proposition qu'on lui avoit faite de s'engager à ne livrer de cette terre qu'à cette même compagnie, il n'avoit pas voulu y souscrire, espérant découvrir comment les Hollandois en tiroient parti. M. de Riffardo s'étant adressé à moi, je fis les recherches pour y parvenir.

L'emploi de l'ocre jaune n'étant point assez considérable dans le Commerce, pour que j'eusse pu croire qu'on débitât la terre du Berry sous forme de bol jaune; & ayant reconnu qu'elle prenoit une belle couleur rouge par la calcination, & qu'après avoir été divisée, elle ressembloit au rouge qu'on vend dans le Commerce sous les noms de *rouge de Prusse*, de *rouge d'Angleterre*, j'essayai ces mêmes terres, qui me parurent en rapport avec notre bol calciné.

Des expériences comparées m'ayant fait connoître l'identité qu'il y avoit entre ces préparations, il ne me restoit plus qu'à trouver la manière d'obtenir une nuance égale dans le rouge: j'ai reconnu qu'elle dépendoit du degré de chaleur qu'on employoit pour le faire naître.

Lorsqu'on calcine en morceaux la terre bolaire jaune, elle éclate & se divise avec beaucoup de bruit; si les morceaux sont un peu épais, il arrive alors que leur surface a souvent éprouvé trop de feu, tandis que le centre est encore jaune.

Ayant reconnu que la nuance rouge que le bol jaune prenoit par la calcination, étoit sujette à varier, quoique les

morceaux qui avoient été exposés au feu à diverses reprises eussent une teinte jaune égale, & voulant déterminer d'où provenoient ces différentes dégradations, je calcinai à un feu gradué le bol jaune, & je vis que la couleur disparoissoit à mesure que l'eau contenue dans cette terre, s'exhaloit, & qu'elle prenoit une couleur rouge plus ou moins foncée, suivant le degré de feu qu'on lui avoit fait éprouver; que cette couleur rouge passoit au brun, & qu'elle finissoit par devenir noire; mais alors le bol est à demi-vitrifié, & donne des étincelles lorsqu'on le frappe avec le briquet.

Pour m'assurer si l'eau qui se dégagoit de la terre bolaire jaune étoit pure, j'ai distillé de cette terre dans une cornue de verre lutée; l'eau qu'elle a fournie étoit limpide, & contenoit un peu d'acide vitriolique: ce qui restoit dans la cornue étoit d'un beau rouge, & avoit diminué d'un dixième de son poids. Dans cet état, la terre bolaire peut encore s'imbiber d'eau, mais elle ne s'y divise pas aussi aisément qu'avant d'avoir été calcinée; cependant la terre argileuse qu'elle contient peut encore se laisser pénétrer par l'huile, & faire corps avec elle; propriété que n'a point l'ocre martial pur.

Le bol jaune de Berri m'a produit, par la réduction, 15 livres de fer par quintal, ce qui est à peu-près en rapport avec la quantité de fer que j'ai extrait de cette terre, en employant la sublimation avec le sel ammoniac: pour cet effet, j'ai distillé au fourneau de réverbère, dans une cornue de verre lutée, 100 grains de terre bolaire jaune avec une once de sel ammoniac qui s'est sublimé avec le fer, & a pris une belle couleur jaune; j'ai distillé le résidu jaunâtre avec une once de sel ammoniac; il s'est sublimé coloré en jaune. Ce qui restoit dans la cornue étoit blanchâtre; je l'ai mis dans de l'eau distillée; le sel martial qu'il contenoit s'y est dissout: j'ai filtré, desséché & pesé ce résidu, & j'ai trouvé qu'il ne pesoit que 50 grains, en ajoutant les 100 livres d'eau que la terre bolaire contient par quintal, & l'accrétion en pesanteur absolue, dont le fer est susceptible lorsqu'il est
dans

dans l'état de chaux (a); il paroît que le fer ne se trouve dans la terre bolaire jaune de Berri que dans la proportion d'environ un cinquième.

Pour obtenir une couleur rouge d'une nuance égale par la calcination du bol jaune, il faut le diviser & le calciner à un feu médiocre, ayant soin de le retirer de temps en temps de cette terre pour l'exposer à l'air, afin de reconnoître quelle sera la nuance après le refroidissement: je pense que pour préparer en grand ce rouge, il suffiroit de calciner la terre bolaire au fourneau de reverbère anglois, ayant seulement soin que l'aire de ce fourneau fût presque plat, afin de retirer plus facilement cette terre avec les râbles.

Le rouge dit de *Prusse* a une couleur plus vive que celui d'Angleterre; le premier se vend quarante-huit livres le quintal, & le second vingt-cinq livres (b). On prend les lits de bol jaune les plus colorés pour préparer le rouge de Prusse, & ceux qui le sont moins, pour faire le rouge d'Angleterre.

Il résulte des expériences précédentes, qu'un quintal de terre bolaire jaune de Berri, contient

| | |
|-------------------|-----------------|
| Eau acidule..... | 80 ^e |
| Chaux de fer..... | 40. |
| Argile..... | 50. |
| | <hr/> |
| | 100. |
| | <hr/> |

(a) Si l'on réduit le fer à l'état de chaux, par la calcination, ce métal augmente de 40 à 45 livres par quintal; si l'on a précipité le fer de sa dissolution par le moyen d'un alkali, ce précipité, qui est une espèce de chaux de fer, se trouve être augmenté de 80 à 90 livres par quintal. Voyez mes *Éléments de Minéralogie*, tome II, pages 160 & 165.

(b) Les Hollandois ne payent la terre bolaire jaune du Berri, que trente-sept sous six deniers le quintal.



O B S E R V A T I O N

S U R

UN ÉTRANGLEMENT D'INTESTIN,

Produit par l'épiploon devenu adhérent au-dessus d'une poche contre nature, formée dans l'intérieur du bas-ventre.

Par M. B O R D E N A V E.

L.^{A.}
le 21 Août
1779.

UN homme, âgé d'environ 45 ans, ressentit tout-à-coup, le 7 Juillet 1779, des douleurs vives de colique, accompagnées de nausées & de vomissement. Étant appelé auprès de lui, & après lui avoir fait les questions convenables sur l'espèce de douleur qu'il éprouvoit, sur le siège de la douleur, sur les causes qui avoient pu produire cet accident, &c. je tâtai le ventre, auquel je n'observai rien de particulier; il étoit peu tendu, & ne paroissoit douloureux que vers la région de l'estomac.

Je crus, d'après ces considérations, devoir regarder cette espèce de colique comme bilieuse: en conséquence je lui prescrivis d'abord une potion huileuse, une boisson mucilagineuse & des lavemens émolliens. Les lavemens produisirent seulement l'évacuation des matières contenues dans les derniers intestins; la potion huileuse fut revomie en détail, & les accidens restèrent à peu-près les mêmes. Le lendemain, je crus devoir insister sur l'usage des mêmes remèdes; mais les lavemens produisoient peu d'effet, le vomissement persistoit, & les douleurs de colique étoient seulement un peu diminuées.

Le 9 au matin, le malade en vomissant, rendit deux gros vers strongles, & des matières qui avoient la couleur & l'odeur des matières stercorales; je crus alors que ces accidens pouvoient dépendre en partie de la présence de ces corps

étrangers, & j'espérois que leur issue alloit les dissiper. Comme le malade avoit des hoquets continuels, des nausées, des vomissemens fréquens, je lui prescrivis une potion antispasmodique, dans laquelle entroit la liqueur anodine minérale d'Hoffman, la limonade pour boisson, & toujours les lavemens.

Le 10, le malade parut éprouver quelque soulagement par l'usage de ces remèdes; le hoquet étoit moindre, ainsi que le vomissement; il y avoit un peu de sommeil, & des lavemens laxatifs procurèrent quelques évacuations grisâtres. Les 11, 12, 13, 14 & 15, les choses furent à peu-près dans le même état. Le 16, le pouls s'étant un peu élevé, cependant sans tension au ventre, le malade fut saigné; on cessa la potion, & je lui prescrivis l'eau de Vichy pour boisson, d'abord simple & ensuite aiguillée par 2 gros de sel d'Epſom. Cette boisson passa assez bien; les urines devinrent abondantes; le vomissement fut plus rare & a manqué quelquefois pendant 24 & 30 heures; mais rien n'a passé par le bas, & les évacuations inférieures, toujours rares & en petite quantité, n'étoient que le produit de la sécrétion qui se faisoit dans les gros intestins.

Le 20, le malade éprouva des douleurs & un gonflement des hémorroïdes. Ces douleurs, & en même temps la situation habituelle du malade sur le côté droit, sembloient annoncer un engorgement étendu jusqu'à la veine-porte; en conséquence les sangsues lui furent appliquées, & procurèrent une médiocre évacuation de sang. Les accidens, quoique moindres en apparence, continuèrent; le pouls devint plus petit, le malade s'affoiblit, & enfin mourut le 24 Juillet, après dix-huit jours de vomissemens habituels, & seulement quelques légères déjections de matières stercorales, sans qu'aucune matière ait passé de haut en bas, excepté la veille de sa mort qu'il eut une évacuation bilieuse.

Les accidens ayant été permanens malgré les remèdes les mieux indiqués, d'un autre côté, n'ayant trouvé aucune tumeur au ventre vers les ouvertures naturelles, ni aucun endroit spécialement douloureux, malgré les recherches les

plus exactes, je ne pouvois regarder la maladie comme une suite de hernie. Je crus donc devoir plutôt soupçonner une invagination d'intestin, ou un étranglement causé par quelque bride intérieure, dont la nature & le siège étoient également inconnues : tel avoit été le jugement que j'avois porté, & que je crus devoir vérifier par l'examen du sujet.

A l'ouverture du bas-ventre, j'aperçus d'abord l'épiploon qui, au lieu d'être étendu sur la surface des intestins & flottant, étoit comme roulé & resserré sur lui-même, & comprimant les intestins dans son passage, alloit adhérer au péritoine au-dessus du pubis ; il formoit ainsi une espèce de corde, qui avoit rétréci les intestins dans tous les points de son contact.

Ayant détruit son adhérence inférieure pour reconnoître l'état des parties au-dessous, je trouvai en général les intestins grêles fort dilatés, dans un état de phlogose, & avec quelques points gangréneux. Les ayant examinés avec soin, je découvris une forte adhérence d'une portion de l'intestin *ileum* étranglé, au-dessous de l'endroit d'où j'avois détaché l'épiploon ; cet intestin, dilaté en ce lieu comme une espèce de jabot, étoit engagé dans une poche formée dans le péritoine, au-dessus de la tunique vaginale du cordon auquel elle étoit adhérente. Cette poche étoit fort épaisse, *carniforme*, & présentoit une cavité presque ovoïde ; la portion d'intestin qui y étoit contenue, y adhéroit & étoit gangrenée ; l'intestin, resserré à son entrée dans cette poche, ne permettoit plus le passage des matières ; son diamètre naturel étoit fort diminué au-dessous de l'étranglement, & j'ai reconnu, par l'examen, que la portion de l'*ileum* qui étoit au-dessous, n'étoit pas éloignée du *cæcum* de huit pouces.

En réfléchissant sur la densité de cette poche & sur la situation, on peut présumer qu'elle ne s'étoit pas formée depuis peu, & qu'elle étoit la suite d'une disposition vicieuse déjà ancienne : ce qui paroît confirmé par l'habitude qu'avoit le malade de se coucher sur le côté droit depuis plusieurs années, & par la douleur qu'il éprouvoit en se couchant du côté opposé.

Ce sujet ayant été occupé à des travaux quelquefois pénibles, ne peut-on pas penser ou qu'il a fait quelque effort, ou peut-être qu'il aura été frappé dans ces parties; ce qui aura donné lieu à la distension graduée du péritoine & à la formation successive d'une poche? L'intestin, introduit dans cette poche depuis long-temps, n'a produit aucun accident tant qu'il n'a pas été étranglé; mais l'inflammation ayant été déterminée par une cause quelconque, l'étranglement est survenu, l'intestin a contracté des adhérences, les accidens se sont développés, & la maladie, non susceptible de secours à raison de sa situation intérieure & inconnue, ne pouvant se terminer par les seules forces de la Nature, est devenue nécessairement mortelle.

L'espèce d'étranglement produit par l'épiploon, devenu adhérent au-dessus d'une poche ainsi formée intérieurement, présente un cas très-rare, peut-être unique, & dont nous n'avons pas d'exemples dans les Auteurs. On a déjà vu plusieurs fois des malades éprouver des étranglemens d'intestin par invagination; d'autres fois, par une bride formée intérieurement (a); d'autres fois, on a observé des rétrécissemens spontanés, qui ont causé la mort (b). Tous ces cas funestes ont mérité l'attention des Observateurs, & quoiqu'ils ne paroissent absolument susceptibles d'aucun secours, cependant, on a proposé en quelques circonstances des tentatives qui méritent attention, & qui prouvent jusqu'où pourroit s'étendre quelquefois la bienfaisance de l'Art (c).

Si l'observation que je viens de rapporter présente un de ces cas où les secours deviennent impuissans, elle ne mérite pas moins d'être recueillie pour étendre nos connoissances sur les maladies trop nombreuses, quelquefois inconnues & en même temps incurables, dont l'humanité peut être affligée.

(a) Observation de M. Moscati; *Mémoires de l'Académie Royale de Chirurgie, tome III.*

(b) Observation de M. Risch, & la Note à la fin; *Mémoires de l'Académie Royale de Chirurgie, tome IV.*

(c) Voyez les Réflexions de M. Risch.



M É M O I R E

C O N T E N A N T

L E S O B S E R V A T I O N S
D E L A X V I I . ^e C O M È T E*Observée à Paris, de l'Observatoire de la Marine,
depuis le 18 Janvier jusqu'au 17 Mai 1779. (a)*

Par M. M E S S I E R.

Là
à la rentrée
du 14 Avril
1779.
Relû
le 31 Mai
1780.

Découverte
le 19 Janvier,
vers les 5 heures
du matin.

LE Ciel étoit parfaitement beau la nuit du 18 au 19 Janvier 1779. On avoit annoncé dans le livre de la Connoissance des Temps, pour le 19 au matin, une immersion du premier satellite de Jupiter: avant de faire l'observation de ce Satellite, je parcourus le ciel avec une lunette ordinaire de 2 pieds de foyer, très-claire & armée de larges oculaires, qui faisoient découvrir un espace dans le ciel de 5 à 6 degrés, & je découvris au Levant une nébulosité qui avoit quelques minutes d'étendue, & qu'on ne pouvoit pas apercevoir à la simple vue; je jugeai que cette nébulosité ne pouvoit être qu'une Comète qui paroïssoit près de la tête du Cygne, & auprès d'une Étoile de la cinquième grandeur, la seconde de la constellation du Cygne, suivant l'ordre que les Étoiles tiennent dans le Catalogue de Flamsteed, seconde édition. Après avoir observé l'immersion du premier satellite de Jupiter, avec une lunette achromatique de 3 pieds $\frac{1}{2}$ de foyer à triple objectif, faite à Londres par Dollond, & qui fut faite à 5^h 52' 49" de temps vrai, j'ôtai l'oculaire qui avoit servi à cette observation, pour substituer à la place un micromètre filaire que je réglai sur le parallèle des Étoiles fixes en

(a) C'est la LXIV.^e Comète dont l'orbite ait été calculée, en suivant la Table qui est dans l'Astronomie de M. de la Lande, tome III, page 366.

ascension droite; ensuite je comparai la Comète à l'Étoile ci-dessus, la seconde du Cygne; son ascension droite réduite au temps de cette observation étoit de $28^{\text{h}} 51' 31''$, & sa déclinaison de $29^{\text{d}} 12' 5''$ boréale. A $6^{\text{h}} 8' 2''$ de temps vrai, la Comète suivoit l'Étoile au fil horaire de $16' 7''$ de degré, la Comète étant supérieure à l'Étoile de $20' 4''$. De ces différences & de la position de l'Étoile, il en est résulté l'ascension droite de la Comète de $28^{\text{h}} 51' 20''$, & sa déclinaison boréale de $29^{\text{d}} 40' 52''$: la Comète fut encore comparée la même nuit deux fois à la même Étoile.

Première
observation
de la Comète.

Le noyau de la Comète paroïssoit assez brillant, son diamètre égaloit une fois & demi l'épaisseur d'un des fils du micromètre, estimé de 20 secondes de degré; le noyau étoit environné de nébulosité qui s'étendoit à 4 minutes; la queue paroïssoit longue de 33 minutes, dirigée vers le nord-est.

Je ne rapporte ces détails que pour cette première observation; on trouvera dans deux Tables qui sont placées à la suite de ce Mémoire, les déterminations de la Comète pour chaque jour qu'elle aura été observée, & dans une seconde Table les positions des Étoiles, celles qui étoient connues, ainsi que celles que j'ai déterminées par de nouvelles observations, & dont la plupart ont été employées à la détermination des lieux du noyau de la Comète, à chaque jour d'observations.

Dans mes observations, j'ai employé la même lunette achromatique de 3 pieds $\frac{1}{2}$, garnie d'un micromètre filaire, de laquelle j'ai déjà parlé: la pendule qui a servi à marquer les temps des observations, étoit du célèbre Julien le Roi; elle étoit réglée sur le mouvement des fixes, & sa marche connue par les passages du Soleil au Méridien, observés à un télescope Newtonien de 3 pieds 2 pouces de foyer, placé solidement dans le plan du Méridien, & sa position vérifiée par un grand nombre de hauteurs correspondantes du Soleil, prises fréquemment dans tous les temps de l'année.

Les 20, 21 & 22 Janvier, le ciel fut couvert.

320 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

du Cygne
double.

Le 23 au matin, le ciel fut beau, mais il y eut un peu de brouillard; je vis la Comète qui s'étoit approchée depuis le 19 de l'étoile γ de la Lyre; il ne fut pas possible à cause du brouillard de juger de ses apparences; je comparai le noyau à plusieurs Étoiles, & je vérifiai la seconde étoile du Cygne à l'étoile β de la troisième grandeur, de la même constellation: cette étoile β est double, celle qui a le moins de lumière, je l'ai estimée de la sixième grandeur. La petite Étoile suivoit β au fil horaire de 2 secondes $\frac{1}{2}$ de temps, & elle étoit supérieure à β de 22 secondes de degré. Le 19, en observant la Comète, je vis à peu de distance d'elle, & sur son parallèle, une nébuleuse très-foible, qu'on ne pouvoit apercevoir qu'avec la lunette, le crépuscule alors m'empêcha de déterminer son lieu: ce matin 23, je l'ai comparai directement à la seconde étoile du Cygne de la cinquième grandeur; je l'ai rapportée sur la Carte, & voici sa position.

| N É B U L E U S E PRÈS DE LA TÊTE DU CYGNE. | ASCENSION | DÉCLINAIS. |
|--|------------------------|-------------------------|
| | droite. | boréale. |
| Le 23 Janvier matin 1779..... | 287 ^d 0' 1" | 29 ^d 48' 14" |

Le 24 au matin, le ciel fut parfaitement beau; vers les 5 heures, la Comète paroissoit plus apparente que la veille; le noyau très-brillant, environné de nébulosité avec une queue de plusieurs minutes d'étendue. Je comparai directement le noyau de la Comète aux étoiles γ & λ de la Lyre.

Le 25 Janvier au matin, la Comète paroissoit avec la même lumière que le jour précédent; on la voyoit à la vue simple, mais bien foiblement; je comparai le noyau aux mêmes étoiles γ & λ de la Lyre & à d'autres Étoiles: les positions sont rapportées dans la première Table.

Les 26, 27, 28, 29 & 30 au matin, le ciel fut couvert.

Le

Le 31 Janvier au matin, le ciel parfaitement beau, la Comète paroïssoit comme les jours précédens; on ne pouvoit pas cependant l'apercevoir à la simple vue, à cause de la grande lumière de la Lune; je comparai la Comète à β de la Lyre & à plusieurs autres Étoiles: les positions de la Comète & celle des Étoiles sont rapportées dans les Tables qui suivent. β de la Lyre est double, & j'ai estimé que β n'étoit que de la quatrième grandeur, au lieu de la seconde à la troisième, qu'on lui donne dans le livre de la Connoissance des Temps: elle m'a paru avoir moins de lumière que γ de cette constellation. En comparant ce matin la Comète à β de la Lyre, j'ai aperçu à la lunette un petit amas de lumière, qui m'a semblé n'être composé que de très-petites Étoiles, qu'on ne pouvoit pas distinguer avec l'instrument: cet amas de lumière arrondi étoit placé entre γ & β de la Lyre. Le 3 de Septembre, j'ai encore examiné cette lumière avec la lunette achromatique, que j'avois fait grossir cent vingt fois environ; je n'ai pu reconnoître, comme la première fois, si elle étoit composée de petites Étoiles: voici sa position; je l'ai rapportée aussi sur la Carte de la route apparente de la Comète.

β de la Lyre
double,
estimée de la
4.^e grandeur.

| N É B U L E U S E ENTRE γ ET β DE LA LYRE. | ASCENSION | DÉCLINAIS. |
|--|-------------------------|------------------------|
| | droite. | boréale. |
| Le 31 Janvier matin 1779..... | 281 ^d 20' 8" | 32 ^d 46' 3" |

Le 1.^{er} Février au matin, beau temps; les apparences de la Comète étoient les mêmes que les jours précédens, & la grande lumière de la Lune empêcha de la voir à la vue simple: je comparai le noyau de la Comète à plusieurs Étoiles dont les lieux n'avoient pas encore été déterminés; pour connoître leurs positions, je les comparai à β de la Lyre: on les trouvera dans la seconde Table.

Mém. 1779.

SI

Les 2, 3, 4, 5, 6, 7 & 8 Février, le ciel fut couvert d'un brouillard si épais le jour & la nuit, que le Soleil, la Lune & les Étoiles ne purent paroître; ce brouillard constant ne se dissipa que la nuit du 8 au 9.

Le 9, à cinq heures du matin, le ciel devint parfaitement beau: la Comète avoit passé de la Lyre dans la constellation d'Hercule; ses apparences étoient à peu de chose près les mêmes qu'à la précédente observation, le noyau & la queue toujours d'une lumière sensible vue à la lunette: la Comète à 5 heures du matin, étoit parvenue à une très-grande hauteur au-dessus de l'horizon, de manière que la position de ma lunette ne pouvoit plus me servir; je fus obligé de la déplacer pour l'approcher d'une des croisées de mon Observatoire, celle du Levant; déplacée, il fallut la remettre dans le plan du Méridien, ce qui demanda du temps & empêcha de faire plusieurs comparaisons de la Comète avec les Étoiles voisines: je ne pus la comparer qu'une seule fois, & sa position est rapportée dans la première Table.

Le 10 Février au matin, le ciel fut entièrement couvert.

Le 11 à 4 heures $\frac{1}{2}$ du matin, le ciel étoit parfaitement beau; la Comète paroissoit près de l'étoile μ de la cinquième grandeur d'Hercule, à laquelle elle fut comparée: les observations sont rapportées, tant celle de la Comète que celle de l'Étoile, dans les deux Tables qui suivent.

Le 12, vers les 5 heures du matin, il y avoit quelques nuages; la Comète paroissoit avec la même lumière que les jours précédens; il n'étoit pas possible cependant de l'apercevoir à la vue simple: je comparai le noyau à la même Étoile de la veille, μ d'Hercule, & pour vérifier la position de cette Étoile, je l'observai avec l'étoile ϵ de la troisième grandeur de cette constellation, en employant plusieurs Étoiles intermédiaires.

Le ciel fut entièrement couvert la nuit du 12 au 13.

Le 14 au matin, le ciel en grande partie couvert; entre les nuages rares je vis la Comète, & je comparai le noyau aux deux Étoiles μ & d d'Hercule: les observations un peu douteuses.

Les 15, 16 & 17, brouillard épais les matins, qui ne laissoit apercevoir aucune Étoile.

Le 18 au matin, le ciel parfaitement beau & pur; la Comète paroissoit très-bien à la lunette, le noyau d'une lumière brillante & blanchâtre; son diamètre égaloit l'épaisseur d'un des fils du micromètre, qui fut estimé de 15 secondes; le diamètre de la chevelure avoit 4' 26"; la queue avoit peu d'étendue, 30 minutes environ: quoique le ciel fût parfaitement beau, la Comète n'étoit pas visible à la vue simple; dans la lunette, elle paroissoit près de l'étoile ζ d'Hercule: je comparai directement la Comète à cette Étoile, & dans l'intervalle de mes observations, la Comète fut en opposition avec l'Étoile en ascension droite.

Diamètre
du noyau,
15 secondes;
de la chevelure,
4' 26";
longueur
de la queue,
30 minutes.

Le 19 au matin, il y avoit beaucoup de brouillard; les Étoiles paroissoient nébuleuses; la Comète étoit difficile à apercevoir, & la moindre lumière employée pour éclairer les fils du micromètre, la faisoit disparaître, & ce ne fut pas sans peine que je pus en déterminer le lieu, en la comparant directement aux étoiles de la constellation d'Hercule ζ , vingt-troisième & vingt-sixième du Catalogue de Flamsteed: pour vérifier les positions de ces deux dernières Étoiles, elles furent comparées à ζ .

Les 22, 23 & 24 Février, le ciel fut couvert de brouillards épais.

La nuit du 25 au 26, je comparai la Comète à l'étoile ξ de la couronne, & à une Étoile dont le lieu n'avoit pas encore été déterminé.

La nuit du 26 au 27, le ciel assez beau; il y avoit cependant du brouillard; la Comète paroissoit comme la nuit précédente: je comparai le noyau à plusieurs étoiles, de la couronne, & à deux Étoiles nouvelles dont les lieux n'étoient pas encore connus.

La nuit du 27 au 28, il y avoit du brouillard que la Lune avoit beaucoup de peine à vaincre, ainsi que les deux nuits précédentes; ce ne fut pas sans peine que je pus voir la Comète; la lumière étoit extrêmement affoiblie par le

brouillard : je comparai le noyau à la même Étoile de la veille γ de la couronne & à deux Étoiles nouvelles.

La nuit du 28 Février au 1.^{er} Mars, le ciel étoit beau; mais il y avoit un peu de brouillard, la Comète se voyoit difficilement : je déterminai son lieu en la comparant aux deux étoiles β & γ de la couronne.

La nuit du 1.^{er} au 2 Mars, le ciel fut parfaitement beau; la Comète paroissoit entre les deux étoiles β & γ de la couronne, avec lesquelles le noyau fut comparé.

La nuit du 2 au 3 fut en partie couverte de brouillard : vers les 4 heures du matin, le brouillard s'étoit dissipé & le ciel étoit devenu parfaitement beau; la Comète paroissoit près de l'étoile β de la couronne, à laquelle je la comparai plusieurs fois; la Comète étoit foible en lumière à cause de la Lune qui étoit sur l'horizon.

La nuit du 3 au 4, un peu de brouillard vers les 11 heures du soir, la Comète étoit très-difficile à apercevoir à la lunette; mais vers les 4 heures du matin, le brouillard étant dissipé, la Comète paroissoit, mais sa lumière étoit encore un peu affoiblie par celle de la Lune qui étoit sur l'horizon; la lunette placée dans le plan du Méridien à quelques secondes près, j'y observai la Comète avec les étoiles β & γ de la couronne: les observations sont rapportées dans la première Table.

La nuit du 4 au 5, le ciel fut parfaitement beau toute la nuit, & pur comme il est rare de le voir à Paris; depuis 9 heures jusqu'à minuit, j'observai plusieurs Étoiles dont les lieux n'avoient pas encore été connus, & qui devoient servir les jours suivans à la détermination de la Comète : ces Étoiles sont rapportées dans la seconde Table qui est à la suite du Mémoire. La Comète fut comparée à β de la couronne; à la lunette, la Comète paroissoit distinctement, malgré la grande lumière de la Lune sur l'horizon; le noyau étoit brillant, blanchâtre; son diamètre, comparé à l'épaisseur d'un des fils du micromètre, fut estimé de 5 secondes; la chevelure avoit peu d'étendue, diminuée par la lumière de la Lune.

Diamètre
du noyau,
5 secondes.

La nuit du 5 au 6 de Mars, le ciel fut parfaitement beau

toute la nuit; la Comète avoit les mêmes apparences que la nuit précédente; je comparai le noyau à la même étoile β de la couronne des jours précédens, & plusieurs Étoiles nouvelles furent comparées à ϵ du Bouvier, de la troisième grandeur.

La nuit du 6 au 7, il y avoit du brouillard, & la Comète paroissoit foiblement; le noyau fut comparé à ϵ du Bouvier & à deux nouvelles Étoiles déterminées.

La nuit du 7 au 8, le ciel fut parfaitement beau & pur; la Comète paroissoit très-distinctement à la lunette, ayant presque autant de lumière que les premiers jours d'observations; cependant on ne pouvoit pas l'apercevoir à la simple vue; avec la lunette de nuit, on la voyoit encore très-bien; le noyau étoit brillant: je comparai son diamètre à l'épaisseur d'un des fils du micromètre, & fut estimé de 5 secondes; il étoit environné de nébulosité dont l'étendue avoit $6' 42''$; on ne voyoit aucune apparence de queue: je comparai directement le noyau de la Comète aux deux étoiles ϵ & \downarrow du Bouvier. La même nuit, je comparai ϵ du Bouvier à β de la couronne, cette dernière n'étant rapportée que dans le Catalogue de Flamsteed: j'avois déjà fait la même comparaison la nuit du 4 au 5 de ce mois.

Diamètre
du noyau,
5 secondes.
Diamètre
de
la nébulosité,
 $6' 42''$.

La nuit du 8 au 9, le ciel fut beau; mais il ne fut pas aussi pur que la nuit précédente: je comparai la Comète aux mêmes étoiles de la veille ϵ & \downarrow du Bouvier; j'observai aussi la position de plusieurs Étoiles qui n'avoit pas encore été déterminée.

La nuit du 9 au 10, le ciel fut très-beau; la Comète paroissoit très-bien à la lunette; le noyau brillant & blanchâtre, environné d'une légère nébulosité: je comparai plusieurs fois la Comète à ϵ du Bouvier, & je déterminai la position de plusieurs Étoiles qui n'avoient pas encore été connues.

La nuit du 10 au 11 Mars, le ciel fut parfaitement beau & sans nuages; la Comète se faisoit voir distinctement à la lunette achromatique; on la voyoit aussi avec la lunette de nuit: je comparai le noyau à la trente-quatrième étoile du Bouvier, de la sixième grandeur, suivant le Catalogue

de Flamsteed, & cette Étoile fut comparée à ϵ de la même constellation; j'observai aussi la position d'une nouvelle Étoile qui devoit être employée les jours suivans à la détermination des lieux de la Comète.

La nuit du 11 au 12, beau temps toute la nuit; la Comète paroissoit comme la nuit précédente, avec la même lumière: le noyau fut comparé à la même Étoile de la veille, la trente-quatrième du Bouvier, & à deux Étoiles nouvelles que j'observai en les comparant à d'autres Étoiles connues; j'observai aussi plusieurs Étoiles dont les lieux n'avoient pas encore été déterminés en les comparant à *Arcturus*: ces nouvelles Étoiles devoient servir les jours suivans à la détermination des lieux de la Comète.

La nuit du 12 au 13, il y eut un peu de brouillard: je déterminai la position de la Comète en la comparant à une Étoile de la nuit précédente, que j'avois déterminée; je déterminai aussi plusieurs Étoiles: on trouvera leurs déterminations dans la seconde Table.

La nuit du 13 au 14, le ciel fut parfaitement beau; la Comète étoit très-apparente à la lunette, le noyau d'une lumière blanchâtre environné de nébulosités, avec une queue de quelques minutes d'étendue; la Comète se voyoit encore bien à la lunette de nuit: le noyau fut comparé plusieurs fois à de nouvelles Étoiles dont les lieux avoient été déterminés.

Les nuits du 13 au 14, du 14 au 15, du 15 au 16, & du 16 au 17, le ciel fut couvert.

La nuit du 17 au 18, le ciel s'éclaircit vers les 10 heures du soir; la Comète se voyoit encore bien à la lunette achromatique & avec celle de nuit: je comparai le noyau à de nouvelles Étoiles, dont les positions avoient été déterminées. Les déterminations de la Comète obtenues entre $11^h 5'$ jusqu'à $11^h 26'$, furent un peu douteuses pour les déclinaisons seulement; les deux autres déterminations faites entre 2 & 3 heures furent meilleures: elles furent faites aux environs du Méridien.

Les 18, 19 & 20 Mars au soir, le ciel fut couvert.

Le 21 au soir, beau temps; la Comète paroïssoit, le noyau brillant; on pouvoit encore la voir avec la lunette de nuit; sa grandeur & ses apparences étoient à peu-près les mêmes que la nébuleuse que j'avois découverte le 3 de Mai 1764, entre la queue & les pattes d'un des Lévriers le plus méridional (b): cette comparaison fut aisée à faire, la Comète & la nébuleuse étoient à peu de distance l'une de l'autre. La Comète fut comparée à la sixième étoile du Bouvier, suivant l'ordre du Catalogue de Flamsteed, & cette Étoile avoit été comparée les jours précédens à ϵ de la même constellation; la position de la Comète fut encore observée avec une Étoile nouvelle déterminée.

La Comète
comparée
à la nébuleuse
des Lévriers.

Le 22 au soir, le ciel fut un peu nébuleux: la Comète fut comparée à la première & à la sixième étoile du Bouvier, suivant l'ordre que tiennent ces Étoiles dans le grand Catalogue de Flamsteed.

Le 23, le ciel fut parfaitement beau le soir; la Comète se voyoit encore fort bien à la lunette achromatique, on la voyoit aussi avec celle de nuit: je comparai les apparences de la Comète à la même nébuleuse des Lévriers; la Comète paroïssoit un peu plus foible qu'elle. Je comparai le noyau de la Comète, qui étoit encore brillant & d'une lumière blanchâtre, à la première étoile du Bouvier, suivant Flamsteed, & directement à *Arcturus*: les observations sont bonnes.

La Comète
comparée
à la même
nébuleuse.

Le 24, beau temps le soir; je comparai encore les apparences de la Comète à la même nébuleuse des Lévriers; la Comète paroïssoit avoir un peu moins de lumière: je déterminai la position de la Comète en la comparant directement, comme le jour précédent, aux étoiles *numéro 1* du Bouvier & à *Arcturus*.

La Comète
comparée
à la même
nébuleuse.

Le 25, beau temps, il y avoit cependant des vapeurs qui s'élevoient au-dessus de l'horizon, & ces vapeurs annonçoient qu'il y auroit une Aurore boréale; effectivement, vers les 9 heures du soir, l'Aurore boréale commença à paroître,

Aurore
boréale.

(b) Voyez les Mémoires de l'Académie, année 1771, page 454.

devint rougeâtre, & à 10 heures elle disparut; il faisoit alors un grand clair de Lune: je comparai directement la Comète à *Arcturus* & à une Étoile nouvelle que j'avois déterminée.

Le 26 Mars, beau temps; la Comète paroissoit avec la même lumière que le jour précédent; je la comparai aux étoiles » & *Arcturus* du Bouvier, & » à *Arcturus* pour bien connoître sa position: je déterminai le même soir la position de plusieurs Étoiles dont les lieux n'étoient pas encore connus.

Le 27, beau temps comme la veille; la Lune étoit sur l'horizon, & la Comète paroissoit le soir sur le parallèle de la nébuleuse de la chevelure de Bérénice, que j'avois découverte le 27 Février 1777: voici ce que j'ai rapporté de cette nébuleuse dans le journal de mes observations. « Une nébu-

Nébuleuse
dans
la chevelure
de Bérénice,
comparée
à la
Comète,
& de même
grandeur
que
la Comète.

» leuse dans la chevelure de Bérénice, qui est assez sensible à
» la lunette; elle est assez ronde, & je n'ai pas reconnu qu'elle
» soit composée d'Étoiles; c'est une lumière foible: cette nébu-
» leuse n'étoit pas bien élevée au-dessus de l'horizon lorsque
» je l'ai découverte, & que j'en ai déterminé le lieu en la
» comparant à l'étoile quarante-deuxième de la chevelure de
» Bérénice, de la quatrième à la cinquième grandeur, suivant
» le Catalogue de Flamsteed; voici sa position déterminée pour le
» 27 Février 1777: son ascension droite étoit de $19^{\text{h}} 5^{\text{m}} 30^{\text{s}} 26''$,
& sa déclinaison de $19^{\text{d}} 22' 44''$ boréale. » La Comète &
cette nébuleuse paroissoient avoir à la lunette même lumière
l'une & l'autre, même étendue & même difficulté à les voir
à l'instrument; & cette nébuleuse existante servira dans la
suite de terme de comparaison pour la grandeur de la
Comète le 27 Mars 1779. Le même soir, je comparai la
Comète directement à cette nébuleuse, la position en est
rapportée dans la première Table; je la comparai aussi aux
étoiles » du Bouvier, à la quarante-deuxième de la chevelure
de Bérénice, & à une Étoile nouvelle déterminée.

Le 28, beau temps le soir; la grande lumière de la Lune diminuoit sensiblement les apparences de la Comète; je comparai encore sa lumière à la nébuleuse de la chevelure de

de Bérénice, que je trouvai de même grandeur & ayant même lumière: la Comète fut comparée directement à cette nébuleuse & à la quarante-deuxième Étoile de la chevelure de Bérénice.

La Comète
comparée
à la nébuleuse
de Bérénice.

Le 29, la grande lumière de la Lune affoiblissoit considérablement celle de la Comète; j'avois de la peine à la voir avec la lunette achromatique, quoique j'aie attendu qu'elle soit parvenue à une grande hauteur au-dessus de l'horizon; le ciel étoit cependant parfaitement beau: je comparai la Comète à la même Étoile des jours précédens, la quarante-deuxième de la chevelure de Bérénice, & à une Étoile nouvelle déterminée.

Le 30 Mars, le ciel fut parfaitement beau & pur; mais la Lune qui approchoit de son plein, répandoit une lumière considérable, & la Comète étoit très-difficile à apercevoir à la lunette achromatique; de temps à autre, elle disparoissoit: je réussis cependant à la comparer deux fois à une Étoile nouvelle, dont le lieu fut déterminé en la comparant à des Étoiles connues.

La nuit du 31 Mars au 1.^{er} Avril, le ciel fut parfaitement beau; mais cette nuit arrivoit la pleine Lune, & la grande lumière avoit effacé celle de la Comète avant son passage au Méridien; je ne pus l'apercevoir que lorsqu'elle y fut parvenue; elle échappoit encore à l'œil, quoiqu'elle fût dans la lunette achromatique: je la comparai à deux Étoiles nouvelles dont les lieux furent déterminés.

La nuit du 1.^{er} au 2 Avril, le ciel parfaitement beau, toujours beaucoup de difficulté pour apercevoir la Comète, à cause de la grande lumière de la Lune: je déterminai son lieu en la comparant à deux nouvelles Étoiles que j'avois déterminées; j'observai aussi le passage de la Comète au Méridien, à la lunette qui y étoit placée à quelques secondes près. Je vérifiai le même soir la position de plusieurs Étoiles observées les jours précédens, en les comparant à *Arcturus*.

La nuit du 2 au 3, le ciel fut parfaitement beau; avant le lever de la Lune, je recherchai la Comète, que je trouvai

sans peine; elle paroissoit encore sensiblement à la lunette achromatique, le noyau d'une lumière sensible & blanchâtre, mais devenu comme un point brillant environné d'une foible nébulosité; à la lunette de nuit, on ne faisoit plus que la soupçonner, & encore pour la trouver, il falloit que la lunette fût dirigée dans l'endroit du ciel où elle paroissoit: la lunette achromatique montée sur la machine parallaclique, donnoit cette direction. La Comète fut comparée à une Étoile nouvelle de la huitième grandeur dont le lieu avoit été déterminé: je déterminai aussi le lieu de la Comète par son passage au Méridien.

La nuit du 3 au 4, beau temps; il y avoit cependant un peu de brouillard, & la Comète paroissoit à peu de chose près avec les mêmes apparences que la nuit précédente: je comparai le noyau à l'Étoile de la veille & à une Étoile nouvelle que j'avois déterminée; j'observai aussi la Comète au Méridien avec les mêmes Étoiles.

Le 4 au soir, beau temps; entre 8 & 9 heures, je comparai la Comète à l'Étoile vingt-neuvième, de la sixième grandeur de la chevelure de Bérénice & à une Étoile nouvelle déterminée; vers les 10 heures, le ciel commença à se couvrir; à minuit je ne pus voir la Comète à son passage au Méridien; mon dessein étoit de l'y observer avec β du Lion, la Comète étant sur le parallèle de cette Étoile.

Le 5; beau temps; je comparai directement la Comète à l'étoile β du Lion, de la seconde grandeur, ensuite à une Étoile déterminée, & son passage au Méridien avec l'Étoile ci-dessus rapportée, la vingt-neuvième de la chevelure de Bérénice; pour bien connoître la position de cette dernière Étoile, je la comparai à β du Lion: j'avois toujours beaucoup de peine à apercevoir la Comète avec la lunette de nuit.

Le 6, le ciel fut parfaitement beau, & je reconnus que la Comète perdoit de sa lumière, quoiqu'on la vît encore assez bien à la lunette achromatique; on ne faisoit plus que la soupçonner à celle de nuit: la Comète fut comparée aux

Étoiles vingt-huit & vingt-neuvième de la chevelure de Bérénice, suivant l'ordre qu'ont les Étoiles dans le grand Catalogue de Flamsteed; elle fut observée aussi à la lunette achromatique placée dans le plan du Méridien avec les deux Étoiles vingt-huit & vingt-neuvième.

Le 7, beau temps le soir jusque vers les 10 heures que le ciel commença à se couvrir; avant 10 heures je déterminai la position de la Comète en la comparant à l'Étoile de la veille, la vingt-huitième de la chevelure de Bérénice: je déterminai le même soir la position de trois nouvelles Étoiles qui pouvoient servir les jours suivans à la détermination des lieux de la Comète.

Le 8, le ciel fut couvert.

Le 9 beau temps; la Comète étoit encore apparente à la lunette achromatique; je la comparai à deux Étoiles nouvelles, déterminées le 7, & j'en déterminai trois autres le même soir: à 10 heures $\frac{1}{2}$, le vent étoit devenu sensible, & ensuite grande pluie.

Les 10, 11 & 12, le ciel fut couvert.

Le 13, beau temps le soir; je reconnus que la Comète avoit perdu de sa lumière depuis le 9; je la comparai à deux Étoiles déterminées, & ensuite j'observai son passage à la lunette achromatique placée dans le plan du Méridien avec ϵ de la Vierge, de la troisième grandeur.

Le 14 Avril au soir, le ciel fut parfaitement beau; comme la Comète devoit être ce soir près de l'étoile γ de la Vierge, de la cinquième grandeur, je la cherchai avec la lunette de nuit, & je la vis encore, mais extrêmement affoiblie, & il falloit savoir qu'elle existoit près de cette Étoile, pour pouvoir dire que c'étoit la Comète: je comparai le noyau à cette étoile γ & à l'étoile ϵ de la même constellation; j'observai aussi son passage au Méridien, à la lunette achromatique, avec les mêmes Étoiles.

Le 15 beau temps; je comparai la Comète à l'étoile γ de la Vierge, ensuite je l'observai au Méridien avec la même Étoile: le ciel étoit moins beau que la veille; la Comète se

perdoit de vue de temps à autre, quoique dans le champ de la lunette achromatique : la dernière observation fut un peu douteuse. Le même soir en cherchant la Comète, j'aperçus une Étoile nébuleuse extrêmement foible, & deux autres nébuleuses encore plus foibles en lumière, toutes trois placées près du lieu de la Comète, & presque sur le parallèle de l'étoile ϵ de la Vierge, de la troisième grandeur; la première de ces trois nébuleuses devoit être si près de la Comète, le 13 Avril, ainsi que le 14, que, quoique j'aie observé la Comète, ces deux jours, cette nébuleuse ne fut point aperçue, & ce ne fut que le 15 que je pus la voir, ainsi que les deux autres; je les comparai toutes trois l'une à l'autre, & ensuite l'une des trois à l'étoile ϵ de la Vierge: voici leurs positions déterminées.

| TROIS NÉBULEUSES déterminées dans la VIERGE. | ASCENSION droite. | DÉCLINAIS. boréale. |
|---|--------------------------|------------------------|
| La première, d'une lumière très-foible. | 186 ^d 37' 23" | 13 ^d 2' 42" |
| La seconde, de la même lumière... | 187. 41. 38 | 12. 52. 36 |
| La troisième, un peu plus apparente.... | 188. 6. 53 | 12. 46. 2 |

Ces trois nébuleuses qui ne contiennent aucune Étoile, étoient toutes trois d'une lumière si foible, que la moindre lumière employée pour éclairer les fils du micromètre, les faisoit disparaître: j'ai rapporté ces trois nébuleuses sur la Carte de la route de la Comète.

Le 16, ciel couvert le soir.

Le 17 Avril, le ciel fut parfaitement beau & pur; la Comète étoit encore visible à la lunette achromatique, mais sa lumière étoit sensiblement diminuée: je comparai la Comète à la même Étoile des jours précédens, ρ de la Vierge; je l'observai aussi à son passage au Méridien: les observations sont rapportées dans la première Table.

Le 18, beau temps; la Comète fut comparée à une Étoile

nouvelle, de la huitième grandeur, que je déterminai en la comparant à l'étoile γ de la Vierge: la Comète fut aussi observée au Méridien, à la lunette achromatique, avec la même Étoile.

Le 19, le ciel parfaitement beau le soir jusque vers les 10 heures $\frac{1}{4}$ qu'il se couvrit presque entièrement; je comparai la Comète à la même Étoile du jour précédent, de la huitième grandeur.

Le 20, beau temps dans le temps des observations; la Lune étoit sur l'horizon, mais nouvelle & éloignée du lieu où se trouvoit la Comète; elle n'empêcha pas de la voir à la lunette, & de la comparer à la même Étoile nouvelle des jours précédens; j'observai aussi son passage au Méridien à la lunette achromatique: le même soir, je déterminai la position de plusieurs Étoiles dont les lieux n'avoient pas encore été connus.

Le 21, je comparai encore la Comète à la même Étoile, de la huitième grandeur des jours précédens: je ne pus voir la Comète à son passage au Méridien, le ciel alors étoit couvert de nuages rares.

Le 22 au soir, beau temps, mais la Lune étoit sur l'horizon qui répandoit une grande lumière; ce ne fut pas sans peine que je pus revoir la Comète, quoique dans le champ de la lunette, je la perdois de temps à autre; il me réussit cependant de la voir assez pour pouvoir la comparer plusieurs fois à une Étoile nouvelle, de la septième grandeur, dont je déterminai le lieu: en observant la Comète, j'aperçus à peu de distance d'elle une Étoile nébuleuse, qui paroissoit en même temps que la Comète dans le même champ de la lunette; la Comète & la nébuleuse avoient même apparence & même lumière, l'une & l'autre sur le même parallèle: je fus dans l'incertitude de savoir laquelle des deux étoit la Comète; je fus obligé d'observer l'une & l'autre, & ce n'a été qu'en réduisant les observations que j'en avois faites, que j'ai reconnu la Comète d'avec la nébuleuse. Avant la réduction des observations & même après, je soupçonnai que cette nébuleuse qui ressembloit

Nébuleuse
découverte
le 19 Février
1771,
comparée
à la Comète,
& de même
grandeur
qu'elle,

à la Comète, en étoit une nouvelle qui commençoit à paroître, & j'en étois d'autant plus persuadé que les jours d'avant je ne l'avois pas aperçue, & je ne fus assuré que le lendemain 23 que c'étoit une nébuleuse, en ce qu'elle n'avoit pas changé de position. J'ai trouvé ensuite dans le Journal de mes observations, que j'avois déjà vu cette nébuleuse le 19 Février 1771: voici ce que j'en avois écrit. « En parcourant le ciel du côté » du sud-est avec ma lunette achromatique, j'ai découvert dans » la Vierge une petite nébuleuse qui est ronde, le centre un » peu plus brillant que les bords (ce pourroit bien être une » Comète, il faudra l'examiner de nouveau); cette nébuleuse » se voyoit avec peine avec une lunette ordinaire de 3 pieds $\frac{1}{2}$, » & on ne pouvoit pas l'apercevoir avec la lunette de nuit: » voici sa position. »

| N É B U L E U S E D A N S L A V I E R G E . | ASCENSION | DÉCLINAIS. |
|--|--------------------------|-----------------------|
| | droite. | boréale. |
| Le 19 Février 1771..... | 184 ^d 26' 58" | 9 ^d 16' 9" |
| Le 22 Avril 1779..... | 184. 38. 30 | 9. 14. 34 |

Comète
comparée
à la nébuleuse
de
la Vierge.

Le 23 Avril au soir, le ciel fut parfaitement beau aux environs du lieu de la Comète, & ce ne fut pas sans peine que je pus la voir à cause de la foiblesse de sa lumière, & à cause de la Lune qui étoit sur l'horizon; je la comparai à la même Étoile de la veille & à la même nébuleuse rapportée ci-dessus: je reconnus le soir 24, que la nébuleuse n'avoit pas changé de position depuis la veille.

Le 24 au soir, je cherchai la Comète dans l'endroit du ciel où elle devoit être, & j'étois sûr de la voir dans le champ de la lunette achromatique; mais la grande lumière de la Lune l'avoit fait entièrement disparaître, & il ne fut pas possible de la voir malgré les soins que je pris pour l'apercevoir, même vers son passage au Méridien: la nébuleuse avoit

également disparu. D'après ces recherches, je présumai qu'il ne seroit plus possible de la voir pendant tout le temps que la Lune resteroit sur l'horizon en même temps que la Comète, & que le 23 seroit peut-être le terme de mes observations.

Le 5 Mai au soir, par un beau temps & sans Lune, je recherchai encore la Comète avec la lunette achromatique, n'ayant pu la revoir depuis le 24 d'Avril, à cause de la grande lumière de la Lune & du mauvais temps; c'étoit presque sans espérance de la revoir: cependant, après beaucoup de peines & de recherches, je découvris une lumière extrêmement foible & presque éteinte; cette lumière n'étoit qu'une nuance blanchâtre qui échappoit à l'œil, quoique vue dans la lunette achromatique; cette lumière paroissoit entre les Étoiles, savoir, la dix-septième, de la sixième grandeur, & l'étoile *c*, de la quatrième, toutes deux de la constellation de la Vierge, suivant le Catalogue de Flamsteed: j'en déterminai la position, ainsi que le 6 & le 11, dans la persuasion que c'étoit la Comète elle-même que j'observois; pendant ces trois jours d'observations, je ne lui avois trouvé aucun mouvement apparent, & je présumai que la Comète étoit alors stationnaire: à la dernière observation, j'eus quelque doute si c'étoit la Comète ou une nouvelle nébuleuse; je cherchai aux environs de cette nébulosité pour voir si je ne découvrois pas quelqu'autre lumière aussi foible: enfin, après bien des recherches & beaucoup d'attentions, je découvris auprès de l'étoile *c* de la Vierge, une lumière semblable à celle que je venois d'observer, & c'étoit la Comète elle-même que je comparai à l'étoile *c* de la Vierge; sa position en est rapportée dans la première Table. Voici celle de la nébuleuse que j'avois prise pour la Comète, les 5, 6 & 11 de ce mois.

Nébuleuse
découverte
dans la Vierge,
prise
pour la Comète
pendant
trois jours.

| N É B U L E U S E D A N S LA V I E R G E. | ASCENSION | DÉCLINAIS. |
|--|-------------------------|-----------------------|
| | droite. | boréale. |
| Le 11 Mai 1779..... | 182 ^d 41' 5" | 5 ^d 42' 5" |

Les 12, 13 & 14 Mai, le ciel ne fut pas assez beau pour pouvoir rechercher la Comète & la voir.

Le 15 au soir, beau temps; je recherchai la Comète que je trouvai un peu au-dessous de l'endroit où je l'avois vue le 11, mais sa lumière étoit si rare & si foible, vue à la lunette achromatique, que la moindre lumière que j'étois obligé d'employer pour éclairer les fils du micromètre, la faisoit disparaître, & sans lumière même elle échappoit à l'œil, quoique dans l'instrument; ce ne fut pas sans peine que je pus la comparer à une Étoile de la sixième grandeur, dont le lieu n'avoit pas encore été déterminé: pour déterminer la position de cette Étoile, je la comparai à l'étoile ϵ de la Vierge, par le moyen d'une Étoile intermédiaire, de la huitième grandeur; la lumière de la Comète étoit beaucoup plus foible que celle de la nébuleuse observée le 11.

La Comète
plus foible
que
la nébuleuse.

Dernière
Observation.

Le 16 Mai, le ciel fut couvert.

Le 17, le ciel fut parfaitement beau le soir, je vis encore la Comète, & ce fut pour la dernière fois; je la comparai à la même Étoile du 15, de la sixième grandeur, & ce ne fut pas sans peine, ne pouvant plus éclairer les fils du micromètre sans faire disparaître la Comète, & l'observation en est par conséquent un peu douteuse: ainsi, c'est au 17 de Mai qu'est ma dernière observation.

La Comète a été observée quatre mois, pendant lesquels il y a eu soixante-trois jours d'observations, & deux cents vingt-trois déterminations du lieu du noyau de la Comète.

On ne doit pas, je crois, espérer qu'on puisse jamais découvrir une Comète aussi petite & aussi foible dans le commencement de son apparition, que celle-ci l'a été à la fin. Des dix-sept Comètes que j'ai observées, celle-ci est la seule que j'aie pu suivre ayant aussi peu de lumière: aussi les dernières observations peuvent être regardées comme un peu douteuses, ne pouvant, à cause de la foiblesse de sa lumière, éclairer les fils du micromètre; je ne pouvois souvent que les soupçonner.

Pour avoir un terme de comparaison de la foiblesse de la lumière

lumière de cette Comète, à la fin de sa disparition, le 17 Mai, on pourra voir dans le ciel la nébuleuse de la Vierge, dont j'ai rapporté la position au 11 Mai; la Comète avoit moins de lumière encore que cette nébuleuse.

Des deux Tables que je joins à ce Mémoire, la première contiendra tous les lieux de la Comète observés en ascension droite & en déclinaison, avec les différences de passages de la Comète & des Étoiles au fil horaire du micromètre; il en sera de même dans la colonne qui suit pour les différences en déclinaison, entre la Comète & les Étoiles; le signe + signifie qu'il faudroit ajouter ces différences observées aux positions des Étoiles, avec laquelle la Comète a été comparée pour avoir celle de la Comète; & il en est de même du signe — pour ôter: ces deux colonnes, qui sont la base de toutes mes observations, deviennent susceptibles d'être vérifiées en tout temps & perfectionnées, si dans la suite on détermine avec plus de précision les positions des Étoiles qui ont été employées à la détermination des lieux de la Comète; la septième colonne détermine la grandeur des Étoiles; la suivante contient les lettres de Bayer & les numéros qui distinguent tant les Étoiles qui n'avoient pas encore été déterminées, que celles prises des Catalogues: la dernière colonne fait connoître les Étoiles des constellations qui ont servi à la détermination des lieux de la Comète.

La seconde Table contiendra les ascensions droites & les déclinaisons des Étoiles, tant celles qui ont été employées à la détermination du lieu de la Comète, prises des Catalogues, que des Étoiles nouvelles, réduites au temps des observations: je n'y ai fait d'autres réductions aux Étoiles connues, que celle qu'on trouve dans les Catalogues, sous le titre de *variation annuelle*.

Par cette seconde Table, on verra que le cours de la Comète, pendant quatre mois d'observations, m'a donné occasion de déterminer, par de nouvelles observations, les lieux de cent trente-huit Étoiles, dont les positions n'avoient

Cent trente-
huit Étoiles
de déterminées.

Mém. 1779.

U u.

pas encore été déterminées, & que la plus grande partie de ces Étoiles ont été employées à la détermination du lieu de la Comète.

Je joins aussi à ce Mémoire une Carte céleste que j'ai dessinée, & construite exactement sur mes observations; cette Carte est divisée en degrés d'ascension droite, & en degrés de déclinaison: j'y ai rapporté les positions de la route apparente que la Comète a tenue parmi les Étoiles fixes avec la trace de la queue & sa direction, de manière qu'il sera aisé de juger à l'inspection de cette Carte, de la position de la Comète observée, & de celle des Étoiles près desquelles elle a passé; j'y ai rapporté aussi la position de la Comète vue à Berlin, par M. Bode, le 6 Janvier, avec la ligne en points de sa route apparente, jusqu'au 18 du même mois que je la découvris à Paris. J'ai encore rapporté sur cette Carte, quatorze nébuleuses, dont les positions sont rapportées à la suite des Tables. J'ai encore rapporté depuis, sur cette Carte, onze nébuleuses observées en 1781, dans l'aile boréale de la Vierge; elles y sont désignées sous des numéros, & on en trouvera les détails & les positions dans la Connoissance des Temps, de 1784, page 227.

J'ai rapporté également sur la Carte un modèle d'Étoiles, au moyen duquel on pourra reconnoître leurs grandeurs.

De tous les modèles d'Étoiles qui ont été gravés jusqu'à présent sur les Globes & sur les Cartes célestes, aucun de ces modèles ne m'avoient satisfait pour pouvoir reconnoître leurs grandeurs; ce fut en 1759, pour les Cartes que je composai du retour de la célèbre Comète de 1682, que je cherchai un modèle d'Étoiles plus décisif & plus reconnoissable dans leurs grandeurs que ce qui avoit été gravé jusqu'alors: le modèle que je donnai dans ces Cartes aux Étoiles me parut être le plus avantageux; l'Étoile se trouve désignée pour chaque grandeur, par des rayons pleins, & par d'autres plus alongés & plus fins: de manière qu'en donnant à une Étoile de la première grandeur, huit rayons;

pour la seconde, sept; ainsi de suite, j'ai reconnu que dans toutes les Cartes que j'ai données des Comètes, que ces Étoiles étoient très-reconnoissables, & plusieurs personnes en ont déjà adopté la forme sur des Cartes, Atlas & Globes célestes. Voyez mes premières Cartes dans le volume de l'Académie, *année 1760, page 465*: j'ai donné aussi aux figures des constellations le plus de légèreté possible pour qu'on puisse apercevoir toutes les Étoiles.

La Comète a passé, comme on le verra sur la Carte, par les constellations de la Lyre, d'Hercule, la Couronne, le Bouvier, au-dessous de la chevelure de Bérénice, a traversé la Vierge, & a cessé de paroître dans l'aile australe de cette constellation, au-dessous de l'étoile ϵ , ayant parcouru pendant les quatre mois d'observations, $107^d\ 26'\ 3''$ d'ascension droite, & $30^d\ 37'\ 29''$ de déclinaison boréale.

A la rentrée publique de l'Académie, le 14 Avril 1779, je rendis compte d'une partie de mes observations, dans un Mémoire fort abrégé, que j'ai refondu dans celui-ci.

TABLE I. Des Lieux apparens de la Comète de 1779, découverte le 19 Janvier au matin, comparée aux Étoiles fixes.

| 1779. | TEMPS vrai, | ASCENSION droite observée. | DÉCLINAISON Boréale observée. | DIFFÉRENCE en ascens. dr. entre la Comète & les Étoiles. | DIFFÉRENCE en déclinaif. entre la Comète & les Étoiles. | Grandeur des Étoiles. | Lettr. de Bayer & N.º des Étoiles. | ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée. |
|----------|--------------------|----------------------------------|-------------------------------------|---|--|--------------------------|---------------------------------------|--|
| | H. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | M. S. | | | |
| Janv. 18 | 18. 8. 2 | 289. 7. 38 | 29. 32. 9 | 0. 16. 7 + | 20. 4 — | 5 | 2 | du Cygne. |
| | 18. 26. 54 | 289. 6. 46 | 29. 32. 41 | 0. 15. 15 + | 20. 36 + | 5 | 2 | |
| | 18. 46. 8 | 289. 5. 31 | 29. 33. 1 | 0. 14. 0 + | 20. 56 + | 5 | 2 | |
| | 22 17. 13. 57 | 283. 48. 16 | 31. 14. 16 | 0. 52. 52 + | 36. 48 — | 6 | 2 | |
| | 17. 22. 50 | 283. 47. 54 | 31. 15. 10 | 0. 52. 30 + | 35. 54 — | 6 | 2 | déterminées. |
| | 17. 22. 50 | 283. 47. 55 | 31. 15. 10 | 0. 20. 45 — | 10. 28 — | 6 | 134 | |
| | 18. 25. 48 | 283. 44. 40 | 31. 16. 8 | 0. 24. 0 — | 9. 30 — | 6 | 134 | |
| | 18. 38. 2 | 283. 43. 39 | 31. 16. 24 | 0. 48. 15 + | 34. 40 — | 6 | 2 | |
| | 18. 38. 2 | 283. 43. 40 | 31. 16. 23 | 0. 25. 0 — | 9. 15 — | 6 | 134 | du Cygne. déterminée. |
| | 23 17. 32. 47 | 282. 25. 12 | 31. 36. 13 | 0. 15. 0 — | 47. 45 — | 3 | 2 | de la Lyre. |
| | 17. 32. 47 | 282. 25. 17 | 31. 36. 4 | 0. 30. 7 — | 15. 0 — | 6 | 2 | |
| | 17. 38. 28 | 282. 25. 5 | 31. 36. 15 | 0. 15. 7 — | 47. 43 — | 3 | 2 | |
| | 17. 38. 28 | 282. 25. 9 | 31. 36. 11 | 0. 30. 15 — | 24. 53 — | 6 | 2 | |
| | 18. 23. 33 | 282. 22. 42 | 31. 36. 50 | 0. 17. 30 — | 47. 8 — | 3 | 2 | |
| | 18. 23. 33 | 282. 22. 39 | 31. 36. 40 | 0. 32. 45 — | 14. 24 — | 6 | 2 | |
| | 18. 37. 21 | 282. 21. 35 | 31. 37. 6 | 0. 18. 37 — | 46. 52 — | 3 | 2 | |
| | 18. 37. 21 | 282. 21. 39 | 31. 37. 7 | 0. 33. 45 — | 23. 57 — | 6 | 2 | |
| | 24 17. 31. 49 | 281. 3. 27 | 31. 55. 0 | 1. 36. 45 — | 18. 58 — | 3 | 2 | déterminée. |
| | 17. 31. 49 | 281. 3. 27 | 31. 55. 0 | 1. 7. 45 — | 42. 53 — | 6 | 133 | |
| | 17. 48. 24 | 281. 2. 24 | 31. 55. 34 | 1. 53. 0 — | 4. 30 + | 6 | 2 | |
| | 18. 3. 11 | 281. 1. 27 | 31. 55. 39 | 1. 38. 45 — | 28. 19 — | 3 | 2 | |
| | 18. 3. 11 | 281. 1. 27 | 31. 55. 41 | 0. 37. 0 + | 22. 58 — | 6 | 12 | de la Lyre. |
| | 18. 3. 11 | 281. 1. 27 | 31. 55. 40 | 0. 38. 15 + | 38. 43 — | 6 | 12 | |
| | 18. 24. 23 | 281. 0. 27 | 31. 55. 50 | 1. 39. 45 — | 28. 8 — | 3 | 2 | |
| | 18. 46. 39 | 280. 59. 27 | 31. 56. 14 | 0. 35. 0 + | 22. 25 — | 6 | 12 | |
| | 30 17. 0. 12 | 272. 52. 8 | 33. 12. 48 | 7. 36. 45 — | 5. 34 + | 4 | 2 | déterminée. de la Lyre. |
| | 17. 0. 12 | 272. 51. 53 | 33. 12. 48 | 1. 56. 30 + | 11. 45 — | 7 | 125 | |
| | 17. 44. 57 | 272. 49. 23 | 33. 13. 10 | 7. 39. 30 — | 5. 56 + | 4 | 2 | |
| | 17. 44. 57 | 272. 49. 38 | 33. 13. 10 | 1. 54. 15 + | 11. 23 — | 7 | 125 | |
| | 18. 29. 49 | 272. 47. 23 | 33. 13. 21 | 0. 31. 15 + | 14. 34 — | 7 | 127 | déterminées. |
| | 31 17. 44. 52 | 271. 27. 53 | 33. 21. 33 | 4. 7. 30 + | 5. 18 — | 7 | 122 | |
| | 17. 58. 35 | 271. 27. 8 | 33. 22. 2 | 0. 31. 45 + | 3. 31 — | 7 | 125 | |
| | 18. 23. 42 | 271. 25. 23 | 33. 21. 27 | 4. 5. 0 + | 5. 22 — | 7 | 122 | |
| | 18. 28. 56 | 271. 25. 23 | 33. 21. 5 | 0. 30. 0 + | 3. 28 — | 7 | 125 | d'Hercule. déterminée. |
| | Févr. 8 17. 44. 27 | 260. 32. 27 | 33. 41. 29 | 3. 15. 30 + | 20. 39 + | 5 | 2 | |
| | 17. 44. 27 | 260. 32. 27 | 33. 41. 29 | 0. 17. 45 + | 14. 42 — | 7 | 117 | |

| 1779. | TEMPS vrai. | ASCENSION droite observée. | DÉCLINAISON Boréale. observée. | DIFFÉRENCE en ascenl. dr. entre la Comète & les Étoiles. | DIFFÉRENCE en déclinaif. entre la Comète & les Étoiles. | Grandeur des Étoiles. | Letres de Bayer, & N.° des Étoiles. | ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée. |
|----------|----------------|----------------------------------|--------------------------------------|---|--|--------------------------|--|--|
| | H. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | M. S. | | | |
| Févr. 10 | 17. 4. 31 | 257. 50. 12 | 33. 37. 26 | 0. 33. 15 + | 16. 36 + | 5 | u | d'Hercule. |
| | 17. 23. 48 | 257. 48. 2 | 33. 37. 25 | 0. 31. 45 + | 16. 35 + | 5 | u | |
| | 17. 56. 55 | 257. 46. 49 | 33. 37. 51 | 0. 29. 52 + | 17. 1 + | 5 | u | |
| 11 | 14. 51. 13 | 256. 35. 20 | 33. 34. 43 | 0. 41. 37 - | 13. 53 + | 5 | u | |
| | 15. 40. 14 | 256. 32. 12 | 33. 34. 36 | 0. 44. 45 - | 13. 46 + | 5 | u | |
| | 17. 19. 58 | 256. 26. 42 | 33. 34. 23 | 0. 50. 15 - | 13. 33 + | 5 | u | |
| 13 | 16. 34. 38 | 253. 46. 12 | 33. 25. 47 | 3. 30. 45 - | 4. 57 + | 5 | u | |
| | 16. 34. 38 | 253. 46. 54 | 33. 25. 36 | 0. 25. 15 + | 27. 52 - | 6 | d | |
| | 17. 2. 8 | 253. 43. 54 | 33. 25. 29 | 0. 22. 15 + | 27. 59 - | 6 | d | |
| 17 | 14. 14. 42 | 248. 16. 47 | 32. 59. 10 | 0. 2. 0 + | 58. 27 + | 3 | γ | |
| | 14. 16. 13 | 248. 16. 47 | 32. 59. 11 | 0. 2. 0 + | 58. 28 + | 3 | γ | |
| | 15. 47. 57 | 248. 11. 32 | 32. 58. 24 | 0. 3. 15 - | 57. 41 + | 3 | γ | |
| | 15. 49. 28 | 248. 11. 32 | 32. 58. 23 | 0. 3. 15 - | 57. 40 + | 3 | γ | |
| 18 | 15. 47. 11 | 246. 46. 47 | 32. 49. 40 | 1. 28. 10 - | 48. 57 + | 3 | γ | |
| | 15. 56. 12 | 246. 46. 32 | 32. 49. 40 | 1. 28. 15 - | 48. 57 + | 3 | γ | |
| | 16. 25. 10 | 246. 45. 25 | 32. 49. 31 | 3. 8. 30 + | 2. 7 - | 5 | 23 | |
| | 16. 25. 10 | 246. 45. 47 | 32. 49. 47 | 1. 52. 45 + | 22. 23 - | 6 | 26 | |
| 20 | 12. 50. 0 | 244. 6. 55 | 32. 31. 2 | 4. 7. 52 - | 30. 19 + | 3 | γ | |
| | 13. 14. 49 | 244. 5. 10 | 32. 31. 6 | 0. 28. 15 + | 20. 32 - | 5 | 23 | |
| | 13. 24. 13 | 244. 5. 2 | 32. 30. 55 | 4. 9. 45 - | 30. 12 + | 3 | γ | |
| | 13. 47. 51 | 244. 2. 55 | 32. 31. 14 | 0. 26. 0 + | 20. 24 - | 5 | 23 | |
| | 13. 47. 51 | 244. 2. 55 | 32. 31. 14 | 0. 50. 7 - | 40. 56 - | 6 | 26 | |
| 25 | 11. 27. 37 | 237. 0. 2 | 31. 28. 40 | 0. 37. 0 - | 27. 12 + | 8 | 109 | déterminée. |
| | 11. 41. 8 | 237. 0. 7 | 31. 28. 17 | 6. 22. 15 - | 3. 11 + | 5 | ε | de la Couronne. |
| | 12. 33. 12 | 236. 56. 32 | 31. 27. 52 | 6. 26. 0 - | 2. 46 + | 5 | ε | |
| | 12. 33. 12 | 236. 56. 32 | 31. 27. 52 | 0. 40. 30 - | 26. 24 + | 8 | 109 | déterminée. |
| 26 | 13. 21. 37 | 235. 27. 44 | 31. 12. 25 | 2. 41. 22 - | 43. 7 + | 5 | 1 | de la Couronne. |
| | 13. 21. 37 | 235. 27. 37 | 31. 12. 26 | 0. 19. 37 - | 38. 42 + | 8 | 105 | déterminées. |
| | 13. 21. 37 | 235. 27. 44 | 31. 12. 25 | 2. 4. 0 - | 33. 14 + | 8 | 107 | |
| | 14. 11. 52 | 235. 23. 59 | 31. 11. 55 | 2. 45. 7 - | 42. 17 + | 5 | 1 | de la Couronne. |
| | 14. 11. 52 | 235. 24. 7 | 31. 11. 34 | 0. 23. 7 - | 37. 50 + | 8 | 105 | déterminées. |
| | 14. 44. 48 | 235. 21. 59 | 31. 11. 18 | 0. 25. 15 - | 37. 34 + | 8 | 105 | |
| 27 | 11. 24. 6 | 234. 7. 36 | 30. 57. 33 | 4. 1. 30 - | 28. 15 + | 5 | 1 | de la Couronne. |
| | 11. 24. 6 | 234. 7. 44 | 30. 57. 33 | 1. 39. 30 - | 23. 49 + | 5 | 105 | |
| | 11. 24. 6 | 234. 7. 36 | 30. 57. 33 | 0. 46. 0 - | 22. 13 + | 8 | 103 | déterminées. |
| 28 | 11. 15. 15 | 232. 41. 36 | 30. 40. 40 | 0. 3. 10 + | 45. 59 + | 8 | 99 | |
| | 11. 15. 15 | 232. 41. 36 | 30. 40. 50 | 3. 0. 30 + | 48. 52 + | 4 | β | de la Couronne. |
| | 12. 53. 8 | 232. 39. 21 | 30. 40. 11 | 5. 29. 45 - | 10. 53 + | 5 | 1 | |
| | 12. 53. 8 | 232. 39. 29 | 30. 40. 10 | 4. 42. 15 - | 0. 59 + | 8 | 107 | déterminée. |
| ars. 1 | 13. 43. 44 | 231. 6. 43 | 30. 19. 29 | 1. 25. 37 + | 27. 31 + | 4 | β | de la Couronne. |
| | 13. 43. 44 | 231. 6. 44 | 30. 20. 58 | 7. 4. 22 - | 3. 20 - | 5 | 1 | |

| 1779. | TEMPS vrai. | ASCENSION droite observée. | DÉCLINAISON Boréale observée. | DIFFÉRENCE en ascenſ. dr. entre la Comète & les Étoiles. | DIFFÉRENCE en déclinaif. entre la Comète & les Étoiles. | Grandeur des Étoiles. | Letres de Bayer, & N.° des Étoiles. | ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée. |
|---------|----------------|----------------------------------|-------------------------------------|---|--|--------------------------|--|--|
| | H. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | M. S. | | | |
| Mars. 2 | 16. 8. 37 | 229. 31. 21 | 29. 58. 55 | 0. 9. 45 — | 6. 57 + | 4 | β | de la Couronne. |
| | 16. 22. 10 | 229. 30. 36 | 29. 58. 48 | 0. 10. 30 — | 6. 50 + | 4 | β | |
| | 16. 35. 45 | 229. 29. 51 | 29. 58. 35 | 0. 11. 15 — | 6. 37 + | 4 | β | |
| | 17. 2. 8 | 229. 28. 6 | 29. 57. 59 | 0. 13. 0 — | 6. 1 + | 4 | β | |
| | 17. 2. 8 | 229. 28. 16 | 29. 57. 58 | 4. 48. 15 — | 36. 1 + | 8 | 97 | |
| 3 | 10. 53. 42 | 228. 24. 21 | 29. 43. 31 | 1. 16. 45 — | 8. 27 — | 4 | β | déterminée. |
| | 15. 53. 6 | 228. 6. 36 | 29. 39. 34 | 1. 34. 30 — | 12. 24 — | 4 | β | de la Couronne. |
| Mér. { | 16. 12. 36 | 228. 5. 21 | 29. 39. 13 | 1. 35. 45 — | 12. 45 — | 4 | β | |
| | 16. 12. 36 | 228. 5. 21 | 29. 39. 14 | 0. 20. 22 + | 45. 41 — | 5 | 0 | |
| | 16. 40. 35 | 228. 3. 51 | 29. 38. 53 | 1. 37. 15 — | 13. 5 — | 4 | β | |
| 4 | 10. 12. 38 | 227. 1. 36 | 29. 24. 9 | 2. 39. 30 — | 27. 49 — | 4 | β | |
| | 10. 26. 23 | 227. 0. 36 | 29. 23. 49 | 2. 40. 30 — | 28. 9 — | 4 | β | du Bouvier. |
| | 11. 3. 0 | 226. 58. 44 | 29. 23. 24 | 2. 42. 22 — | 28. 34 — | 4 | β | |
| | 12. 4. 48 | 226. 55. 6 | 29. 22. 25 | 2. 46. 0 — | 29. 33 — | 4 | β | |
| 5 | 9. 52. 13 | 225. 37. 36 | 29. 2. 40 | 4. 3. 30 — | 49. 18 — | 4 | β | |
| | 10. 10. 30 | 225. 36. 21 | 29. 2. 26 | 4. 4. 45 — | 49. 32 — | 4 | β | |
| 6 | 10. 36. 46 | 224. 11. 6 | 28. 40. 41 | 5. 20. 52 + | 39. 45 + | 3 | ε | du Bouvier. |
| | 10. 48. 41 | 224. 9. 59 | 28. 40. 40 | 12. 34. 45 + | 37. 59 + | 8 | 93 | |
| | 11. 11. 25 | 224. 8. 59 | 28. 40. 15 | 5. 18. 45 + | 39. 19 + | 3 | ε | |
| | 11. 40. 19 | 224. 6. 2 | 28. 40. 5 | 0. 31. 15 + | 42. 49 + | 8 | 95 | |
| 7 | 9. 48. 14 | 222. 50. 14 | 28. 19. 3 | 4. 0. 0 + | 18. 7 + | 3 | ε | |
| | 10. 47. 41 | 222. 46. 29 | 28. 18. 11 | 3. 56. 15 + | 17. 15 + | 3 | ε | du Bouvier. |
| | 10. 50. 47 | 222. 46. 15 | 28. 18. 5 | 0. 58. 45 — | 28. 58 + | 5 | ↓ | |
| | 11. 32. 43 | 222. 43. 45 | 28. 17. 40 | 1. 11. 15 — | 28. 33 + | 5 | ↓ | |
| 8 | 9. 15. 8 | 221. 28. 44 | 27. 56. 37 | 2. 38. 30 + | 4. 19 — | 3 | ε | |
| | 9. 15. 8 | 221. 28. 8 | 27. 56. 30 | 2. 16. 52 — | 7. 23 + | 5 | ↓ | |
| | 9. 39. 27 | 221. 27. 21 | 27. 56. 12 | 2. 37. 7 + | 4. 44 — | 3 | ε | du Bouvier. |
| | 9. 39. 27 | 221. 27. 30 | 27. 56. 14 | 2. 17. 30 — | 7. 7 + | 5 | ↓ | |
| | 10. 58. 11 | 221. 23. 6 | 27. 54. 44 | 2. 32. 52 + | 6. 12 — | 3 | ε | |
| 9 | 8. 54. 14 | 220. 8. 29 | 27. 35. 2 | 1. 18. 15 + | 27. 54 — | 3 | ε | |
| | 10. 2. 1 | 220. 4. 29 | 27. 30. 38 | 1. 14. 15 + | 29. 18 — | 3 | ε | |
| | 11. 21. 43 | 219. 59. 59 | 27. 29. 29 | 1. 9. 45 + | 30. 27 — | 3 | ε | du Bouvier. |
| 10 | 9. 25. 43 | 218. 45. 30 | 27. 7. 47 | 0. 19. 45 + | 21. 3 — | 6 | 34 | |
| | 10. 11. 47 | 218. 43. 15 | 27. 7. 3 | 0. 17. 30 + | 21. 47 — | 6 | 34 | |
| | 10. 53. 15 | 218. 40. 45 | 27. 6. 17 | 0. 15. 0 + | 22. 33 — | 6 | 34 | |
| 11 | 9. 2. 44 | 217. 26. 30 | 26. 43. 8 | 0. 59. 15 — | 45. 42 — | 6 | 34 | |
| | 9. 24. 56 | 217. 25. 27 | 26. 42. 56 | 1. 48. 7 + | 8. 39 — | 7 | 85 | déterminées. |
| | 9. 24. 56 | 217. 25. 25 | 26. 42. 56 | 0. 35. 30 — | 15. 32 — | 8 | 88 | |
| | 10. 36. 46 | 217. 21. 25 | 26. 41. 9 | 1. 4. 30 — | 47. 41 — | 6 | 34 | |
| | 10. 55. 54 | 217. 20. 35 | 26. 41. 7 | 2. 37. 15 + | 10. 22 — | 7 | 85 | du Bouvier. |
| 12 | 9. 13. 22 | 216. 7. 20 | 26. 26. 56 | 1. 22. 0 + | 34. 39 — | 7 | 85 | déterminées. |

| 1779. | TEMPS vrai. | ASCENSION droite observée. | DÉCLINAISON Boréale observée. | DIFFÉRENCE en ascens. dr. entre la Comète & les Étoiles. | DIFFÉRENCE en déclinaif. entre la Comète & les Étoiles. | Grandeur des Étoiles. | Lettres de Bayer & N.° des Étoiles. | ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée. |
|-----------|----------------|----------------------------------|-------------------------------------|---|--|--------------------------|--|--|
| | H. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | M. S. | | | |
| Mars . 12 | 10. 38. 7 | 216. 2. 50 | 26. 15. 30 | 1. 19. 30 + | 36. 5 — | 7 | 85 | déterminées. |
| | 11. 8. 14 | 216. 1. 35 | 26. 15. 19 | 1. 18. 15 + | 36. 16 — | 7 | 85 | |
| 13 | 9. 41. 9 | 214. 48. 20 | 25. 50. 49 | 1. 30. 15 + | 30. 45 — | 7 | 81 | |
| | 10. 28. 48 | 214. 45. 57 | 25. 49. 54 | 1. 27. 52 + | 31. 40 — | 7 | 81 | |
| | 10. 35. 17 | 214. 45. 28 | 25. 49. 47 | 0. 9. 45 + | 18. 38 + | 8 | 84 | |
| | 10. 46. 58 | 214. 44. 50 | 25. 49. 39 | 1. 26. 45 + | 31. 55 — | 7 | 81 | |
| 17 | 11. 5. 47 | 209. 47. 43 | 23. 58. 18 | 1. 31. 45 + | 25. 3 + | 7 | 66 | |
| | 11. 10. 14 | 209. 46. 36 | 23. 58. 45 | 0. 16. 15 + | 22. 1 + | 8 | 70 | |
| | 11. 19. 47 | 209. 46. 44 | 23. 57. 52 | 0. 4. 52 — | 13. 51 — | 8 | 73 | |
| | 11. 26. 40 | 209. 46. 13 | 23. 58. 6 | 1. 30. 15 + | 24. 51 + | 7 | 66 | |
| | 14. 15. 48 | 209. 38. 13 | 23. 54. 34 | 1. 22. 15 + | 21. 19 + | 7 | 66 | |
| | 14. 41. 48 | 209. 37. 13 | 23. 54. 22 | 1. 21. 15 + | 21. 7 + | 7 | 66 | |
| 21 | 9. 36. 18 | 205. 21. 57 | 22. 7. 51 | 0. 33. 15 + | 13. 55 — | 6 | 6 | |
| | 9. 44. 48 | 205. 21. 27 | 22. 7. 43 | 0. 32. 45 + | 14. 3 — | 6 | 6 | |
| | 10. 5. 21 | 205. 20. 12 | 22. 7. 14 | 4. 19. 30 + | 20. 15 + | 8 | 53 | |
| | 10. 22. 2 | 204. 16. 12 | 21. 38. 25 | 0. 32. 30 — | 43. 21 — | 6 | 6 | |
| 22 | 10. 40. 53 | 204. 15. 57 | 21. 38. 17 | 0. 32. 45 — | 43. 29 — | 6 | 6 | du Bouvier. |
| | 10. 49. 39 | 204. 15. 27 | 21. 38. 11 | 0. 33. 15 — | 43. 35 — | 6 | 6 | |
| | 11. 6. 23 | 204. 15. 24 | 21. 37. 16 | 1. 43. 0 + | 32. 40 + | 6 | 1 | |
| | 11. 13. 34 | 204. 14. 12 | 21. 37. 40 | 0. 34. 30 — | 44. 6 — | 6 | 6 | |
| | 9. 6. 32 | 203. 18. 39 | 21. 11. 16 | 0. 46. 15 + | 6. 40 + | 6 | 1 | |
| 23 | 9. 17. 1 | 203. 17. 54 | 21. 11. 13 | 0. 45. 30 + | 6. 37 + | 6 | 1 | Arcturus. du Bouvier |
| | 9. 59. 50 | 203. 16. 9 | 21. 10. 24 | 0. 43. 45 + | 5. 48 + | 6 | 1 | |
| | 8. 44. 11 | 202. 19. 35 | 20. 43. 37 | 9. 5. 0 — | 23. 28 + | 1 | 2 | |
| | 9. 23. 31 | 202. 18. 24 | 20. 42. 55 | 0. 14. 0 — | 21. 41 — | 6 | 1 | |
| 24 | 9. 26. 34 | 202. 17. 50 | 20. 42. 54 | 9. 6. 45 — | 22. 45 + | 1 | 2 | Arcturus. du Bouvier. |
| | 10. 6. 20 | 202. 16. 39 | 20. 42. 5 | 0. 15. 45 — | 22. 31 — | 6 | 1 | Arcturus. déterminée. |
| | 8. 5. 57 | 201. 22. 50 | 20. 16. 19 | 10. 1. 45 — | 3. 50 — | 1 | 2 | Arcturus. déterminée. |
| | 8. 5. 57 | 201. 22. 54 | 20. 16. 26 | 1. 9. 30 — | 3. 13 — | 7 | 56 | Arcturus. déterminées. |
| 25 | 8. 51. 31 | 201. 21. 13 | 20. 15. 29 | 10. 3. 22 — | 4. 40 — | 1 | 2 | déterminées. |
| | 8. 51. 31 | 201. 21. 9 | 20. 15. 34 | 1. 11. 15 — | 4. 5 — | 7 | 56 | |
| | 10. 13. 32 | 201. 18. 24 | 20. 13. 53 | 1. 14. 0 — | 5. 46 — | 7 | 56 | |
| | 8. 19. 17 | 200. 26. 40 | 19. 47. 39 | 5. 36. 40 — | 16. 56 + | 3 | 7 | |
| 26 | 8. 44. 58 | 200. 25. 35 | 19. 47. 28 | 10. 59. 0 — | 32. 41 — | 1 | 2 | du Bouvier. |
| | 9. 33. 11 | 200. 23. 6 | 19. 46. 39 | 5. 40. 15 — | 15. 51 + | 3 | 7 | Arcturus. du Bouvier. |
| | 7. 46. 21 | 199. 33. 28 | 19. 20. 53 | 2. 33. 30 — | 2. 53 — | 7 | 55 | déterminée. |
| | 7. 46. 21 | 199. 33. 36 | 19. 21. 7 | 6. 29. 45 — | 9. 41 — | 3 | 7 | du Bouvier. |
| 27 | 8. 38. 10 | 199. 31. 21 | 19. 19. 50 | 4. 41. 45 + | 37. 22 + | 5 | 42 | cheval de Bérénice |
| | 8. 38. 10 | 199. 31. 29 | 19. 19. 51 | 3. 59. 15 + | 0. 50 — | | | par la néb. de Bérén. |
| | 9. 26. 13 | 199. 29. 44 | 19. 19. 0 | 6. 33. 37 — | 11. 48 — | 3 | 7 | du Bouvier. |
| | 9. 26. 13 | 199. 29. 43 | 19. 19. 9 | 6. 37. 15 — | 11. 46 — | 7 | 55 | déterminée. |

| 1779. | T E M P S vrai. | ASCENSION droite observée. | DÉCLINAISON Boréale observée. | DIFFÉRENCE en ascens. dr. entre la Comète & les Étoiles. | DIFFÉRENCE en déclinaif. entre la Comète & les Étoiles. | Grandeur de l'étoile. | Lettre de Bayer, & N.° des Étoiles. | É T O I L E S avec lesquelles la Comète a été comparée. |
|---------|--------------------|----------------------------------|-------------------------------------|---|--|--------------------------|--|--|
| | H. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | M. S. | | | |
| Mars 28 | 8. 49. 24 | 198. 38. 6 | 18. 52. 26 | 3. 48. 30 + | 9. 58 + | 5 | 42 | de Bérénice. |
| | 10. 4. 20 | 198. 35. 43 | 18. 50. 41 | 3. 46. 7 + | 8. 13 + | 5 | 42 | |
| | 10. 4. 20 | 198. 35. 36 | 18. 50. 34 | 3. 30. 22 + | 30. 7 — | ... | ... | nébul. de Bérénice. |
| | 10. 29. 59 | 198. 34. 46 | 18. 49. 54 | 3. 45. 10 + | 7. 26 + | 5 | 42 | |
| | 29 10. 28. 21 | 197. 43. 59 | 18. 22. 47 | 2. 18. 30 + | 19. 22 — | 8 | 40 | de Bérénice. déterminée. |
| | 10. 44. 47 | 197. 43. 36 | 18. 22. 30 | 2. 54. 0 + | 19. 58 — | 5 | 42 | |
| | 30 9. 21. 11 | 196. 57. 10 | 17. 57. 27 | 2. 12. 0 + | 4. 57 — | 7 | 37 | |
| | 10. 3. 22 | 196. 55. 40 | 17. 56. 32 | 2. 10. 130 + | 5. 52 — | 7 | 37 | |
| | 31 12. 23. 27 | 196. 3. 45 | 17. 27. 22 | 0. 4. 30 — | 4. 33 + | 8 | 42 | |
| | 12. 34. 14 | 196. 3. 55 | 17. 26. 58 | 1. 18. 45 + | 35. 26 — | 7 | 37 | |
| Avril 1 | 12. 44. 34 | 196. 3. 15 | 17. 26. 59 | 0. 5. 0 — | 4. 10 + | 8 | 42 | |
| | 7. 18. 51 | 195. 27. 40 | 17. 6. 30 | 0. 6. 0 + | 12. 44 — | 8 | 39 | |
| | 7. 51. 43 | 195. 27. 33 | 17. 6. 3 | 0. 39. 30 + | 14. 34 — | 8 | 38 | |
| au Mér. | 9. 17. 55 | 195. 24. 10 | 17. 4. 14 | 0. 2. 30 + | 15. 0 — | 8 | 39 | |
| | 12. 16. 5 | 195. 18. 25 | 17. 1. 19 | 0. 3. 15 — | 17. 55 — | 8 | 39 | déterminées. |
| | 7. 55. 35 | 194. 42. 26 | 16. 39. 30 | 0. 18. 35 + | 1. 55 — | 8 | 36 | |
| 2 | 8. 3. 38 | 194. 42. 21 | 16. 39. 15 | 0. 18. 30 + | 2. 10 — | 8 | 36 | |
| | 12. 1. 4 | 194. 34. 38 | 16. 34. 54 | 0. 10. 47 + | 6. 31 — | 8 | 36 | |
| | 12. 9. 38 | 194. 34. 36 | 16. 34. 44 | 0. 10. 45 + | 6. 41 — | 8 | 36 | |
| au Mér. | 8. 20. 33 | 193. 58. 59 | 16. 13. 0 | 0. 24. 52 — | 28. 25 — | 8 | 36 | |
| | 8. 54. 40 | 193. 57. 59 | 16. 12. 8 | 0. 25. 52 — | 29. 17 — | 8 | 36 | |
| | 11. 46. 48 | 193. 53. 21 | 16. 9. 21 | 0. 30. 30 — | 32. 4 — | 8 | 36 | |
| au Mér. | 12. 3. 17 | 193. 52. 36 | 16. 9. 11 | 0. 31. 15 — | 32. 14 — | 8 | 36 | |
| | 12. 3. 17 | 193. 52. 28 | 16. 8. 49 | 0. 5. 45 + | 5. 56 + | 9 | 34 | |
| | 8. 50. 47 | 193. 16. 54 | 15. 46. 48 | 3. 48. 52 + | 26. 32 + | 6 | 29 | de Bérénice. déterminée. |
| 4 | 8. 50. 47 | 193. 16. 55 | 15. 46. 48 | 0. 32. 52 — | 8. 34 — | 8 | 35 | |
| | 8. 53. 8 | 192. 37. 32 | 15. 21. 39 | 18. 10. 30 + | 26. 48 — | 2 | β | du Lion. déterminée. |
| | 9. 21. 16 | 192. 37. 9 | 15. 20. 56 | 1. 32. 15 + | 11. 54 — | 7 | 30 | |
| au Mér. | 11. 50. 42 | 192. 32. 2 | 15. 18. 55 | 3. 4. 0 + | 1. 21 — | 6 | 29 | |
| | 8. 18. 6 | 192. 0. 2 | 14. 57. 44 | 2. 32. 0 + | 22. 32 — | 6 | 29 | |
| | 8. 18. 6 | 192. 0. 2 | 14. 57. 49 | 2. 41. 45 + | 11. 32 + | 7 | 28 | de Bérénice. |
| au Mér. | 11. 44. 38 | 191. 56. 2 | 14. 54. 26 | 2. 28. 0 + | 25. 50 — | 6 | 29 | |
| | 11. 44. 38 | 191. 56. 2 | 14. 54. 21 | 2. 37. 45 + | 8. 4 + | 7 | 28 | |
| | 8. 30. 28 | 191. 24. 17 | 14. 33. 20 | 2. 6. 0 + | 12. 57 — | 7 | 28 | |
| 9 | 8. 6. 59 | 190. 16. 40 | 13. 45. 59 | 0. 25. 37 — | 8. 13 + | 6 | 29 | |
| | 8. 44. 11 | 190. 15. 47 | 13. 45. 49 | 0. 26. 30 — | 8. 3 + | 6 | 29 | |
| | 13 8. 38. 11 | 188. 15. 23 | 12. 15. 50 | 2. 15. 30 + | 30. 26 — | 8 | 16 | déterminées. |
| 10 | 10. 36. 42 | 188. 13. 8 | 12. 14. 21 | 2. 13. 15 + | 31. 55 — | 8 | 16 | |
| | 11. 4. 16 | 188. 12. 38 | 12. 13. 16 | 4. 35. 15 — | 4. 13 + | 3 | 1 | de la Vierge. |
| | 14 8. 28. 20 | 187. 49. 8 | 11. 54. 10 | 4. 58. 45 — | 14. 53 — | 3 | 1 | |
| 15 | 8. 28. 20 | 187. 49. 2 | 11. 54. 10 | 0. 8. 30 + | 26. 35 + | 5 | 2 | |

| 1779. | TEMPS vrai. | ASCENSION droite observée. | DÉCLIN. Boréale observée. | DIFFÉRENCE en ascenl. dr. entre la Comète & les Étoiles. | DIFFÉRENCE en déclinaif. entre la Comète & les Étoiles. | Grandeur des Étoiles. | Lettes de Bayer, & N.° des Étoiles. | ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée. |
|----------|----------------|----------------------------------|---------------------------------|---|--|--------------------------|--|---|
| | H. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | M. S. | | | |
| Avril 14 | 10. 2. 28 | 187. 47. 38 | 11. 53. 13 | 5. 0. 15 — | 15. 50 — | 3 | e | de la Vierge. |
| | 10. 2. 28 | 187. 47. 32 | 11. 53. 19 | 0. 7. 9 + | 25. 44 + | 5 | p | |
| au Mér. | 10. 58. 50 | 187. 46. 38 | 11. 52. 17 | 5. 1. 15 — | 16. 46 — | 3 | e | |
| | 10. 58. 50 | 187. 46. 32 | 11. 52. 13 | 0. 6. 0 + | 24. 38 + | 5 | p | |
| 15 | 9. 48. 22 | 187. 22. 17 | 11. 32. 22 | 0. 18. 15 — | 4. 47 + | 5 | p | |
| au Mér. | 10. 54. 19 | 187. 20. 32 | 11. 31. 37 | 0. 20. 0 — | 4. 2 + | 5 | p | |
| 17 | 8. 18. 52 | 186. 36. 17 | 10. 52. 29 | 1. 4. 15 — | 35. 6 — | 5 | p | déterminées. |
| | 8. 30. 6 | 186. 36. 2 | 10. 52. 10 | 1. 4. 30 — | 35. 25 — | 5 | p | |
| au Mér. | 10. 42. 57 | 186. 35. 2 | 10. 50. 51 | 1. 5. 30 — | 36. 44 — | 5 | p | |
| 18 | 9. 55. 26 | 186. 14. 17 | 10. 31. 55 | 1. 25. 45 — | 34. 20 — | 8 | 20 | |
| | 10. 10. 10 | 186. 14. 17 | 10. 31. 54 | 1. 23. 22 + | 25. 6 — | 8 | 10 | |
| au Mér. | 10. 37. 33 | 186. 13. 40 | 10. 31. 47 | 1. 22. 45 + | 25. 13 — | 8 | 10 | |
| 19 | 9. 50. 57 | 185. 52. 25 | 10. 12. 48 | 0. 36. 52 — | 11. 11 + | 8 | 17 | par la néb. de la m. déterminée. par la néb. de la m. de la Vierge. déterminée. |
| 20 | 9. 49. 41 | 185. 33. 10 | 9. 53. 37 | 0. 56. 7 — | 8. 0 — | 8 | 17 | |
| au Mér. | 10. 27. 47 | 185. 32. 25 | 9. 52. 58 | 0. 56. 52 — | 8. 39 — | 8 | 17 | |
| 21 | 10. 1. 8 | 185. 13. 47 | 9. 34. 55 | 1. 15. 30 — | 26. 42 — | 8 | 17 | |
| 22 | 10. 23. 46 | 184. 55. 32 | 9. 16. 32 | 0. 6. 45 — | 25. 49 + | 7 | 11 | |
| | 10. 23. 46 | 184. 56. 15 | 9. 16. 3 | 0. 17. 45 + | 1. 39 + | ... | ... | |
| 23 | 9. 35. 23 | 184. 40. 17 | 8. 59. 16 | 0. 21. 0 — | 8. 33 + | 7 | 11 | par la néb. de la m. déterminée. par la néb. de la m. de la Vierge. déterminée. |
| | 9. 35. 23 | 184. 40. 15 | 8. 59. 37 | 0. 1. 45 + | 14. 57 — | ... | ... | |
| Mai 11 | 10. 15. 3 | 181. 51. 8 | 4. 20. 6 | 0. 26. 15 — | 12. 42 — | 4 | c | |
| 15 | 9. 56. 7 | 181. 44. 8 | 3. 28. 29 | 1. 4. 15 + | 1. 15 — | 6 | 2 | |
| 17 | 9. 55. 58 | 181. 41. 35 | 3. 4. 0 | 1. 1. 42 + | 25. 44 — | 6 | 2 | |

346 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

TABLE II. Des Ascensions droites & des Déclinaisons des Étoiles avec lesquelles la Comète a été comparée. Leurs positions sont réduites au temps des Observations.

| ASCENSION droite des Étoiles. | DÉCLINAISON Boréale des Étoiles. | Grandeur des Étoiles. | Letres de Bayer, & N.° des Étoiles. | NOMS DES ÉTOILES qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète. |
|-------------------------------------|--|--------------------------|--|---|
| D. M. S. | D. M. S. | | | |
| 174. 27. 2 | 15. 48. 27 | 2 | β | du Lion, <i>Connoissance des Temps</i> , qui a servi à la détermination de plusieurs Étoiles. |
| 181. 12. 2 | 16. 7. 50 | 5 | 6 | de la chevelure de Bérénice, comparée à β du Lion. |
| 182. 17. 23 | 4. 32. 48 | 4 | c | de la Vierge, <i>Éphémérides de la Caille</i> , Comète comparée le 11 Mai. |
| 182. 29. 48 | 6. 32. 16 | 6 | 17 | de la Vierge, Flamsteed. |
| 185. 27. 55 | 11. 31. 14 | 7 | 20 | de la Vierge, Flamsteed, comparée à ρ de la Vierge. |
| 187. 36. 48 | 11. 38. 44 | 7 | 27 | de la Vierge, comparée à la 15. ^e déterminée. |
| 187. 40. 32 | 11. 27. 35 | 5 | 9 | de la Vierge, comparée plusieurs fois à s, Comète comparée les 14, 15 & 17 Avril. |
| 188. 47. 32 | 10. 46. 59 | 7 | 33 | de la Vierge, comparée à la 20. ^e déterminée. |
| 189. 18. 17 | 10. 46. 17 | 7 | 28 | de Bérénice, comparée à la 29. ^e déterminée, Comète comparée les 6 & 7 Avril. |
| 189. 28. 2 | 15. 20. 16 | 6 | 29 | de Bérénice, comparée à β du Lion, Comète comparée les 4, 5 & 6 Avril. |
| 192. 47. 53 | 12. 98. 3 | 3 | e | de la Vierge, <i>Connoissance des Temps</i> . |
| 194. 49. 36 | 18. 42. 28 | 5 | 42 | de Bérénice, comparée à la 55. ^e déterminée, Comète comparée les 27, 28 & 29 Mars. |
| 202. 32. 24 | 21. 4. 36 | 6 | 1 | 1. ^{re} du Bouvier, comparée à la 53. ^e & à <i>Arcturus</i> , Comète comparée les 22, 23 & 24 Mars. |
| 204. 12. 14 | 18. 34. 7 | 4 | τ | du Bouvier, comparée à celle n.° 7 du Bouvier, Flamsteed. |
| 204. 48. 42 | 22. 21. 46 | 6 | 6 | du Bouvier, comparée à e, Comète comparée les 21 & 22 Mars. |
| 205. 40. 54 | 19. 1. 52 | 7 | 7 | du Bouvier, comparée à η du Bouvier. |
| 206. 3. 21 | 19. 30. 48 | 3 | η | du Bouvier, comparée à la 79. ^e déterminée Comète comparée les 26 & 27 Mars. |
| 207. 4. 12 | 22. 46. 24 | 6 | e | du Bouvier, comparée à la 64. ^e déterminée. |
| 210. 4. 39 | 26. 9. 30 | 5 | d | du Bouvier, comparée à la 76. ^e déterminée. |
| 211. 24. 35 | 20. 20. 9 | 1 | α | <i>Arcturus</i> , <i>Astronomie-nautique</i> , Comète comparée les 24, 25 & 26 Mars. |
| 218. 25. 45 | 27. 28. 50 | 6 | 34 | du Bouvier, comp. 28, Comète comparée les 10 & 11 Mars. |
| 218. 50. 14 | 28. 0. 56 | 3 | 8 | du Bouvier, <i>Connoissance des Temps</i> , Comète comparée les 6, 7, 8 & 9 Mars. |

| ASCENSION droite. | DÉCLINAISON des ÉTOILES. | Grandeur des Étoiles. | Lettes de Bayer, & N.° des Étoiles. | NOMS DES ÉTOILES qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète. |
|----------------------|--------------------------------|--------------------------|--|---|
| D. M. S. | D. M. S. | | | |
| 223. 45. 0 | 27. 49. 7 | 5 | ↓ ° | du Bouvier , comparée à 1, Comète comparée les 7 & 8 Mars. |
| 226. 18. 59 | 29. 58. 36 | 5 | χ | du Bouvier , comparée à la 97.° déterminée. |
| 227. 44. 59 | 30. 24. 55 | 5 | o | de la Couronne , comparée à β , Comète comparée le 3 Mars. |
| 229. 41. 6 | 29. 51. 58 | 4 | β | de la Couronne , comparée à 1, Comète comparée les 28 Février, 1, 2, 3, 4 & 5 Mars. |
| 238. 9. 6 | 30. 29. 18 | 5 | ! | de la Couronne , comparée à ξ , Comète comparée les 26, 27, 28 Février & 1.° Mars. |
| 243. 22. 32 | 31. 25. 6 | 5 | ξ | Couronne , comparée à ζ d'Hercule , Comète comp. le 25 Février. |
| 243. 36. 55 | 32. 51. 38 | 5 | 23 | d'Hercule , comparée à ζ ; Comète comparée les 19 & 21 Février matin. |
| 244. 53. 2 | 33. 12. 10 | 6 | 26 | d'Hercule , comparée à ζ , Comète comparée les 19 & 21 Février matin. |
| 248. 14. 47 | 32. 0. 43 | 3 | ζ | d'Hercule , Comète comparée les 18, 19 & 21 Février matin. |
| 253. 21. 39 | 33. 53. 28 | 6 | d | d'Hercule , Comète comparée le 14 Février matin. |
| 257. 16. 57 | 33. 20. 50 | 5 | u | d'Hercule , comparée à 1, Comète comparée le 9 Février matin. |
| 258. 5. 18 | 32. 45. 45 | 6 | 72 | d'Hercule , comparée à 1 d'Hercule. |
| 280. 23. 12 | 32. 34. 23 | 6 | 1° | de la Lyre , comparée à 1°, Comète comparée le 25 Janvier matin. |
| 280. 24. 27 | 32. 18. 39 | 6 | 1° | de la Lyre , comparée à 2°, Comète comparée le 25 Janvier matin. |
| 280. 28. 53 | 33. 7. 14 | 4 | β | de la Lyre , <i>Connaissance des Temps</i> , Com. comparée le 31 Janvier matin. |
| 282. 40. 12 | 32. 23. 58 | 3 | 2° | de la Lyre , <i>Connaissance des Temps</i> , Comète comparée les 24 & 25 Janvier matin. |
| 282. 55. 24 | 31. 51. 4 | 6 | λ | de la Lyre , comparée à 2°, Comète comparée les 23, 24 & 25 Janvier matin. |
| 288. 51. 31 | 29. 12. 5 | 5 | 2 | du Cygne , Flamsteed , Comète comparée le 19 Janvier matin. |
| 179. 29. 47 | 16. 3. 53 | 1 | 7 | déterminée par β du Lion. |
| 180. 39. 53 | 3. 29. 44 | 2 | 6 | déterminée par le n.° 7 , Comète comparée les 15 & 17 Mai. |
| 181. 37. 47 | 16. 22. 33 | 3 | 6 | déterminée par β du Lion. |
| 181. 40. 8 | 2. 48. 26 | 4 | 6 | déterminée par le n.° 2. |
| 181. 45. 53 | 4. 20. 6 | 5 | 7 | déterminée par l'étoile c de la Vierge. |
| 182. 25. 43 | 5. 46. 9 | 6 | 9 | déterminée par le n.° 8. |

X x ij

| ASCENSION droite. | DÉCLINAISON des ÉTOILES. | Grandeur des Étoiles. | Latitudes de Bayr. & N.° des Étoiles. | NOMS DES ÉTOILES qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète. |
|----------------------|--------------------------------|--------------------------|--|--|
| D. M. S. | D. M. S. | | | |
| 182. 32. 53 | 3. 57. 42 | 7 | 8 | déterminée par ϵ de la Vierge. |
| 182. 44. 43 | 6. 5. 1 | 8 | 8 | déterminée par la 17.° de la Vierge. |
| 184. 6. 47 | 9. 50. 51 | 9 | 7 | déterminée par le n.° 17. |
| 184. 50. 55 | 10. 57. 0 | 10 | 8 | déterminée par ρ de la Vierge, Comète comparée le 18 Avril. |
| 185. 2. 17 | 8. 50. 43 | 11 | 7 | déterminée par le n.° 12, Comète comparée les 22 & 23 Avril. |
| 185. 33. 17 | 9. 11. 17 | 12 | 8 | déterminée par le n.° 17. |
| 185. 35. 32 | 8. 54. 56 | 13 | 7 | déterminée par le n.° 12. |
| 185. 49. 32 | 8. 58. 32 | 14 | 7 | déterminée par le n.° 12. |
| 185. 55. 23 | 12. 3. 43 | 15 | 8 | déterminée par le n.° 26. |
| 185. 59. 53 | 12. 46. 16 | 16 | 8 | déterminée par le n.° 21, Com. comp. le 13 Avril. |
| 186. 29. 17 | 10. 1. 37 | 17 | 8 | déterminée par la 33.° de la Vierge, Com. comp. les 19, 20 & 21 Avril. |
| 187. 26. 2 | 10. 3. 23 | 18 | 8 | déterminée par le n.° 17. |
| 187. 30. 17 | 16. 36. 49 | 19 | 8 | déterminée par la 6.° de Bérénice, suiv. Flamsteed. |
| 187. 40. 2 | 11. 6. 15 | 20 | 8 | déterminée par ρ de la η , Com. comp. le 18 Avril. |
| 188. 13. 23 | 12. 8. 17 | 21 | 8 | déterminée par ϵ de la Vierge, Comète comparée les 13 & 14 Avril avec ϵ . |
| 188. 49. 40 | 10. 30. 15 | 22 | 8 | déterminée par le n.° 20. |
| 188. 58. 32 | 10. 16. 54 | 23 | 8 | déterminée par le n.° 17. |
| 189. 2. 3 | 13. 10. 23 | 24 | 7 | déterminée par le n.° 29. |
| 189. 2. 17 | 16. 47. 56 | 25 | 6 | déterminée par la 6.° de Bérénice, suivant Flamsteed. |
| 189. 26. 8 | 13. 19. 8 | 26 | 8 | déterminée par le n.° 24. |
| 190. 29. 47 | 16. 14. 2 | 27 | 8 | déterminée par la 6.° de Bérénice. |
| 190. 32. 32 | 13. 40. 29 | 28 | 8 | déterminée par le n.° 24. |
| 190. 42. 17 | 13. 37. 46 | 29 | 6 | déterminée par le n.° 33, Com. comp. le 9 Avril. |
| 191. 4. 54 | 15. 32. 50 | 30 | 7 | déterminée par β du Lion, Com. comp. le 5 Avril. |
| 191. 7. 32 | 13. 54. 32 | 31 | 8 | déterminée par le n.° 33. |
| 192. 21. 7 | 15. 2. 58 | 32 | 8 | déterminée par la 29.° de Bérénice, suiv. Flamsteed. |
| 192. 36. 47 | 14. 22. 19 | 33 | 8 | déterminée par la 28.° de Bérénice. |
| 193. 46. 43 | 16. 2. 53 | 34 | 9 | déterminée par le n.° 35. |
| 193. 49. 47 | 15. 55. 22 | 35 | 8 | déterminée par la 29.° de Bérénice, & β du Lion, Comète comparée le 4 Avril. |
| 194. 23. 51 | 16. 41. 25 | 36 | 8 | déterminée par le n.° 38, par α de η & β du Lion, Comète comparée les 2 & 3 Avril. |
| 194. 45. 10 | 18. 2. 24 | 37 | 7 | déterminée par la 42.° de Bérénice, Comète comp. les 30 & 31 Mars. |

| ASCENSION droite. | DÉCLINAISON des ÉTOILES. | Gradient des Étoiles. | Lignes de Boyer, à N.° des Étoiles. | NOMS DES ÉTOILES qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète. |
|----------------------|--------------------------------|--------------------------|--|---|
| D. M. S. | D. M. S. | | | |
| 194. 48. 3 | 17. 20. 37 | 38 | 8 | déterminée par le n.° 37, Com. comp. le 1. ^{er} Avril, |
| 195. 21. 40 | 17. 19. 14 | 39 | 8 | déterminée par le n.° 37, Com. comp. le 1. ^{er} Avril, |
| 195. 25. 29 | 18. 42. 9 | 40 | 8 | déterminée par la 42. ^e de Bérénice, Com. comp. le 29 Mars. |
| 195. 34. 43 | 16. 30. 17 | 41 | 8 | déterminée par le n.° 36. |
| 196. 8. 15 | 17. 22. 49 | 42 | 8 | déterminée par le n.° 37, Com. comp. le 31 Mars. |
| 196. 26. 6 | 18. 28. 44 | 43 | 8 | déterminée par la 42. ^e de Bérénice, suiv. Flamsteed. |
| 196. 29. 6 | 18. 12. 48 | 44 | 8 | déterminée par le n.° 37. |
| 196. 42. 6 | 18. 28. 6 | 45 | 8 | déterminée par la 42. ^e de Bérénice. |
| 197. 23. 6 | 18. 56. 27 | 46 | 8 | déterminée par la 42. ^e de Bérénice. |
| 197. 25. 51 | 18. 44. 43 | 47 | 8 | déterminée par la 42. ^e de Bérénice. |
| 197. 44. 14 | 17. 15. 41 | 48 | 8 | déterminée par la 42. ^e de Bérénice. |
| 197. 46. 36 | 18. 55. 49 | 49 | 8 | déterminée par la 42. ^e de Bérénice. |
| 198. 11. 2 | 18. 27. 42 | 50 | 8 | déterminée par la 42. ^e de Bérénice. |
| 198. 14. 2 | 18. 29. 7 | 51 | 8 | déterminée par la 42. ^e de Bérénice. |
| 200. 54. 5 | 19. 40. 10 | 52 | 8 | déterminée par η du Bouvier. |
| 201. 0. 42 | 21. 46. 59 | 53 | 8 | déterminée par la 6. ^e du Bouvier, Comète comp. le 21 Mars. |
| 201. 8. 12 | 21. 55. 15 | 54 | 8 | déterminée par le n.° 53. |
| 202. 6. 58 | 19. 23. 46 | 55 | 7 | déterminée par η du Bouvier, Comète comparée le 27 Mars. |
| 202. 32. 24 | 20. 19. 39 | 56 | 7 | déterminée par la 1. ^{re} du Bouvier, & <i>Arcturus</i> , Comète comparée le 25 Mars. |
| 202. 32. 27 | 21. 8. 27 | 57 | 8 | déterminée par le n.° 53. |
| 203. 38. 12 | 21. 35. 18 | 58 | 8 | déterminée par la 1. ^{re} du Bouvier, suiv. Flamsteed. |
| 203. 38. 42 | 19. 31. 40 | 59 | 8 | déterminée par η du Bouvier. |
| 204. 54. 17 | 19. 46. 44 | 60 | 7 | déterminée par la même η . |
| 204. 58. 27 | 22. 22. 23 | 61 | 9 | déterminée par la 6. ^e du Bouvier. |
| 204. 59. 12 | 22. 22. 28 | 62 | 9 | déterminée par la même 6. ^e |
| 207. 40. 36 | 23. 2. 42 | 63 | 7 | déterminée par l'étoile ϵ du Bouvier. |
| 207. 54. 25 | 22. 37. 16 | 64 | 8 | déterminée par le n.° 65. |
| 207. 59. 44 | 21. 57. 20 | 65 | 8 | déterminée par le n.° 69. |
| 208. 15. 58 | 23. 23. 15 | 66 | 7 | déterminée par le n.° 63, Com. comp. le 17 Mars. |
| 208. 32. 36 | 20. 14. 52 | 67 | 8 | déterminée par η du Bouvier. |
| 208. 51. 14 | 23. 47. 12 | 68 | 8 | déterminée par le n.° 66. |
| 209. 29. 20 | 22. 14. 37 | 69 | 8 | déterminée par le n.° 75. |
| 209. 30. 21 | 23. 36. 44 | 70 | 8 | déterminée par le n.° 66, Com. comp. le 17 Mars. |

350 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

| ASCENSION droite. | DÉCLINAISON des ÉTOILES. | Grandeur des Étoiles. | Letres de Bayer, le N.° des Étoiles. | NOMS DES ÉTOILES qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète. |
|----------------------|--------------------------------|--------------------------|---|---|
| D. M. S. | D. M. S. | | | |
| 209. 31. 56 | 25. 23. 17 | 71 | 7 | déterminée par le n.° 76. |
| 209. 48. 58 | 21. 31. 16 | 72 | 8 | déterminée par le n.° 75. |
| 209. 51. 36 | 24. 11. 43 | 73 | 8 | déterminée par le n.° 66, Com. comp. le 17 Mars. |
| 210. 14. 58 | 23. 43. 49 | 74 | 7 | déterminée par le n.° 70. |
| 210. 28. 35 | 21. 40. 57 | 75 | 7 | déterminée par le n.° 80. |
| 210. 54. 10 | 25. 49. 51 | 76 | 8 | déterminée par le n.° 82. |
| 211. 11. 39 | 20. 56. 1 | 77 | 8 | déterminée par <i>Arcturus</i> . |
| 211. 14. 3 | 24. 44. 24 | 78 | 7 | déterminée par le n.° 71. |
| 211. 26. 7 | 19. 56. 44 | 79 | 7 | déterminée par <i>Arcturus</i> . |
| 211. 34. 50 | 21. 9. 12 | 80 | 7 | déterminée par le n.° 77. |
| 211. 45. 58 | 25. 23. 0 | 81 | 7 | déterminée par le n.° 71, la déclinaison estimée. |
| 213. 18. 5 | 26. 21. 34 | 82 | 7 | déterminée par le n.° 85, Com. comp. le 13 Mars. |
| 213. 27. 50 | 24. 44. 12 | 83 | 7 | déterminée par le n.° 71. |
| 214. 35. 43 | 25. 31. 9 | 84 | 8 | déterminée par le n.° 86, Com. comp. le 13 Mars. |
| 214. 43. 20 | 26. 51. 35 | 85 | 7 | déterminée par s du Bouvier, Comète comparée les 11 & 12 Mars. |
| 215. 8. 35 | 26. 5. 30 | 86 | 8 | déterminée par le n.° 82. |
| 215. 38. 30 | 27. 40. 38 | 87 | 7 | déterminée par le n.° 85, déclinaison estimée. |
| 218. 0. 55 | 26. 56. 28 | 88 | 8 | déterminée par la 34.° du Bouvier, Comète comp. le 11 Mars. |
| 219. 6. 44 | 28. 28. 12 | 89 | 8 | déterminée par s du Bouvier. |
| 220. 48. 14 | 28. 24. 37 | 90 | 8 | déterminée par le n.° 89. |
| 220. 49. 6 | 27. 22. 55 | 91 | 7 | déterminée par s du Bouvier. |
| 222. 9. 40 | 27. 42. 53 | 92 | 8 | déterminée par la même s. |
| 222. 35. 14 | 28. 2. 41 | 93 | 8 | déterminée par la même s. |
| 223. 25. 14 | 29. 8. 4 | 94 | 6 | déterminée par le n.° 89. |
| 223. 34. 47 | 27. 57. 16 | 95 | 8 | déterminée par s du Bouvier, Comète comparée le 6 Mars. |
| 223. 43. 44 | 29. 56. 6 | 96 | 7 | déterminée par la 94.° |
| 224. 40. 1 | 29. 21. 57 | 97 | 8 | déterminée par β de la Couronne, Comète comp. le 2 Mars. |
| 225. 24. 14 | 20. 3. 38 | 98 | 6 | déterminée par la 97.° |
| 224. 38. 36 | 29. 54. 41 | 99 | 8 | déterminée par β de la Couronne, Comète comp. le 28 Février. |
| 233. 10. 37 | 30. 44. 32 | 100 | 7 | déterminée par le n.° 101. |
| 233. 26. 29 | 30. 50. 44 | 101 | 8 | déterminée par le n.° 105. |
| 234. 9. 21 | 30. 42. 3 | 102 | 8 | déterminée par le n.° 101. |

| ASCENSION droite. | DÉCLINAISON des ÉTOILES. | Grandeur des Étoiles. | Lettes de Bayer, & N.° des Étoiles. | NOMS DES ÉTOILES qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète. |
|----------------------|--------------------------------|--------------------------|--|---|
| D. M. S. | D. M. S. | | | |
| 234. 53. 36 | 30. 35. 20 | 103 | 8 | déterminée par α de la Couronne, Comète comp. le 27 Février. |
| 235. 47. 6 | 31. 16. 39 | 104 | 7 | déterminée par le n.° 101. |
| 235. 47. 14 | 30. 33. 44 | 105 | 8 | déterminée par α de la Couronne, Comète comp. les 26 & 27 Février. |
| 236. 37. 51 | 30. 10. 48 | 106 | 7 | déterminée par β de la Couronne. |
| 237. 28. 44 | 30. 39. 11 | 107 | 8 | déterminée par α de la Couronne, Comète comp. les 26 & 28 Février. |
| 237. 32. 51 | 30. 3. 47 | 108 | 7 | déterminée par β de la Couronne. |
| 237. 37. 2 | 31. 1. 28 | 109 | 8 | déterminée par ξ de la Couronne, ξ & ζ d'Hercule, Comète comparée le 25 Février. |
| 239. 24. 36 | 30. 30. 59 | 110 | 8 | déterminée par α de la Couronne. |
| 242. 56. 47 | 31. 2. 57 | 111 | 8 | déterminée par ξ de la Couronne. |
| 244. 26. 40 | 32. 35. 20 | 112 | 8 | déterminée par la 23.° d'Hercule, suiv. Flamsteed. |
| 254. 54. 49 | 31. 30. 20 | 113 | 7 | déterminée par ϵ d'Hercule. |
| 257. 16. 34 | 31. 47. 40 | 114 | 7 | déterminée par la même ϵ . |
| 258. 12. 52 | 31. 29. 7 | 115 | 7 | déterminée par la même ϵ . |
| 258. 26. 37 | 32. 12. 32 | 116 | 8 | déterminée par la même ϵ . |
| 260. 14. 42 | 33. 56. 11 | 117 | 7 | déterminée par la même ϵ , Comète comparée le 9 Février matin. |
| 262. 39. 42 | 32. 52. 24 | 118 | 7 | déterminée par la 72.° d'Hercule. |
| 263. 46. 57 | 33. 5. 23 | 119 | 8 | déterminée par la même. |
| 264. 2. 42 | 33. 19. 32 | 120 | 7 | déterminée par la même. |
| 266. 55. 27 | 32. 42. 19 | 121 | 7 | déterminée par la même. |
| 267. 20. 23 | 33. 26. 49 | 122 | 7 | déterminée par le n.° 125, Comète comparée le 1.° Février matin. |
| 268. 8. 8 | 33. 14. 44 | 123 | 6 | déterminée par le n.° 122. |
| 268. 22. 53 | 33. 20. 3 | 124 | 6 | déterminée par la même 122. |
| 270. 55. 23 | 33. 24. 33 | 125 | 7 | déterminée par β de la Lyre, Comète comparée les 31 Mars & 1.° Février matin. |
| 271. 1. 28 | 33. 14. 56 | 126 | 8 | déterminée par le n.° 125. |
| 272. 16. 8 | 33. 27. 55 | 127 | 7 | déterminée par la même 125, Comète comparée le 31 Janvier matin. |
| 275. 47. 45 | 33. 29. 15 | 128 | 7 | déterminée par la même 125. |
| 277. 7. 53 | 33. 17. 50 | 129 | 5 | déterminée par la même 125. |
| 278. 3. 53 | 33. 29. 41 | 130 | 7 | déterminée par la même 125. |
| 280. 6. 0 | 33. 32. 3 | 131 | 7 | déterminée par la même 125. |
| 280. 19. 23 | 33. 27. 27 | 132 | 7 | déterminée par β de la Lyre. |

| ASCENSION droite. | DÉCLINAISON des ÉTOILES. | Grandeur des Étoiles. | Letres de Bayer, & N. ^o des Étoiles. | NOMS DES ÉTOILES qui ont servi à la détermination du lieu de la Comète. |
|----------------------|--------------------------------|--------------------------|--|---|
| D. M. S. | D. M. S. | | | |
| 282. 11. 12 | 32. 37. 53 | 133 | 6 | déterminée par γ de la Lyre, Comète comparée le 25 Janvier matin. |
| 284. 8. 40 | 31. 25. 38 | 134 | 6 | déterminée par λ de la Lyre, Comète comparée le 23 Janvier matin. |
| 288. 52. 39 | 27. 40. 8 | 135 | 7 | déterminée par β du Cygne. |
| 289. 15. 2 | 28. 20. 1 | 136 | 8 | déterminée par le n. ^o 135. |
| 289. 52. 32 | 29. 0. 52 | 137 | 7 | déterminée par le n. ^o 136. |
| 290. 27. 46 | 27. 30. 48 | 138 | 6 | Étoile double de β du Cygne, déterminée par β . |

*POSITIONS de quatorze Nébuleuses rapportées sur la Carte de la route
apparente de la Comète de 1779.*

| ASCENSION droite. | DÉCLINAISON des NÉBULEUSES. | Nombres | NOMS DES CONSTELLATIONS où se trouvent les Nébuleuses. |
|----------------------|-----------------------------------|---------|--|
| D. M. S. | D. M. S. | | |
| 182. 41. 5 | 5. 42. 5 | 1 | nébuleuse dans la Vierge, découverte le 11 Mai 1779. |
| 184. 26. 58 | 9. 16. 9 | 2 | dans la Vierge, découverte le 29 Février 1771, Comète comparée les 22 & 23 Avril. |
| 186. 37. 23 | 13. 2. 42 | 3 | dans la Vierge, découverte le 15 Avril 1779. |
| 187. 41. 38 | 12. 52. 36 | 4 | dans la Vierge, découverte le 15 Avril 1779. |
| 188. 6. 53 | 12. 46. 2 | 5 | dans la Vierge, découverte le 15 Avril 1779. |
| 191. 27. 38 | 22. 52. 31 | 6 | dans la chevelure de Bérénice, découverte le 1. ^{er} Mars 1780. |
| 195. 30. 26 | 19. 22. 44 | 7 | au-dessous de la chevelure de Bérénice, découverte le 27 Février 1777, Comète comparée les 27 & 28 Mars. |
| 196. 5. 30 | 43. 12. 37 | 8 | entre les Chiens de chasse, découv. par M. Méchain en 1779. |
| 202. 51. 19 | 29. 32. 57 | 9 | dans les Chiens de chasse, découverte le 3 Mai 1764. |
| 248. 18. 48 | 36. 54. 44 | 10 | à la cuisse droite d'Hercule, découverte le 1. ^{er} Juin 1764. |
| 281. 20. 8 | 32. 46. 3 | 11 | dans la Lyre, découverte le 31 Janvier 1779. |
| 287. 0. 1 | 29. 48. 14 | 12 | entre la Lyre & la tête du Cygne, découverte le 19, déterminée le 23 Janvier 1779. |
| 295. 59. 9 | 18. 13. 0 | 13 | Près de la Flèche, découv. par M. Méchain, le 28 Juin 1780. |
| 297. 21. 41 | 22. 4. 0 | 14 | dans le Renard, découverte le 12 Juillet 1764. |

J'ai

J'ai déjà publié un grand Mémoire sur les Nébuleuses & les amas d'Étoiles que l'on observe sur l'horizon de Paris. Voyez *Mém. de l'Acad. ann. 1771, p. 435*; la *Connoiss. des Temps pour 1783, page 225*; & celle de 1784, p. 227.

Je rapporterai en finissant ce Mémoire, différens élémens de cette Comète : les premiers ont été trouvés par M. le Président Bochart de Saron, Honoraire de cette Académie, d'après trois de mes observations, celles des 18 Janvier, 11 Février & 6 Mars; les deuxièmes, par M. le Chevalier d'Angos, d'après la première de mes observations de chaque jour; les troisièmes, par M. Méchain, d'après ses observations; & les quatrièmes, par M. Reggio, d'après les observations faites à Milan.

| É L É M E N S. | M. DE SARON. | M. D'ANGOS. | M. MÉCHAIN. | M. REGGIO. |
|------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------|
| | S. D. M. S. | S. D. M. S. | S. D. M. S. | S. D. M. S. |
| Lieu du nœud ascendant. | 0. 25. 3. 1 | 0. 25. 3. 57 | 0. 25. 5. 51 | 0. 25. 4. 19 |
| Inclinaison de l'orbite. | 32. 26. 14 | 32. 25. 30 | 32. 24. 0 | 32. 24. 44 |
| Lieu du périhélie dans l'orbite. . | 2. 27. 14. 0 | 2. 27. 13. 40 | 2. 27. 13. 11 | 2. 27. 12. 55 |
| Logarithme de la dist. périhélie. | 0,713218 | 0,713187 | 0,713127 | 0,712946 |
| Passage au périhélie. Janv. 1779. | 4 ^j 2 ^h 30' 0" | 4 ^j 2 ^h 24' 30" | 4 ^j 2 ^h 12' 0" | 4 ^j 2 ^h 54' 20" |
| Sens du mouvement direct. | | | | |

TABLE des Observations qui ont été employées à la recherche des Éléments, par M. le Président de Saron.

| 1779. | TEMPS moyen. | ASCENSION droite observée. | D É C L I N. Boréale observée. | LONGITUDE observée. | LONGITUDE calculée. | DIFFÉR. avec la Théorie. | LATITUDE Boréale observée. | LATITUDE Boréale calculée. | DIFFÉR. avec la Théorie |
|---------|-----------------|----------------------------------|--------------------------------------|------------------------|------------------------|--------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|-------------------------------|
| | H. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | M. S. | D. M. S. | D. M. S. | M. S. |
| inv. 18 | 18. 38. 0 | 289. 6. 46 | 29. 32. 41 | 297. 3. 35 | 297. 3. 35 | —0. 0 | 51. 13. 56 | 51. 13. 56 | —0. 0 |
| évr. 11 | 17. 34. 30 | 256. 26. 42 | 33. 34. 23 | 249. 30. 54 | 249. 30. 52 | —0. 2 | 56. 4. 55 | 56. 4. 59 | +0. 4 |
| mars. 6 | 11. 23. 0 | 224. 8. 59 | 28. 40. 15 | 210. 24. 35 | 210. 24. 35 | —0. 0 | 43. 6. 58 | 43. 6. 58 | —0. 0 |
| 26 | 8. 50. 40 | 200. 25. 35 | 19. 47. 28 | 190. 41. 4 | 190. 40. 14 | —0. 50 | 26. 11. 25 | 26. 9. 10 | —2. 15 |
| avr. 19 | 9. 49. 54 | 185. 52. 25 | 10. 12. 48 | 181. 16. 25 | 181. 17. 57 | +1. 32 | 11. 41. 51 | 11. 39. 53 | —1. 58 |
| mai. 11 | 10. 11. 6 | 181. 51. 8 | 4. 20. 6 | 180. 1. 52 | 180. 0. 17 | —1. 35 | 4. 42. 50 | 4. 41. 55 | —0. 55 |
| 17 | 9. 52. 0 | 181. 41. 3 | 3. 4. 0 | 180. 19. 58 | 180. 20. 0 | +0. 2 | 3. 29. 14 | 3. 26. 49 | —2. 25 |

Mém. 1779.

Y y.

354 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

D'après mes trois premières observations des 18, 22 & 23 Janvier, M. l'abbé Boscovich, Correspondant de l'Académie, avoit recherché les élémens de cette Comète, par la méthode graphique d'approximation, qui est très-abrégée, & qu'il a publiée dans le *VI.^e Tome des Mémoires des Savans Étrangers*. M. le Président de Saron avoit également employé la même méthode graphique, avant de faire le calcul par la méthode ordinaire; les élémens qui en sont résultés différent peu des autres: les voici.

| É L É M E N S. | M. DE SARON. | | | | M. BOSCOVICH. | | |
|------------------------------------|--------------|-----|----------------|--------------------|---------------|-----|--------------------------------|
| | S. | D. | M. | S. | S. | D. | M. |
| Lieu du nœud ascendant..... | 0. | 26. | 31. | 31 | 0. | 26. | 10 |
| Inclinaison de l'orbite..... | | | 32. | 18. | 0 | 32. | 32 |
| Lieu du périhélie dans l'orbite. . | 2. | 27. | 33. | 42 | 2. | 25. | 41 |
| Distance périhélie..... | | | 0,71 | 39 | | | 0,715 |
| Passage au périhélie, Janvier... | | | 4 ⁱ | 3 ^h 30' | | | 3 ⁱ 20 ^h |

Ces élémens, que l'on trouve promptement par trois premières observations d'une Comète, servent & abrègent de beaucoup le travail & les premiers tâtonnemens que l'on est toujours obligé de faire par les calculs de la méthode ordinaire.

M. le Chevalier d'Angos, Officier au régiment de Navarre, déjà connu avantageusement de l'Académie, m'ayant demandé les observations que j'avois faites de la Comète, pour calculer les élémens de son orbite; je lui envoyai soixante-trois observations, qui étoient la première observation faite chaque jour, prises de la Table qui précède.

Voici l'extrait de la Lettre que M. le Chevalier d'Angos m'a fait l'honneur de m'écrire.

« J'ai l'honneur de vous adresser, Monsieur, les élémens
 » que j'ai déduits des soixante-trois observations que vous avez
 » eu la bonté de me communiquer. J'y joins une Table qui

renferme le temps moyen des observations, les longitudes & «
les latitudes de la Comète, déduites des ascensions droites «
& déclinaisons que vous avez déterminées; les longitudes & «
les latitudes qui résultent de la théorie; enfin, la comparaison «
des unes & des autres. «

J'ai d'abord employé, pour avoir une orbite parabolique «
approchée, une méthode analytique assez semblable à celle «
que l'on trouve dans l'immortel Ouvrage de Newton; je suis «
revenu ensuite aux méthodes de fausses positions: j'ai fait «
différentes combinaisons pour resserrer les limites des erreurs, «
& vous verrez par la Table que j'y ai assez bien réussi. «

Nota. Dans la Table suivante, la différence des longitudes pour «
le 13 Février, va à 2' 1", & elle est dans un sens contraire à celles «
qui précèdent & qui suivent; mais aussi m'avez-vous mandé que «
cette observation est marquée *douteuse* dans votre Journal, à cause «
des nuages. »

356 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

TABLE des positions de la Comète, déduites des Observations,
& comparées aux positions calculées d'après les Éléments,
par M. le Chevalier d'Angos.

| 1779. | TEMPS | LONGITUD. | LONGITUD. | DIFFÉR. | LATITUD. | LATITUD. | DIFFÉR. | |
|-------|----------|------------|-------------|------------------|------------|------------|-------------------|---------|
| | moyen. | observées. | calculées. | des Longitud. | observées. | calculées. | des Latitudes. | |
| | H. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | M. S. | D. M. S. | D. M. S. | M. S. | |
| Janv. | 18 | 18. 19. 14 | 297. 4. 30 | 297. 5. 11 | + 0. 41 | 51. 13. 7 | 51. 13. 23 | + 0. 16 |
| | 22 | 17. 26. 16 | 290. 10. 32 | 290. 11. 38 | + 1. 6 | 53. 44. 32 | 53. 45. 20 | + 0. 48 |
| | 23 | 17. 45. 17 | 288. 17. 18 | 288. 18. 17 | + 0. 59 | 54. 17. 5 | 54. 17. 0 | - 0. 5 |
| | 24 | 17. 44. 36 | 286. 23. 10 | 286. 23. 31 | + 0. 21 | 54. 45. 13 | 54. 45. 21 | + 0. 8 |
| | 30 | 17. 14. 6 | 274. 22. 2 | 274. 21. 30 | - 0. 32 | 56. 38. 15 | 56. 38. 40 | + 0. 25 |
| | 31 | 17. 58. 54 | 272. 14. 8 | 272. 15. 1 | + 0. 53 | 56. 48. 53 | 56. 48. 15 | - 0. 38 |
| Févr. | 8 | 17. 59. 6 | 255. 35. 1 | 255. 36. 51 | + 1. 50 | 56. 41. 10 | 56. 42. 0 | + 0. 50 |
| | 10 | 17. 19. 11 | 251. 33. 32 | 251. 34. 33 | + 1. 1 | 56. 18. 52 | 56. 19. 44 | + 0. 52 |
| | 11 | 15. 5. 53 | 249. 43. 35 | 249. 45. 22 | + 1. 47 | 56. 6. 18 | 56. 7. 0 | + 0. 42 |
| | 13 | 16. 49. 14 | 245. 39. 28 | 245. 37. 27 | - 2. 1 | 55. 32. 6 | 55. 31. 55 | - 0. 11 |
| | 17 | 14. 29. 3 | 238. 3. 45 | 238. 4. 28 | + 0. 43 | 54. 4. 8 | 54. 4. 35 | + 0. 27 |
| | 18 | 16. 1. 26 | 236. 3. 55 | 236. 4. 38 | + 0. 43 | 53. 35. 25 | 53. 36. 6 | + 0. 41 |
| | 20 | 13. 4. 4 | 232. 37. 8 | 232. 37. 26 | + 0. 18 | 52. 40. 26 | 52. 41. 7 | + 0. 41 |
| | 25 | 11. 40. 56 | 223. 58. 29 | 224. 0. 9 | + 1. 40 | 49. 48. 6 | 49. 48. 1 | - 0. 5 |
| | 26 | 13. 34. 46 | 222. 13. 1 | 222. 13. 24 | + 0. 23 | 49. 5. 57 | 49. 5. 41 | - 0. 16 |
| | 27 | 11. 37. 4 | 220. 43. 13 | 220. 44. 18 | + 1. 5 | 48. 28. 8 | 48. 28. 6 | - 0. 2 |
| | 28 | 11. 28. 1 | 219. 8. 55 | 219. 9. 57 | + 1. 2 | 47. 46. 1 | 47. 45. 34 | - 0. 27 |
| Mars | 1 | 13. 56. 18 | 217. 27. 42 | 217. 27. 34 | - 0. 8 | 46. 56. 43 | 46. 57. 33 | + 0. 50 |
| | 2 | 16. 20. 56 | 215. 47. 20 | 215. 47. 38 | + 0. 18 | 46. 7. 6 | 46. 8. 14 | + 1. 8 |
| | 3 | 11. 3. 50 | 214. 38. 20 | 214. 38. 26 | + 0. 6 | 45. 31. 2 | 45. 32. 11 | + 1. 9 |
| | 4 | 10. 24. 34 | 213. 14. 24 | 213. 14. 14 | - 0. 10 | 44. 45. 43 | 44. 46. 28 | + 0. 45 |
| | 5 | 10. 3. 55 | 211. 51. 8 | 211. 50. 56 | - 0. 12 | 43. 57. 51 | 43. 59. 11 | + 1. 20 |
| | 6 | 10. 48. 13 | 210. 26. 48 | 210. 26. 13 | - 0. 35 | 43. 8. 1 | 43. 8. 39 | + 0. 38 |
| | 7 | 9. 59. 27 | 209. 9. 25 | 209. 8. 56 | - 0. 29 | 42. 20. 11 | 42. 20. 38 | + 0. 27 |
| | 8 | 9. 26. 6 | 207. 52. 42 | 207. 52. 55 | + 0. 13 | 41. 31. 4 | 41. 31. 18 | + 0. 14 |
| | 9 | 9. 4. 56 | 206. 38. 50 | 206. 38. 24 | - 0. 26 | 40. 41. 4 | 40. 41. 0 | - 0. 4 |
| | 10 | 9. 36. 11 | 205. 23. 40 | 205. 23. 27 | - 0. 13 | 39. 48. 20 | 39. 48. 12 | - 0. 8 |
| | 11 | 9. 12. 54 | 204. 13. 22 | 204. 13. 32 | + 0. 10 | 38. 57. 10 | 38. 57. 0 | - 0. 10 |
| | 12 | 9. 23. 19 | 203. 4. 22 | 203. 4. 10 | - 0. 12 | 38. 4. 21 | 38. 4. 20 | - 0. 1 |
| | 13 | 9. 50. 45 | 201. 56. 8 | 201. 56. 14 | + 0. 6 | 37. 11. 28 | 37. 10. 44 | - 0. 44 |
| | 17 | 11. 14. 13 | 197. 48. 18 | 197. 48. 13 | - 0. 5 | 33. 36. 28 | 33. 37. 20 | + 0. 52 |
| | 21 | 9. 43. 32 | 194. 20. 24 | 194. 20. 13 | - 0. 11 | 30. 14. 24 | 30. 14. 5 | - 0. 19 |

| 1779. | TEMPS | LONGITUD. | LONGITUD. | DIFFÉR. | LATITUD. | LATITUD. | DIFFÉR. |
|----------|------------|-------------|-------------|------------------|------------|------------|-------------------|
| | moyen. | observées. | calculées. | des Longitud. | observées. | calculées. | des Latitudes. |
| | H. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | M. S. | D. M. S. | D. M. S. | M. S. |
| Mars. 22 | 10. 28. 57 | 193. 30. 34 | 193. 30. 49 | + 0. 15 | 29. 22. 9 | 29. 22. 14 | + 0. 5 |
| 23 | 9. 12. 59 | 192. 47. 49 | 192. 45. 53 | — 1. 56 | 28. 35. 9 | 28. 35. 16 | + 0. 7 |
| 24 | 8. 50. 30 | 192. 4. 0 | 192. 3. 36 | — 0. 24 | 27. 47. 2 | 27. 46. 58 | — 0. 4 |
| 25 | 8. 11. 58 | 191. 22. 22 | 191. 22. 11 | — 0. 11 | 27. 0. 4 | 26. 59. 47 | — 0. 17 |
| 26 | 8. 24. 59 | 190. 42. 2 | 190. 41. 1 | — 1. 1 | 26. 12. 4 | 26. 11. 46 | — 0. 18 |
| 27 | 7. 51. 45 | 190. 3. 45 | 190. 2. 59 | — 0. 46 | 25. 26. 53 | 25. 27. 10 | + 0. 17 |
| 28 | 8. 54. 28 | 189. 24. 16 | 189. 23. 48 | — 0. 28 | 24. 39. 16 | 24. 38. 13 | — 1. 3 |
| 29 | 0. 33. 7 | 188. 46. 35 | 188. 45. 41 | — 0. 54 | 23. 51. 0 | 23. 49. 10 | — 1. 50 |
| 30 | 9. 15. 38 | 188. 13. 54 | 188. 13. 4 | — 0. 50 | 23. 9. 31 | 23. 8. 2 | — 1. 29 |
| 31 | 12. 27. 33 | 187. 37. 11 | 187. 36. 32 | — 0. 39 | 22. 21. 3 | 22. 19. 26 | — 1. 37 |
| Avril. 1 | 7. 22. 42 | 187. 12. 38 | 187. 11. 57 | — 0. 41 | 21. 47. 49 | 21. 46. 15 | — 1. 34 |
| 2 | 7. 59. 8 | 186. 42. 35 | 186. 41. 23 | — 1. 12 | 21. 5. 27 | 21. 3. 52 | — 1. 35 |
| 3 | 8. 23. 47 | 186. 13. 23 | 186. 12. 32 | — 0. 51 | 20. 24. 2 | 20. 22. 46 | — 1. 16 |
| 4 | 8. 53. 42 | 185. 45. 41 | 185. 45. 23 | — 0. 18 | 19. 43. 27 | 19. 42. 33 | — 0. 54 |
| 5 | 8. 55. 45 | 185. 20. 1 | 185. 19. 14 | — 0. 47 | 19. 4. 55 | 19. 4. 7 | — 0. 48 |
| 6 | 8. 20. 27 | 184. 55. 33 | 184. 55. 26 | — 0. 7 | 18. 28. 15 | 18. 27. 32 | — 0. 43 |
| 7 | 8. 32. 30 | 184. 32. 55 | 184. 31. 56 | — 0. 59 | 17. 51. 48 | 17. 50. 46 | — 1. 2 |
| 9 | 8. 8. 28 | 183. 50. 35 | 183. 49. 34 | — 1. 1 | 16. 41. 45 | 16. 41. 0 | — 0. 45 |
| 13 | 8. 38. 35 | 182. 37. 1 | 182. 36. 45 | — 0. 16 | 14. 31. 11 | 14. 30. 46 | — 0. 25 |
| 14 | 8. 28. 29 | 182. 21. 40 | 182. 21. 21 | — 0. 19 | 14. 1. 1 | 14. 0. 46 | — 0. 15 |
| 15 | 9. 48. 15 | 182. 6. 4 | 182. 5. 23 | — 0. 41 | 13. 30. 28 | 13. 30. 7 | — 0. 21 |
| 17 | 8. 18. 18 | 181. 40. 20 | 181. 40. 21 | + 0. 1 | 12. 35. 38 | 12. 35. 25 | — 0. 13 |
| 18 | 9. 54. 36 | 181. 28. 38 | 181. 27. 38 | — 1. 0 | 12. 8. 4 | 12. 6. 43 | — 1. 21 |
| 19 | 9. 49. 53 | 181. 16. 26 | 181. 16. 41 | + 0. 15 | 11. 41. 52 | 11. 40. 41 | — 1. 11 |
| 20 | 9. 48. 24 | 181. 6. 40 | 181. 6. 29 | — 0. 11 | 11. 16. 40 | 11. 15. 22 | — 1. 18 |
| 21 | 9. 59. 38 | 180. 56. 33 | 180. 56. 58 | + 0. 25 | 10. 51. 49 | 10. 50. 33 | — 1. 16 |
| 22 | 10. 22. 4 | 180. 47. 20 | 180. 48. 9 | + 0. 49 | 10. 27. 46 | 10. 26. 16 | — 1. 30 |
| 23 | 9. 33. 29 | 180. 40. 23 | 180. 40. 29 | + 0. 6 | 10. 5. 54 | 10. 3. 50 | — 2. 4 |
| Mai. 11 | 10. 11. 5 | 180. 1. 51 | 180. 0. 1 | — 1. 50 | 4. 42. 48 | 4. 42. 41 | — 0. 7 |
| 15 | 9. 52. 6 | 180. 12. 23 | 180. 11. 42 | — 0. 41 | 3. 52. 41 | 3. 51. 19 | — 1. 22 |
| 17 | 9. 50. 58 | 180. 19. 50 | 180. 19. 44 | — 0. 6 | 3. 29. 13 | 3. 27. 36 | — 1. 37 |

Cette Comète est nouvelle, c'est-à-dire qu'elle ne ressemble à aucune de celles dont les élémens ont été donnés jusqu'à présent : celle-ci fait la soixante-quatrième de calculée, de

358 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
manière à pouvoir la reconnoître dans le temps qu'elle
reparoîtra.

RECUEIL des Observations de la Comète de 1779.

À P A R I S.

La Comète a été observée à l'Observatoire royal.

Observée aussi par M. Méchain, qui a donné le Mémoire
de ses observations à l'Académie, le 12 Mai 1779, avec
les élémens de la Comète, qu'il en a déduits d'après ses
propres observations.

À B E R L I N.

La Comète fut découverte à Berlin le 6 Janvier, par
M. Bode, Astronome, de l'Académie royale des Sciences
de cette ville; je n'eus connoissance de cette découverte
que le 27 Janvier par M. Baër, Correspondant de notre
Académie, qui me dit: *je viens de lire dans une Gazette
allemande, la découverte de votre Comète à Berlin.* Je le
priaï de me faire passer cette Gazette avec la traduction de
l'article qui la concernoit: la voici.

Extrait de la Gazette de Hambourg, n.° 7, du 12 Janvier.

Le 6 de ce mois, à 7 heures $\frac{3}{4}$ du soir, M. Bode, Astro-
nome, découvrit ici, à l'Ouest-nord-ouest, près de l'horizon,
une Comète qu'on ne pouvoit que difficilement distinguer à
l'œil; mais avec un télescope de 7 pieds, on la voyoit avec
un noyau brillant, assez vif, avec une queue d'environ
25 minutes; elle étoit située dans la voie lactée, entre le
Dauphin & le Renard: en mesurant sa distance de l'étoile α
du Dauphin & de l'étoile vingt-neuvième dans le Renard,
selon Flamsteed, M. Bode détermina la longitude de la
Comète de $12^d 28'$, & sa déclinaison septentrionale de
 $39^d 6'$.

A 9 heures, la Comète se coucha, & elle devoit se lever

à 5 heures du matin, mais un ciel entièrement couvert empêcha de l'observer.

Le 7 au soir, le ciel s'éclaircit un peu vers les 7 heures $\frac{1}{2}$, & l'on pouvoit observer la Comète pendant quelques minutes; elle étoit éloignée d'environ un degré de l'endroit du ciel où elle s'étoit trouvée la veille, de manière que sa marche étoit dans une direction opposée à celle des signes, avec une augmentation de latitude boréale, s'étant approchée de l'étoile dix-huitième de la Flèche. Les vapeurs empêchèrent de faire des observations ultérieures, & depuis ce temps le ciel a toujours été couvert.

Dans la Gazette, n.^o 16, on trouve la suite de ces observations.

Le temps couvert que nous avons eu ici, depuis près de seize jours, a interrompu les observations de la Comète.

Le 20 Janvier, M. Bode l'observa entre les étoiles seize, dix-sept, vingt-deux & vingt-quatrième du Renard, selon Flamsteed, sous une longitude de $10^{\circ} 9^d$, & une latitude boréale de $43^{\circ} \frac{1}{2}$: ce ne fut que le 21 au soir que le ciel s'éclaircit un peu, & à 6 heures on observa la Comète au télescope de 7 pieds; elle paroissoit à l'Ouest-nord-ouest, très-bas & dans une lumière foible où il y avoit des vapeurs.

Sa grandeur apparente ne paroissoit pas avoir augmentée depuis le 10; elle avoit pris son chemin par le cou du Cygne, en s'avancant vers la Lyre, par un mouvement rétrograde & une latitude boréale qui alloit en augmentant: elle se trouvoit à peu-près sur la ligne qui va de β du bec du Cygne à l'étoile γ de la Lyre, mais plus près de la dernière.

Après 6 heures, le ciel se couvrit entièrement.

Si le temps peut s'éclaircir, on la verra au premier jour sous la grande étoile de la Lyre: depuis le 6, son mouvement progressif a fait un chemin de 20 degrés dans un arc des plus grands du ciel; sa course apparente a beaucoup de ressemblance à celle de la Comète de 1707, mais non pas sa course véritable.

à *WHITE-KINGHTS*, quinze lieues Nord-ouest
de *Londres*.

M. le chevalier Englefield, de la Société royale de Londres, m'a mandé dans sa Lettre du 3 Mars 1779, « Notre ami de » Magellan m'a communiqué votre Notice sur la découverte » que vous venez de faire d'une nouvelle Comète; je l'ai cher- » chée, mais le temps toujours couvert m'a empêché de la voir: » ce n'a été que le 14 Février que j'ai commencé à l'apercevoir, » & depuis ce jour j'ai fait les observations suivantes.

| 1779. | TEMPS | ASCENSION | | DÉCLINAIS. | |
|-------------|-------|-----------|------------------|------------|------------------|
| | vrai. | droite. | | Boréale. | |
| | H. | D. | M. | D. | M. |
| Février. 14 | 13 | 252. | 32 | 33. | 31 |
| 16 | 13 | 249. | 32 $\frac{1}{2}$ | 33. | 14 $\frac{3}{4}$ |
| 17 | 12 | 248. | 21 $\frac{1}{4}$ | 32. | 56 $\frac{3}{4}$ |
| 18 | 13 | 246. | 59 $\frac{1}{4}$ | 32. | 37 $\frac{1}{4}$ |
| 19 | 12 | 245. | 31 $\frac{1}{4}$ | 32. | 45 $\frac{1}{4}$ |
| 24 | 14 | 238. | 10 | 31. | 39 |
| 27 | 11 | 234. | 3 | 31. | 2 |

La Comète fut comparée le 14 à l'étoile δ d'Hercule, les 16, 17, 18 & 19 avec ζ d'Hercule, les 24 & 27 à ϵ de la Couronne.

à *MILAN*.

La Comète y fut observée par M.^{rs} Cesaris & Reggio; leurs observations sont rapportées dans les Éphémérides de Milan pour 1781, page 247. Elles sont aussi rapportées dans celles de 1782, avec quelques changemens occasionnés par le mouvement d'*Arcturus*, qu'on n'avoit pas employés. Voici la Table des positions de la Comète, prises des Éphémérides de 1782.

1779.

| 1779. | TEMPS moyen. | ASCENSION droite de la Comète observée. | DÉCLIN. Boréale de la Comète observée. | DIFFÉRENCE en ascension droite entre la Comète & les Étoiles. | DIFFÉRENCE en déclinaison entre la Comète & les Étoiles. | POSITIONS DES ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée. |
|---------|-----------------|---|--|--|--|---|
| | H. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | D. M. S. |
| Mars 8 | 13. 18. 33 | 221. 18. 26 | 27. 53. 8 | 2. 28. 12 + | 0. 23. 36 — | ε Bouvier... { A. D. 218. 50. 14 D. B. 28. 0. 44 |
| 10 | 12. 6. 22 | 218. 38. 55 | 27. 4. 4 | 12. 41. 10 — | 0. 23. 10 — | α Couronne... { A. D. 231. 20. 5 D. B. 27. 27. 14 |
| 11 | 11. 12. 4 | 217. 20. 55 | 26. 40. 11 | 13. 59. 10 — | 0. 47. 3 — | |
| 12 | 10. 40. 0 | 216. 4. 26 | 26. 15. 50 | 15. 15. 39 — | 1. 11. 24 — | |
| 13 | 10. 44. 41 | 214. 47. 34 | 25. 48. 52 | 16. 32. 31 — | 1. 38. 22 — | |
| 14 | 9. 48. 51 | 213. 33. 50 | 25. 22. 58 | 17. 46. 15 — | 2. 4. 16 — | ε du Bouvier |
| 15 | 11. 5. 15 | 212. 15. 4 | 24. 54. 56 | 6. 35. 10 — | 3. 5. 58 — | |
| 18 | 10. 54. 24 | 208. 40. 47 | 23. 21. 44 | 2. 43. 12 — | 3. 11. 37 + | Arcturus... { A. D. 211. 23. 59 D. B. 20. 20. 7 |
| 19 | 9. 25. 37 | 207. 36. 46 | 23. 5. 4 | 3. 47. 13 — | 2. 44. 54 + | |
| 20 | 9. 43. 0 | 206. 30. 25 | 22. 36. 32 | 4. 53. 34 — | 2. 16. 25 + | |
| 22 | 9. 41. 34 | 204. 18. 56 | 21. 39. 51 | 7. 5. 3 — | 1. 19. 44 + | |
| 23 | 9. 15. 48 | 203. 18. 55 | 21. 11. 49 | 8. 5. 4 — | 0. 51. 42 + | |
| 24 | 8. 48. 26 | 202. 20. 40 | 20. 44. 34 | 9. 3. 19 — | 0. 24. 27 + | |
| 26 | 10. 12. 46 | 200. 22. 47 | 19. 47. 25 | 5. 39. 50 — | 0. 16. 33 + | η du Bouvier... { A. D. 206. 2. 37 D. B. 19. 30. 52 |
| 27 | 11. 8. 56 | 199. 25. 17 | 19. 17. 42 | 6. 37. 20 — | 0. 13. 10 — | |
| Avril 2 | 8. 12. 21 | 194. 42. 17 | 16. 39. 27 | 11. 20. 20 — | 2. 51. 25 — | |
| 3 | 8. 6. 15 | 194. 0. 29 | 16. 13. 37 | 12. 2. 8 — | 3. 17. 15 — | |
| 4 | 8. 0. 58 | 193. 19. 39 | 15. 48. 15 | 12. 42. 58 — | 3. 42. 37 — | |
| 5 | 8. 16. 39 | 192. 38. 55 | 15. 23. 5 | 13. 23. 42 — | 4. 7. 47 — | |
| 6 | 8. 57. 14 | 192. 2. 36 | 14. 58. 15 | 14. 0. 1 — | 4. 32. 37 — | ε de la Vierge... { A. D. 192. 48. 2 D. B. 12. 9. 3 |
| 7 | 8. 38. 46 | 191. 24. 31 | 14. 33. 21 | 1. 23. 31 — | 2. 24. 18 + | |
| 8 | 8. 50. 24 | 190. 49. 32 | 14. 9. 15 | 1. 58. 30 — | 2. 0. 12 + | |
| 10 | 8. 47. 35 | 189. 44. 19 | 13. 23. 1 | 3. 3. 43 — | 1. 13. 58 + | |
| 11 | 9. 9. 18 | 189. 13. 0 | 13. 0. 19 | 3. 35. 2 — | 0. 51. 16 + | |
| 12 | 9. 24. 23 | 188. 43. 25 | 12. 38. 10 | 4. 4. 37 — | 0. 29. 7 + | |
| 13 | 9. 24. 32 | 188. 15. 27 | 12. 16. 12 | 4. 32. 35 — | 0. 7. 9 + | Regulus... { A. D. 149. 8. 59 D. B. 12. 2. 23 |
| 14 | 8. 29. 47 | 187. 49. 21 | 11. 55. 4 | 4. 58. 41 — | 0. 13. 59 — | |
| 15 | 8. 31. 55 | 187. 24. 13 | 11. 33. 40 | 5. 23. 49 — | 0. 35. 23 — | |
| 16 | 8. 37. 50 | 186. 59. 55 | 11. 13. 21 | 5. 48. 7 — | 0. 55. 42 — | |
| 19 | 10. 41. 23 | 185. 52. 4 | 10. 12. 17 | 36. 43. 5 + | 2. 50. 16 — | ε, η. |
| 21 | 9. 24. 34 | 185. 14. 51 | 10. 34. 13 | 7. 33. 11 — | 2. 34. 50 — | |

à T O U L O U S E.

La Comète y fut observée par M.^{rs} Garipuy & Darquier; les observations de M. Garipuy ont été envoyées à M. le Monnier, qui les a communiquées à l'Académie: voici celles de M. Darquier, qu'il m'a envoyées en Septembre 1779; il a désiré que je les rapporte à la suite de mon Mémoire, avec un Catalogue d'Étoiles qu'il a déterminées.

TABLE des Positions de la Comète & des Étoiles qui ont été employées à sa détermination.

| 1779. | TEMPS vrai. | ASCENSION droite de la Comète. | DÉCLINAISON Boréale de la Comète | ASCENSION droite des Étoiles. | DÉCLINAIS. Boréale des Étoiles. | Grandeur des Étoiles. | Lett. de Bayen le N.° des Étoiles. | ÉTOILES avec lesquelles la Comète a été comparée. |
|----------|----------------|--------------------------------------|--|-------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------|---------------------------------------|--|
| | H. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | | | |
| Févr. 11 | 13. 12. 14 | 256. 40. 57 | 33. 34. 26 | 257. 17. 33 | 33. 20. 38 | 5 | 11 | d'Hercule. |
| 15 | 13. 59. 9 | 250. 11. 49 | 33. 14. 41 | 250. 41. 6 | 33. 31. 32 | 5 | 200 | déter. par β, Lyr. |
| 16 | 12. 4. 30 | 249. 48. 48 | 33. 6. 58 | 248. 49. 38 | 33. 6. 49 | 5 | 193 | déter. par α Couron. |
| 17 | 11. 56. 38 | 248. 26. 42 | 32. 57. 95 | | | | | je crois la même. |
| 18 | 12. 37. 3 | 246. 57. 58 | 32. 51. 29 | 243. 37. 8 | 32. 51. 6 | 5 | 23 | d'Hercule. |
| 19 | 12. 52. 1 | 245. 30. 56 | 32. 42. 45 | 243. 37. 8 | 32. 51. 6 | 5 | 23 | |
| 20 | 12. 18. 49 | 244. 8. 37 | 32. 31. 32 | 237. 0. 28 | 37. 7. 29 | 4 | 0 | |
| 21 | 12. 33. 41 | 242. 41. 52 | 32. 19. 45 | 231. 0. 28 | 37. 7. 29 | 4 | 0 | |
| 22 | 11. 42. 20 | 241. 18. 46 | 32. 7. 39 | 231. 0. 28 | 37. 7. 29 | 4 | 0 | |
| 23 | 11. 31. 47 | 239. 52. 28 | 31. 56. 14 | 231. 0. 28 | 37. 7. 29 | 4 | 0 | de la Couronne. |
| 24 | 11. 12. 10 | 238. 27. 31 | 31. 43. 43 | 231. 0. 28 | 37. 7. 29 | 4 | 0 | |
| 25 | 11. 3. 47 | 237. 1. 28 | 31. 31. 2 | 231. 0. 28 | 37. 7. 29 | 4 | 0 | |
| 26 | 11. 15. 49 | 235. 33. 17 | 31. 17. 38 | 243. 21. 58 | 31. 26. 39 | 5 | 2 | |
| 27 | 10. 30. 53 | 234. 10. 11 | 31. 1. 1 | 215. 34. 45 | 31. 20. 55 | 4 | 9 | du Bouvier. |
| 28 | 10. 47. 1 | 232. 44. 4 | 30. 46. 50 | 231. 57. 41 | 30. 46. 35 | 6 | 122 | déter. par α Bouvier. |
| Mars. 7 | 9. 46. 35 | 232. 51. 54 | 28. 22. 53 | 194. 9. 20 | 28. 48. 10 | | 42 | de Bérénice. |
| 8 | 9. 42. 43 | 231. 27. 17 | 27. 58. 17 | 218. 50. 13 | 28. 0. 47 | 3 | 1 | du Bouvier. |
| 9 | 10. 21. 59 | 220. 3. 18 | 27. 32. 30 | 218. 50. 13 | 28. 0. 47 | 3 | 1 | |
| 10 | 9. 27. 47 | 218. 45. 16 | 27. 9. 39 | 237. 20. 22 | 27. 28. 7 | 3 | 2 | |
| 11 | 9. 15. 51 | 217. 26. 47 | 26. 42. 50 | 233. 23. 17 | 27. 0. 6 | 4 | 7 | de la Couronne. |
| | 10. 31. 59 | 217. 22. 16 | 26. 42. 45 | 233. 23. 17 | 27. 0. 6 | 4 | 7 | |
| 13 | 11. 30. 38 | 214. 40. 32 | 25. 50. 33 | 229. 30. 30 | 25. 52. 35 | 6 | 111 | déter. par α Bouvier. |
| 14 | 8. 42. 41 | 213. 35. 24 | 25. 21. 37 | 256. 29. 47 | 25. 6. 48 | 5 | 1 | d'Hercule. |
| 17 | 8. 34. 9 | 209. 55. 47 | 23. 57. 38 | 202. 38. 35 | 23. 37. 5 | 6 | 2 | du Bouvier. |
| 21 | 9. 21. 17 | 205. 22. 18 | 22. 8. 13 | 245. 11. 17 | 21. 58. 53 | 3 | β | d'Hercule. |
| | 9. 21. 17 | 205. 22. 23 | 22. 8. 4 | 204. 48. 40 | 22. 19. 24 | 5 | 6 | du Bouvier. |
| 22 | 8. 30. 50 | 204. 21. 59 | 21. 38. 23 | 202. 32. 3 | 21. 4. 43 | 6 | 1 | |
| | 9. 9. 51 | 204. 19. 44 | 21. 37. 42 | 206. 0. 16 | 21. 42. 30 | 6 | 19 | |
| 23 | 7. 59. 18 | 203. 21. 11 | 21. 12. 49 | 206. 0. 16 | 21. 42. 30 | 6 | 19 | du Catalogue. |
| 24 | 8. 1. 5 | 202. 21. 20 | 20. 42. 56 | 206. 0. 16 | 21. 42. 30 | 6 | 19 | |
| | 9. 6. 8 | 202. 18. 55 | 20. 41. 52 | 211. 24. 51 | 20. 20. 36 | 1 | α | |
| 25 | 9. 31. 3 | 201. 19. 39 | 20. 14. 41 | 211. 24. 51 | 20. 20. 36 | 1 | α | Arcturus. |

Je ne fus instruit de l'apparition de la Comète de 1779, que par la Gazette de France, qui arriva ici le 9 Février, dans laquelle M. Messier annonçoit la découverte qu'il venoit d'en faire.

Le temps avoit été couvert depuis le 26 Janvier jusqu'au 10 de Février, excepté le 6, & dans la nuit du 9 au 10, jour auquel je la cherchai vers minuit; je la trouvai au pli de la cuisse gauche d'Hercule, & suivant l'étoile μ de cette constellation, elle en étoit à 2 minutes environ de temps, & un peu plus boréale.

C'est avec ma lunette achromatique de 42 pouces de foyer, que je la trouvai; comme il n'y avoit point de réticule, je n'obtins cette première détermination, que par la sortie de l'Étoile & de la Comète du champ de la lunette, vers les 3 heures $\frac{1}{4}$ après minuit; quoiqu'elle ne puisse pas s'éloigner beaucoup de la vérité, je ne la place pas cependant au rang de mes observations.

Le noyau étoit peu brillant; on pouvoit lui soupçonner une queue courte & assez diffuse: la Comète devint de plus en plus apparente jusqu'aux 20 & 21 Février, où je la voyois très-bien à la vue simple; les jours suivans, la clarté de la Lune, qui fut en opposition le 23, la rendit fort difficile à voir.

Le 18 Février, son noyau parut beaucoup plus brillant que la veille; en la considérant pendant quelque temps, je vis une petite Étoile qu'elle avoit occultée, & qui continua de s'éloigner occidentalement.

Ayant déterminé, comme je l'ai rapporté, la position de la Comète, le 10 Février vers minuit, par la sortie de la Comète, & de celle de l'étoile μ d'Hercule du champ de la lunette, je disposai l'instrument dans la journée du 11, parallactiquement sur une méridienne tracée à la porte orientale de mon Observatoire; j'adaptai à la lunette un réticule rhomboïde, fait par Lenel, sous mes yeux: sa largeur fut déterminée par un grand nombre d'observations, de 25' 15" de grand cercle, & sa hauteur totale de 50' 30".

C'est avec cette lunette ainsi montée, que j'ai observé la Comète, depuis le 11 Février à $1^h 12' 14''$ après minuit, jusqu'au 25 de Mars à $9^h 31'$: pendant cet intervalle de temps, la Comète a parcouru $55^d 21' 28''$ en ascension droite, contre l'ordre des signes, & $13^d 18' 2''$ de déclinaison, en s'éloignant du pôle, & pendant cet intervalle de temps, j'ai obtenu trente-deux observations.

Ce qu'il y a de singulier, c'est que cette Comète, qui s'est d'abord approchée du pôle, s'en est éloignée ensuite dans ses limites de déclinaisons, & pour ainsi dire stationnaire, quand j'ai pu l'observer ici; car du 10 au 11 Février, elle ne parcouroit que 2 minutes en rétrogradant.

Je joins à chaque observation l'ascension droite & la déclinaison de l'Étoile à laquelle la Comète a été comparée, avec le temps vrai, l'ascension droite, conclue par la différence des passages, en tenant compte du mouvement de la pendule & de la déclinaison, par la même différence aux côtés obliques du réticule, réduit en degrés par les méthodes connues de l'usage du rhomboïde. La position stable & invariable de la lunette, de la direction du fil horizontal, suivant le parallèle, permettoit de donner une grande précision aux observations; j'ai été cependant obligé de les abandonner au 25 Mars, à cause de la position de ma lunette, vis-à-vis de la porte orientale de mon Observatoire, devenant trop incommode par la grande élévation, ne pouvant plus l'apercevoir.

Il a paru peu de Comètes qu'on ait pu observer aussi bien, aussi commodément & aussi long-temps que celle-ci; elle a eu même l'avantage qu'on a pu l'observer long-temps, & presque toujours au Méridien, & tous les Astronomes savent que les observations faites à ce point, sont préférables à celles faites dans d'autres, hors du Méridien.

En commençant les observations de la Comète, je m'aperçus qu'elle se trouvoit souvent sur le parallèle de plusieurs Étoiles, dont la position n'étoit pas comprise dans le grand Catalogue Britannique, & que plusieurs des Étoiles de Flamsteed avoient besoin d'être rectifiées, comme la vingt-troisième d'Hercule,

qui est moins avancée dans Flamsteed, qu'elle ne devoit l'être d'environ $2' 5''$; la distance au pôle de δ de la Couronne trop faible de 5 minutes : ce sont des remarques pareilles qui m'ont engagé à observer un grand nombre d'Étoiles.

Profitant de la position de ma lunette achromatique, que j'avois placée parallactiquement pour observer la Comète, qui étoit garnie d'un réticule rhomboïde, dont j'avois déterminé les dimensions, comme je l'ai déjà rapporté, j'observai depuis le 10 Février jusqu'à la fin d'Avril, au fil horaire & aux côtés obliques du rhomboïde, les Étoiles qui passaient dans le même champ de la lunette que la Comète.

Comme le mouvement de la Comète en déclinaison étoit assez lent, j'avois la facilité de pouvoir observer deux jours de suite les mêmes Étoiles, & en faisant passer le troisième jour boréalement dans la lunette celles qui y avoient d'abord passé australement, je les déterminai l'une par l'autre.

Les plus boréales le furent par δ d'Hercule & β de la Lyre, depuis le $33.^{\circ}$ degré 57 minutes de déclinaison boréale, & par les autres Étoiles connues qui se sont trouvées sur la route, jusqu'au $20.^{\circ}$ degré, ce qui forme une zone d'environ 14 degrés de largeur, & qui commence à 181 degrés d'ascension droite, & s'étend jusqu'au $283.^{\circ}$.

J'ai refait les mêmes observations à l'occident, dans le mois de Juillet, ainsi toutes les Étoiles ont été observées deux fois, la plupart l'ont été trois.

C'est le résultat de ce travail qui formera le Catalogue que je rapporte, il sera composé de dix colonnes.

La première, contiendra les numéros des Étoiles, depuis 1 jusqu'à 271.

La deuxième, la grandeur des Étoiles.

La troisième, les ascensions droites.

La quatrième, leurs déclinaisons.

Les cinquième & sixième, la variation annuelle en ascension droite & en déclinaison, calculée directement.

Les septième & huitième, la différence de leurs positions avec celles du Catalogue britannique, les signes $+$ ou $-$

les affectent selon que mes déterminations sont plus fortes ou plus foibles que celles de Flamstéed : en rapportant ces différences, je n'ai pas prétendu donner la préférence à mes déterminations sur celles de l'Auteur célèbre de ce Catalogue; mais si quelqu'Astronome dans la suite reprend ce travail, on sera plus à portée de démêler les mouvemens particuliers des Étoiles, si elles en ont.

La neuvième, les Étoiles qui appartiennent au Catalogue Britannique, désignée par les lettres grecques & par les numéros.

La dixième, les constellations auxquelles appartiennent les Étoiles.

Les observations ne donnant que les ascensions droites & les déclinaisons apparentes, je les ai réduites aux vraies & à l'époque du 1.^{er} Janvier 1780, en les dépouillant de l'effet de l'aberration & de la nutation que j'ai calculées directement par les Tables, pour la très-majeure partie; les autres ont été calculées par celles qui sont rapportées dans la Connoissance des Temps de 1781.

Les Astronomes qui ont observé la Comète, trouveront dans ce Catalogue des Étoiles auxquelles ils l'auront comparée, sans avoir connu leur position.

Dans mon travail, j'ai rencontré quelques nébuleuses, dont la plupart sont inconnues; mais celle à laquelle je me suis arrêté, est une nébuleuse située entre les deux belles étoiles β & γ de la Lyre; elle est fort terne, mais parfaitement terminée; elle est grosse comme Jupiter, & ressemble à une Planète qui s'éteindroit: on trouvera sa position déterminée dans mon Catalogue.

Si l'on considère que cette nébuleuse, qui est placée entre deux belles Étoiles, qui sont très-près l'une de l'autre, pouvant passer en même temps dans le même champ de la lunette, & vers lesquelles les Astronomes ont dû souvent tourner leurs instrumens, il y a lieu de s'étonner qu'on n'en ait pas parlé; il faut convenir aussi qu'il faut une lunette assez forte pour l'apercevoir: seroit-ce une nouvelle production de la Nature? ou auroit-elle la même date que les Étoiles qui l'entourent?

CATALOGUE des Étoiles déterminées par M. DARQUIER, pour le 1.^{er} Janvier 1780.

| Numéros des Étoiles. | Grandeur des Étoiles. | ASCENSION | | DÉCLINAIS. | | VARIATION annuelle. | | DIFFÉRENCE avec FLAMSTÉED. | | Lettres de BAYEN & Nombres. | N O M S. des CONSTELLATIONS |
|----------------------|-----------------------|-------------|------------|--------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------------|----------|--------------------------------|-----------------------------------|
| | | droite. | Boréale. | En ASCENS. droite. | En DÉCLI- NAISON. | En ASCENS. droite. | En DÉCLI- NAISON. | | | | |
| | | | | | | | | D. M. S. | D. M. S. | | |
| 1 | 6 | 181. 47. 23 | 28. 32. 33 | 45. 2 | 20. 0 | | | | | | |
| 2 | 6 | 182. 24. 58 | 28. 18. 8 | 45. 7 | 20. 0 | | | | | | Étoile double. de Bérénice. |
| 3 | 5 | 183. 51. 49 | 28. 29. 23 | 45. 5 | 20. 0 | + 1. 4 | + 0. 8 | b | | | |
| 4 | 5 | 183. 59. 54 | 28. 2. 47 | 45. 4 | 20. 0 | + 0. 18 | + 0. 3 | a | | | |
| 5 | 7 | 185. 9. 27 | 28. 16. 26 | 45. 2 | 20. 0 | | | | | | |
| 6 | 6 | 187. 31. 39 | 28. 20. 13 | 44. 8 | 19. 9 | | | | | | |
| 7 | 7 | 188. 33. 55 | 28. 36. 5 | 44. 6 | 19. 8 | | | | | | |
| 8 | 7 | 189. 19. 38 | 27. 57. 46 | 44. 5 | 19. 8 | | | | | | |
| 9 | 5 | 189. 37. 55 | 28. 40. 32 | 44. 3 | 20. 0 | | | | | | |
| 10 | 5 | 190. 15. 16 | 28. 13. 32 | 44. 2 | 19. 7 | + 1. 18 | — 1. 10 | 31 | | | de Bérénice. |
| 11 | 7 | 201. 11. 48 | 23. 36. 34 | 43. 0 | 18. 0 | | | | | | |
| 12 | 7 | 201. 53. 55 | 23. 38. 31 | 42. 9 | 18. 6 | | | | | | |
| 13 | 6 | 202. 32. 21 | 20. 23. 28 | 43. 3 | 18. 5 | | | | | | |
| 14 | 6 | 202. 32. 31 | 21. 4. 30 | 43. 2 | 18. 5 | — 0. 27 | — 0. 15 | 1 | | | du Bouvier. |
| 15 | 6 | 202. 39. 3 | 23. 37. 11 | 42. 8 | 18. 5 | — 1. 24 | + 0. 16 | 2 | | | |
| 16 | 7 | 203. 31. 2 | 28. 41. 9 | 41. 8 | 18. 4 | | | | | | |
| 17 | 5 | 204. 49. 8 | 22. 19. 12 | 42. 7 | 18. 2 | — 0. 25 | — 2. 30 | 6 | | | du Bouvier. |
| 18 | 7 | 204. 50. 40 | 20. 30. 3 | 43. 0 | 18. 2 | | | | | | |
| 19 | 5 | 206. 0. 44 | 21. 42. 18 | 42. 7 | 18. 0 | | | | | | |
| 20 | 7 | 206. 22. 57 | 23. 44. 54 | 42. 3 | 17. 9 | | | | | | |
| 21 | 6 | 206. 38. 19 | 28. 34. 24 | 41. 3 | 17. 9 | + 0. 22 | — 0. 16 | 9 | | | du Bouvier. |
| 22 | 6 | 207. 48. 27 | 28. 26. 42 | 41. 1 | 17. 7 | + 0. 18 | + 0. 2 | 11 | | | |
| 23 | 7 | 208. 2. 41 | 20. 16. 9 | 42. 7 | 17. 7 | | | | | | |
| 24 | 6 | 208. 16. 43 | 23. 33. 22 | 42. 0 | 17. 7 | | | | | | |
| 25 | 7 | 208. 22. 50 | 28. 33. 53 | 41. 7 | 17. 6 | | | | | | |
| 26 | 6 | 208. 32. 8 | 20. 18. 56 | 42. 7 | 17. 6 | | | | | | |
| 27 | 7 | 209. 21. 48 | 22. 15. 0 | 42. 2 | 17. 5 | | | | | | |
| 28 | 6 | 209. 49. 29 | 21. 28. 41 | 42. 3 | 17. 4 | | | | | | |
| 29 | 7 | 209. 51. 44 | 20. 49. 37 | 42. 4 | 17. 4 | | | | | | |
| 30 | 8 | 209. 52. 40 | 20. 46. 11 | 42. 4 | 17. 4 | | | | | | |
| 31 | 7 | 210. 29. 12 | 21. 38. 55 | 42. 1 | 17. 3 | | | | | | |
| 32 | 6 | 211. 11. 30 | 20. 56. 9 | 42. 2 | 17. 2 | | | | | | |
| 33 | 6 | 211. 24. 43 | 28. 46. 35 | 40. 5 | 17. 1 | | | | | | |
| 34 | 1 | 211. 25. 18 | 20. 20. 27 | 42. 3 | 17. 1 | — 0. 39 | — 2. 54 | a | | | Arcturus |
| 35 | 6 | 211. 29. 14 | 22. 16. 26 | 41. 5 | 17. 1 | | | | | | |
| 36 | 5 | 211. 35. 2 | 21. 9. 25 | 43. 2 | 17. 1 | | | | | | |
| 37 | 6 | 211. 42. 57 | 20. 15. 46 | 42. 3 | 17. 0 | | | | | | |
| 38 | 6 | 213. 19. 40 | 26. 22. 57 | 40. 7 | 16. 8 | | | | | | |
| 39 | 6 | 213. 34. 19 | 28. 25. 0 | 40. 1 | 16. 8 | | | | | | |
| 40 | 6 | 213. 49. 46 | 21. 35. 26 | 41. 8 | 16. 7 | | | | | | |
| 41 | 5 | 214. 4. 6 | 20. 12. 52 | 42. 4 | 16. 6 | — 0. 0 | + 0. 6 | f | | | du Bouvier. |
| 42 | 6 | 214. 13. 20 | 28. 38. 16 | 40. 0 | 16. 8 | | | | | | |
| 43 | 6 | 214. 44. 55 | 26. 50. 39 | 40. 1 | 16. 5 | | | | | | |
| 44 | 4 | 215. 35. 23 | 31. 20. 52 | 38. 8 | 16. 5 | + 0. 41 | + 0. 17 | g | | | du Bouvier. |
| 45 | 6 | 215. 58. 21 | 31. 59. 50 | 38. 8 | 16. 2 | | | | | | |
| 46 | 5 | 216. 16. 21 | 30. 42. 24 | 39. 0 | 16. 3 | + 0. 21 | + 0. 31 | e | | | du Bouvier. |

| Nombres des Étoiles. | Grandeur des Étoiles. | ASCENSION | | DÉCLINAIS. | | VARIATION | | DIFFÉRENCE | | Lettres de B A V E L. de Nombres. | N O M de CONSTELLA |
|----------------------|-----------------------|-------------|------------|--------------------|------------------|--------------------|-------------------|-----------------|----|--------------------------------------|--------------------------|
| | | droite. | | Boréale. | | annuelle. | | avec FLAMSTÉED. | | | |
| | | | | | | En | En | En | En | | |
| | | D. M. S. | D. M. S. | ASCENS. droite. | DÉCLI- NAISON | ASCENS. droite. | DÉCLI- NAISON. | | | | |
| | | D. M. S. | D. M. S. | S. Dég. | S. Dég. | M. S. | M. S. | | | | |
| 47 | 5 | 216. 32. 58 | 23. 44. 39 | 40. 9 | 16. 1 | | | | | | du Bouvier. |
| 48 | 5 | 216. 35. 54 | 24. 56. 53 | 40. 6 | 16. 1 | | | | | | |
| 49 | 7 | 216. 41. 24 | 28. 26. 23 | 39. 7 | 16. 1 | | | | | | |
| 50 | 6 | 217. 42. 52 | 31. 26. 1 | 38. 6 | 15. 9 | | | | | | |
| 51 | 7 | 217. 45. 22 | 31. 28. 33 | 38. 6 | 15. 9 | | | | | | |
| 52 | 6 | 217. 50. 21 | 32. 14. 19 | 38. 2 | 15. 8 | | | | | | |
| 53 | 6 | 217. 59. 59 | 25. 27. 2 | 40. 3 | 15. 8 | | | | | | |
| 54 | 6 | 218. 25. 40 | 27. 28. 40 | 39. 7 | 15. 7 | - 0. 38 | + 0. 33 | 34 | | | |
| 55 | 3 | 218. 50. 47 | 28. 0. 42 | 39. 6 | 15. 6 | + 0. 23 | + 0. 11 | 5 | | | |
| 56 | 7 | 219. 7. 39 | 28. 27. 38 | 39. 2 | 15. 6 | | | | | | |
| 57 | 6 | 219. 28. 10 | 25. 1. 1 | 40. 2 | 15. 8 | | | | | | |
| 58 | 5 | 219. 39. 41 | 25. 14. 40 | 40. 7 | 15. 4 | | | | | | |
| 59 | 5 | 219. 39. 34 | 25. 17. 37 | 40. 1 | 15. 4 | | | | | | |
| 60 | 7 | 219. 57. 30 | 23. 42. 18 | 40. 5 | 15. 4 | | | | | | |
| 61 | 6 | 220. 32. 5 | 21. 11. 59 | 41. 1 | 15. 2 | | | | | | |
| 62 | 7 | 220. 48. 55 | 30. 9. 20 | 38. 6 | 15. 2 | | | | | | |
| 63 | 6 | 220. 49. 43 | 28. 28. 37 | 39. 1 | 15. 2 | | | | | | |
| 64 | 6 | 220. 52. 52 | 32. 48. 9 | 37. 7 | 15. 2 | | | | | | |
| 65 | 7 | 220. 54. 55 | 33. 35. 26 | 37. 5 | 15. 2 | | | | | | |
| 66 | 6 | 221. 16. 26 | 32. 54. 50 | 37. 6 | 15. 1 | | | | | | |
| 67 | 7 | 221. 24. 36 | 32. 19. 28 | 37. 8 | 15. 0 | | | | | | |
| 68 | 7 | 221. 32. 9 | 33. 43. 9 | 37. 7 | 15. 0 | | | | | | |
| 69 | 6 | 221. 34. 23 | 25. 14. 27 | 39. 9 | 15. 0 | | | | | | |
| 70 | 6 | 221. 34. 8 | 25. 17. 39 | 39. 9 | 15. 0 | | | | | | |
| 71 | 5 | 221. 58. 15 | 25. 31. 58 | 39. 8 | 15. 0 | | | | | | |
| 72 | 6 | 222. 9. 59 | 27. 42. 40 | 39. 4 | 14. 9 | | | | | | |
| 73 | 6 | 222. 16. 23 | 25. 3. 7 | 39. 9 | 14. 8 | | | | | | |
| 74 | 6 | 222. 49. 58 | 32. 33. 55 | 37. 5 | 14. 7 | | | | | | |
| 75 | 7 | 222. 56. 51 | 32. 15. 22 | 37. 5 | 14. 7 | | | | | | |
| 76 | 5 | 223. 5. 13 | 25. 53. 0 | 37. 5 | 14. 6 | - 1. 30 | - 0. 1 | e | | du Bouvier. | |
| 77 | 6 | 223. 20. 54 | 32. 32. 39 | 37. 4 | 14. 6 | | | | | | |
| 78 | 6 | 223. 21. 48 | 34. 6. 18 | 36. 9 | 14. 6 | | | | | | |
| 79 | 6 | 223. 35. 26 | 25. 57. 33 | 38. 8 | 14. 5 | | | | | | |
| 80 | 6 | 223. 43. 46 | 29. 56. 20 | 38. 2 | 14. 5 | | | | | | |
| 81 | 4 | 223. 45. 13 | 27. 48. 53 | 38. 9 | 14. 5 | - 0. 30 | + 0. 18 | ↓ | | du Bouvier | |
| 82 | 6 | 224. 9. 41 | 31. 58. 0 | 37. 4 | 14. 4 | | | | | | |
| 83 | 4 | 224. 22. 38 | 25. 43. 50 | 39. 1 | 14. 6 | - 0. 1 | + 0. 9 | c | | du Bouvier | |
| 84 | 7 | 224. 23. 52 | 30. 43. 32 | 37. 8 | 14. 3 | | | | | | |
| 85 | 6 | 224. 39. 40 | 29. 21. 23 | 38. 3 | 14. 3 | | | | | | |
| 86 | 6 | 224. 43. 27 | 27. 12. 14 | 38. 9 | 14. 2 | + 0. 6 | + 3. 7 | b | | du Bouvier | |
| 87 | 6 | 224. 58. 25 | 25. 30. 19 | 39. 4 | 14. 2 | | | | | | |
| 88 | 7 | 225. 0. 4 | 34. 4. 6 | 36. 6 | 14. 2 | | | | | | |
| 89 | 7 | 225. 25. 9 | 33. 54. 57 | 36. 6 | 14. 1 | | | | | | |
| 90 | 6 | 225. 26. 56 | 31. 28. 50 | 37. 4 | 14. 1 | | | | | | |
| 91 | 7 | 225. 30. 14 | 25. 4. 42 | 39. 5 | 14. 0 | | | | | | |
| 92 | 6 | 225. 49. 41 | 32. 18. 1 | 37. 1 | 14. 0 | | | | | | |
| 93 | 6 | 226. 17. 36 | 32. 36. 44 | 36. 9 | 13. 9 | | | | | | |
| 94 | 6 | 226. 18. 33 | 29. 58. 55 | 37. 8 | 13. 8 | - 0. 39 | - 0. 13 | χ | | du Bouvier | |
| 95 | 3 | 226. 38. 53 | 34. 6. 22 | 36. 3 | 13. 8 | - 2. 4 | - 2. 26 | χ | | | |

| Nombres de l'étoile. | Grandeur des Étoiles. | ASCENSION | | DÉCLINAIS. | | VARIATION | | DIFFÉRENCE | | Lignes de BAYER. & Numéros. | N O M S. des CONSTELLATIONS | | |
|----------------------|-----------------------|-----------|----------|--------------------------|------------------------|--------------------------|-------------------------|------------|-------|--------------------------------|-----------------------------------|----|-----------------|
| | | droite. | Boréale. | annuelle. | | avec FLAMSTÉED. | | | | | | | |
| | | | | En ASCENS. droite. | En DÉCLI- NAISON | En ASCENS. droite. | En DÉCLI- NAISON. | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | |
| D. | M. | S. | D. | M. | S. | S. Dtc. | S. Dtc. | M. | S. | M. | S. | | |
| 96 | 7 | 226. | 48. | 6 | 31. | 43. | 1 | 37. 2 | 13. 7 | | | | |
| 97 | 6 | 227. | 14. | 4 | 27. | 39. | 4 | 38. 5 | 13. 6 | | | | |
| 98 | 5 | 227. | 14. | 37 | 31. | 7. | 22 | 37. 3 | 13. 6 | | | | |
| 99 | 5 | 227. | 18. | 5 | 32. | 25. | 27 | 36. 8 | 13. 6 | | | | |
| 100 | 5 | 227. | 39. | 2 | 33. | 19. | 6 | 36. 4 | 13. 5 | | | | |
| 101 | 6 | 227. | 45. | 43 | 30. | 24. | 44 | 37. 5 | 13. 5 | | | | |
| 102 | 5 | 227. | 52. | 1 | 25. | 45. | 6 | 39. 0 | 13. 5 | | | | |
| 103 | 5 | 227. | 58. | 33 | 32. | 15. | 59 | 38. 8 | 13. 4 | | | | |
| 104 | 6 | 228. | 0. | 16 | 25. | 4. | 44 | 39. 2 | 13. 4 | | | | |
| 105 | 6 | 228. | 0. | 31 | 25. | 9. | 1 | 39. 8 | 13. 4 | | | | |
| 106 | 5 | 228. | 14. | 3 | 33. | 43. | 26 | 36. 2 | 13. 3 | — 2. 45 | — 0. 37 | 50 | du Bouvier. |
| 107 | 7 | 228. | 29. | 6 | 32. | 21. | 4 | 36. 7 | 13. 3 | | | | |
| 108 | 5 | 228. | 31. | 32 | 31. | 5. | 29 | 36. 9 | 13. 3 | + 0. 41 | — 0. 4 | n | de la Couronne. |
| 109 | 6 | 228. | 53. | 56 | 25. | 36. | 9 | 38. 9 | 13. 2 | | | | |
| 110 | 6 | 229. | 0. | 2 | 20. | 19. | 51 | 40. 6 | 13. 2 | | | | |
| 111 | 7 | 229. | 17. | 19 | 33. | 14. | 49 | 36. 2 | 13. 1 | | | | |
| 112 | 6 | 229. | 30. | 50 | 25. | 52. | 35 | 38. 8 | 13. 0 | | | | |
| 113 | 3 | 229. | 40. | 19 | 29. | 51. | 42 | 38. 0 | 13. 0 | — 1. 41 | — 0. 43 | β | de la Couronne. |
| 114 | 7 | 229. | 44. | 14 | 20. | 31. | 27 | 40. 5 | 13. 0 | | | | |
| 115 | 6 | 229. | 51. | 54 | 27. | 53. | 56 | 38. 1 | 12. 9 | | | | |
| 116 | 5 | 230. | 21. | 53 | 32. | 2. | 35 | 36. 5 | 12. 8 | | | | |
| 117 | 6 | 230. | 29. | 58 | 21. | 8. | 19 | 40. 2 | 12. 8 | | | | |
| 118 | 7 | 230. | 57. | 26 | 31. | 4. | 57 | 36. 8 | 12. 6 | | | | |
| 119 | 7 | 230. | 59. | 8 | 31. | 5. | 50 | 36. 8 | 12. 6 | | | | |
| 120 | 4 | 231. | 0. | 41 | 32. | 6. | 38 | 36. 8 | 12. 6 | — 1. 1 | — 0. 8 | θ | de la Couronne. |
| 121 | 1 | 231. | 20. | 44 | 27. | 18. | 3 | 38. 0 | 12. 6 | — 0. 16 | + 0. 17 | α | |
| 122 | 5 | 231. | 28. | 9 | 32. | 12. | 9 | 36. 3 | 12. 5 | | | | |
| 123 | 6 | 231. | 58. | 17 | 30. | 46. | 35 | 36. 8 | 12. 4 | | | | |
| 124 | 5 | 232. | 12. | 36 | 25. | 13. | 4 | 38. 7 | 12. 3 | | | | |
| 125 | 5 | 232. | 12. | 49 | 25. | 16. | 37 | 38. 7 | 12. 3 | | | | |
| 126 | 6 | 232. | 13. | 19 | 31. | 1. | 4 | 36. 7 | 12. 2 | | | | |
| 127 | 6 | 232. | 42. | 50 | 25. | 48. | 53 | 38. 5 | 12. 2 | | | | |
| 128 | 6 | 232. | 56. | 13 | 32. | 11. | 56 | 36. 7 | 12. 2 | | | | |
| 129 | 5 | 233. | 28. | 30 | 32. | 24. | 54 | 36. 0 | 11. 9 | | | | |
| 130 | 5 | 233. | 26. | 17 | 20. | 27. | 8 | 40. 0 | 11. 9 | | | | |
| 131 | 4 | 233. | 23. | 49 | 27. | 0. | 17 | 38. 0 | 11. 9 | — 0. 49 | — 0. 7 | γ | de la Couronne. |
| 132 | 5 | 233. | 36. | 21 | 32. | 5. | 46 | 36. 2 | 11. 9 | | | | |
| 133 | 5 | 233. | 40. | 35 | 25. | 10. | 10 | 38. 6 | 11. 9 | | | | |
| 134 | 6 | 233. | 40. | 45 | 25. | 4. | 8 | 38. 6 | 11. 9 | | | | |
| 135 | 5 | 233. | 49. | 14 | 22. | 8. | 32 | 39. 6 | 11. 8 | | | | |
| 136 | 5 | 233. | 49. | 23 | 33. | 13. | 10 | 35. 6 | 11. 8 | — 1. 1 | — 0. 18 | π | de la Couronne. |
| 137 | 6 | 234. | 34. | 38 | 31. | 15. | 40 | 36. 3 | 11. 6 | | | | |
| 138 | 7 | 234. | 46. | 13 | 33. | 41. | 39 | 35. 3 | 11. 6 | | | | |
| 139 | 6 | 234. | 49. | 34 | 32. | 25. | 22 | 36. 0 | 11. 6 | | | | |
| 140 | 4 | 235. | 6. | 0 | 26. | 44. | 22 | 35. 8 | 11. 5 | + 3. 18 | — 5. 8 | ♄ | de la Couronne. |
| 141 | 7 | 235. | 20. | 55 | 25. | 56. | 52 | 35. 8 | 11. 5 | | | | |
| 142 | 5 | 235. | 25. | 5 | 21. | 36. | 49 | 39. 6 | 11. 4 | + 0. 11 | — 1. 40 | ρ | du Serpent. |
| 143 | 6 | 235. | 52. | 31 | 29. | 34. | 0 | 36. 7 | 11. 3 | | | | |
| 144 | 7 | 236. | 23. | 53 | 32. | 59. | 32 | 35. 4 | 11. 1 | | | | |

Mém. 1779.

A a a

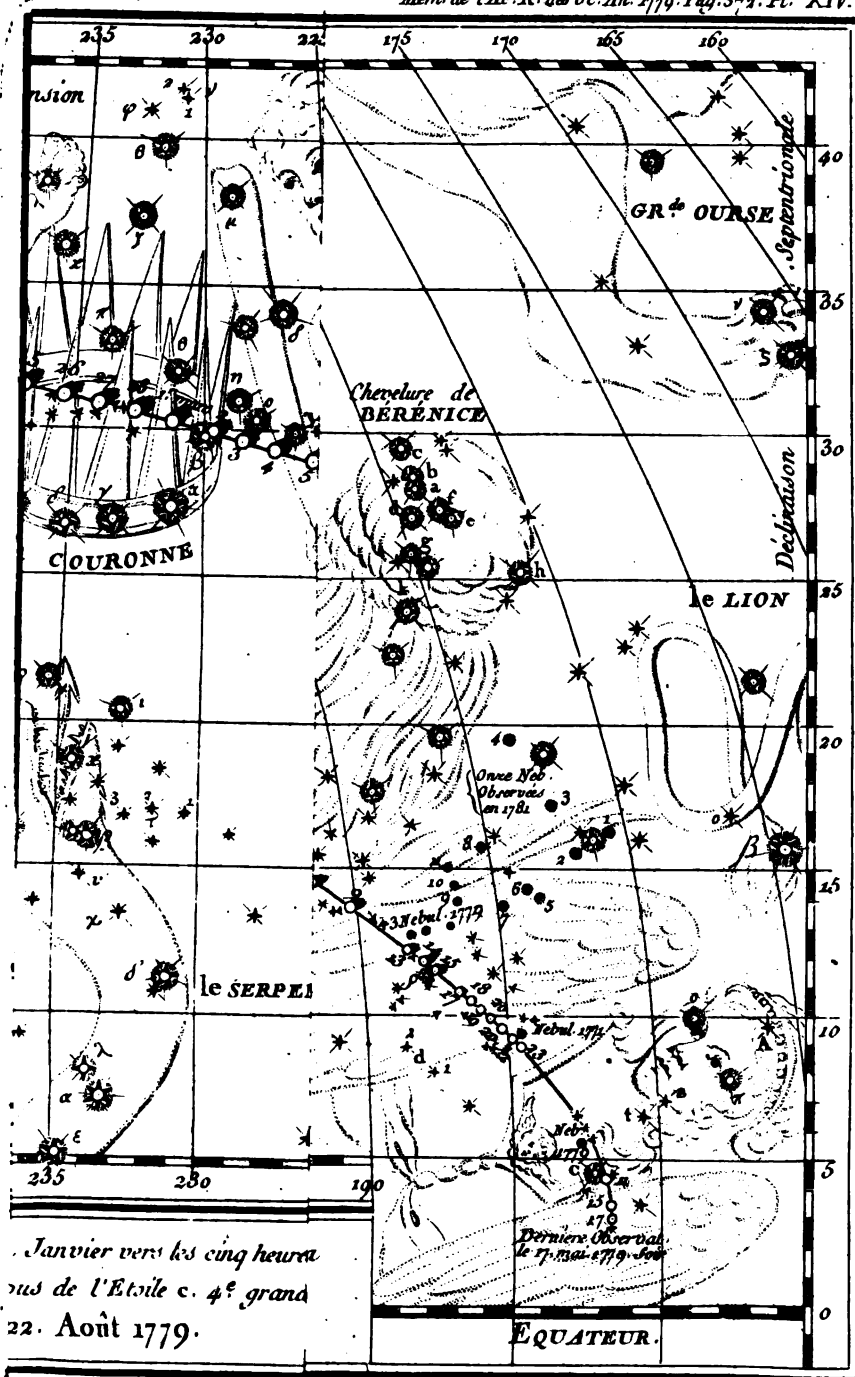
| Nombres des Étoiles. | Grandeur des Étoiles. | ASCENSION | | DÉCLINAIS. | | VARIATION | | DIFFÉRENCE | | Lettres de B A Y E R. de Nombres. | N O M S des CONSTELLATIONS | | | |
|----------------------|-----------------------|-----------|----------|--------------------------|------------------------|--------------------------|-------------------------|------------|-------|--------------------------------------|----------------------------------|----|-------------|--|
| | | droite. | Boréale. | annuelle. | | avec FLAMSTÉED. | | | | | | | | |
| | | | | En ASCENS. droite. | En DÉCLI- NAISON | En ASCENS. droite. | En DÉCLI- NAISON. | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | |
| D. | M. | S. | D. | M. | S. | S. Dtc. | S. Dtc. | M. S. | M. S. | | | | | |
| 47 | 5 | 216. | 32. | 58 | 23. | 44. | 39 | 40. 9 | 16. 1 | | | | | |
| 48 | 5 | 216. | 35. | 54 | 24. | 56. | 53 | 40. 6 | 16. 1 | | | | | |
| 49 | 7 | 216. | 41. | 24 | 28. | 26. | 23 | 39. 7 | 16. 1 | | | | | |
| 50 | 6 | 217. | 42. | 52 | 31. | 26. | 1 | 38. 6 | 15. 9 | | | | | |
| 51 | 7 | 217. | 45. | 22 | 31. | 28. | 33 | 38. 6 | 15. 9 | | | | | |
| 52 | 6 | 217. | 50. | 21 | 32. | 14. | 19 | 38. 2 | 15. 8 | | | | | |
| 53 | 6 | 217. | 59. | 59 | 25. | 27. | 2 | 40. 3 | 15. 8 | | | | | |
| 54 | 6 | 218. | 25. | 40 | 27. | 28. | 40 | 39. 7 | 15. 7 | — 0. 38 | + 0. 33 | 34 | du Bouvier. | |
| 55 | 3 | 218. | 50. | 47 | 28. | 0. | 42 | 39. 6 | 15. 6 | + 0. 23 | + 0. 11 | e | | |
| 56 | 7 | 219. | 7. | 39 | 28. | 27. | 38 | 39. 2 | 15. 6 | | | | | |
| 57 | 6 | 219. | 28. | 10 | 25. | 1. | 1 | 40. 2 | 15. 8 | | | | | |
| 58 | 5 | 219. | 39. | 41 | 25. | 14. | 40 | 40. 7 | 15. 4 | | | | | |
| 59 | 5 | 219. | 39. | 34 | 25. | 17. | 37 | 40. 1 | 15. 4 | | | | | |
| 60 | 7 | 219. | 57. | 30 | 23. | 42. | 18 | 40. 5 | 15. 4 | | | | | |
| 61 | 6 | 220. | 32. | 5 | 21. | 11. | 59 | 41. 1 | 15. 2 | | | | | |
| 62 | 7 | 220. | 48. | 55 | 30. | 9. | 20 | 38. 6 | 15. 2 | | | | | |
| 63 | 6 | 220. | 49. | 43 | 28. | 28. | 37 | 39. 1 | 15. 2 | | | | | |
| 64 | 6 | 220. | 52. | 52 | 32. | 48. | 9 | 37. 7 | 15. 2 | | | | | |
| 65 | 7 | 220. | 54. | 55 | 33. | 35. | 26 | 37. 5 | 15. 2 | | | | | |
| 66 | 6 | 221. | 16. | 26 | 32. | 54. | 50 | 37. 6 | 15. 1 | | | | | |
| 67 | 7 | 221. | 24. | 36 | 32. | 19. | 28 | 37. 8 | 15. 0 | | | | | |
| 68 | 7 | 221. | 32. | 9 | 33. | 43. | 9 | 37. 7 | 15. 0 | | | | | |
| 69 | 6 | 221. | 34. | 23 | 25. | 14. | 27 | 39. 9 | 15. 0 | | | | | |
| 70 | 6 | 221. | 34. | 8 | 25. | 17. | 39 | 39. 9 | 15. 0 | | | | | |
| 71 | 5 | 221. | 58. | 15 | 25. | 31. | 58 | 39. 8 | 15. 0 | | | | | |
| 72 | 6 | 222. | 9. | 59 | 27. | 42. | 40 | 39. 4 | 14. 9 | | | | | |
| 73 | 6 | 222. | 16. | 23 | 25. | 3. | 7 | 39. 9 | 14. 8 | | | | | |
| 74 | 6 | 222. | 49. | 58 | 32. | 33. | 55 | 37. 5 | 14. 7 | | | | | |
| 75 | 7 | 222. | 56. | 51 | 32. | 15. | 22 | 37. 5 | 14. 7 | | | | | |
| 76 | 5 | 223. | 5. | 13 | 25. | 53. | 0 | 37. 5 | 14. 6 | — 1. 30 | — 0. 1 | e | du Bouvier. | |
| 77 | 6 | 223. | 20. | 54 | 32. | 32. | 39 | 37. 4 | 14. 6 | | | | | |
| 78 | 6 | 223. | 21. | 48 | 34. | 6. | 18 | 36. 9 | 14. 6 | | | | | |
| 79 | 6 | 223. | 35. | 26 | 25. | 57. | 33 | 38. 8 | 14. 5 | | | | | |
| 80 | 6 | 223. | 43. | 46 | 29. | 56. | 20 | 38. 2 | 14. 5 | | | | | |
| 81 | 4 | 223. | 45. | 13 | 27. | 48. | 53 | 38. 9 | 14. 5 | — 0. 30 | + 0. 18 | ↓ | du Bouvier. | |
| 82 | 6 | 224. | 9. | 41 | 31. | 58. | 0 | 37. 4 | 14. 4 | | | | | |
| 83 | 4 | 224. | 22. | 38 | 25. | 43. | 50 | 39. 1 | 14. 6 | — 0. 1 | + 0. 9 | c | du Bouvier. | |
| 84 | 7 | 224. | 23. | 52 | 30. | 43. | 32 | 37. 8 | 14. 3 | | | | | |
| 85 | 6 | 224. | 39. | 40 | 29. | 21. | 23 | 38. 3 | 14. 3 | | | | | |
| 86 | 6 | 224. | 43. | 27 | 27. | 12. | 14 | 38. 9 | 14. 2 | + 0. 6 | + 3. 7 | b | du Bouvier. | |
| 87 | 6 | 224. | 58. | 25 | 25. | 30. | 19 | 39. 4 | 14. 2 | | | | | |
| 88 | 7 | 225. | 0. | 4 | 34. | 4. | 6 | 36. 6 | 14. 2 | | | | | |
| 89 | 7 | 225. | 25. | 9 | 33. | 54. | 57 | 36. 6 | 14. 1 | | | | | |
| 90 | 6 | 225. | 26. | 56 | 31. | 28. | 50 | 37. 4 | 14. 1 | | | | | |
| 91 | 7 | 225. | 30. | 14 | 25. | 4. | 42 | 39. 5 | 14. 0 | | | | | |
| 92 | 6 | 225. | 49. | 41 | 32. | 18. | 1 | 37. 1 | 14. 0 | | | | | |
| 93 | 6 | 226. | 17. | 36 | 32. | 36. | 44 | 36. 9 | 13. 9 | | | | | |
| 94 | 6 | 226. | 18. | 33 | 29. | 58. | 55 | 37. 8 | 13. 8 | — 0. 39 | — 0. 13 | χ | du Bouvier. | |
| 95 | 3 | 226. | 38. | 53 | 34. | 6. | 22 | 36. 3 | 13. 8 | — 2. 4 | — 2. 26 | χ | | |

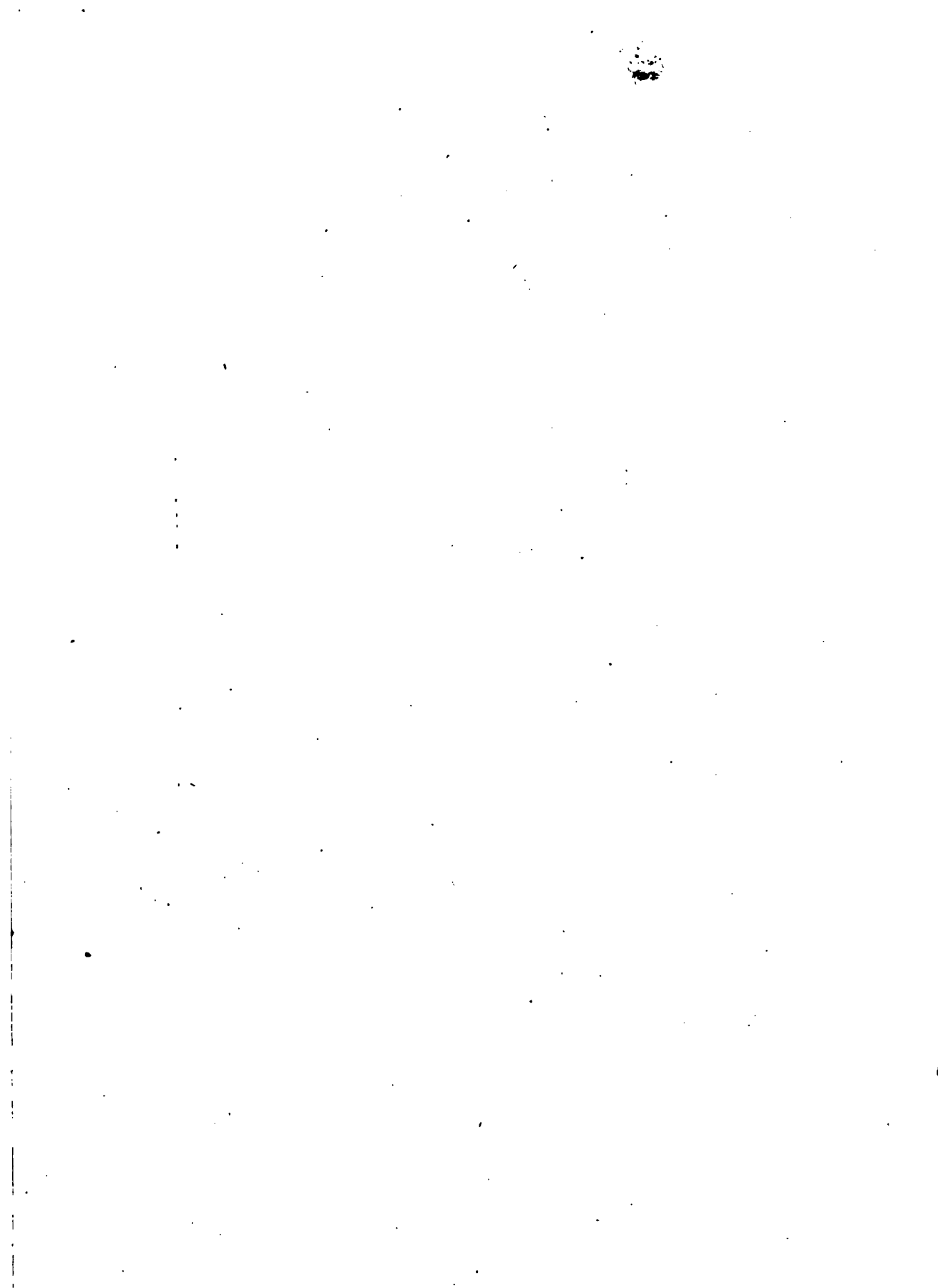
| Numéros des Étoiles. | Grandeur des Étoiles. | ASCENSION | | DÉCLINAIS. | | VARIATION | | DIFFÉRENCE | | Lettres de B A V R A. & Numéros. | N O M S. des CONSTELLATIONS. | | |
|----------------------|-----------------------|-----------|----------|--------------------------|------------------------|--------------------------|-------------------------|------------|----|-------------------------------------|------------------------------------|----|-----------------|
| | | droite. | Boréale. | annuelle. | | avec FLAMSTÉED. | | | | | | | |
| | | | | En ASCENS. droite. | En DÉCLI- NAISON | En Ascens. droite. | En DÉCLI- NAISON. | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | |
| D. | M. | S. | D. | M. | S. | S. Dct. | S. Dct. | M. | S. | M. | S. | | |
| 96 | 7 | 226. | 48. | 6 | 31. | 43. | 1 | 37. | 2 | | | | |
| 97 | 6 | 227. | 14. | 4 | 27. | 39. | 4 | 38. | 5 | | | | |
| 98 | 5 | 227. | 14. | 37 | 31. | 7. | 22 | 37. | 3 | | | | |
| 99 | 5 | 227. | 18. | 5 | 32. | 25. | 27 | 36. | 8 | | | | |
| 100 | 5 | 227. | 39. | 2 | 33. | 19. | 6 | 36. | 4 | | | | |
| 101 | 6 | 227. | 45. | 43 | 30. | 24. | 44 | 37. | 5 | | | | |
| 102 | 5 | 227. | 52. | 1 | 25. | 45. | 6 | 39. | 0 | | | | |
| 103 | 5 | 227. | 58. | 33 | 32. | 15. | 59 | 38. | 8 | | | | |
| 104 | 6 | 228. | 0. | 16 | 25. | 4. | 44 | 39. | 2 | | | | |
| 105 | 6 | 228. | 0. | 31 | 25. | 9. | 1 | 39. | 8 | | | | |
| 106 | 5 | 228. | 14. | 3 | 33. | 43. | 26 | 36. | 2 | — 2. 45 | — 0. 37 | 50 | du Bouvier. |
| 107 | 7 | 228. | 29. | 6 | 32. | 21. | 4 | 36. | 7 | | | | |
| 108 | 5 | 228. | 31. | 32 | 31. | 5. | 29 | 36. | 9 | + 0. 41 | — 0. 4 | n | de la Couronne. |
| 109 | 6 | 228. | 53. | 56 | 25. | 36. | 9 | 38. | 9 | | | | |
| 110 | 6 | 229. | 0. | 2 | 20. | 19. | 51 | 40. | 6 | | | | |
| 111 | 7 | 229. | 17. | 19 | 33. | 14. | 49 | 36. | 2 | | | | |
| 112 | 6 | 229. | 30. | 50 | 25. | 52. | 35 | 38. | 8 | | | | |
| 113 | 3 | 229. | 40. | 19 | 29. | 51. | 42 | 38. | 0 | — 1. 41 | — 0. 43 | β | de la Couronne. |
| 114 | 7 | 229. | 44. | 14 | 20. | 31. | 27 | 40. | 5 | | | | |
| 115 | 6 | 229. | 51. | 54 | 27. | 53. | 56 | 38. | 1 | | | | |
| 116 | 5 | 230. | 21. | 53 | 32. | 2. | 35 | 36. | 5 | | | | |
| 117 | 6 | 230. | 29. | 58 | 21. | 8. | 19 | 40. | 2 | | | | |
| 118 | 7 | 230. | 57. | 26 | 31. | 4. | 57 | 36. | 8 | | | | |
| 119 | 7 | 230. | 59. | 8 | 31. | 5. | 50 | 36. | 8 | | | | |
| 120 | 4 | 231. | 0. | 41 | 32. | 6. | 38 | 36. | 8 | — 1. 1 | — 0. 8 | θ | de la Couronne. |
| 121 | 1 | 231. | 20. | 44 | 27. | 28. | 3 | 38. | 0 | — 0. 16 | + 0. 17 | α | |
| 122 | 5 | 231. | 28. | 9 | 32. | 12. | 9 | 36. | 3 | | | | |
| 123 | 6 | 231. | 58. | 17 | 30. | 46. | 35 | 36. | 8 | | | | |
| 124 | 5 | 232. | 12. | 36 | 25. | 13. | 4 | 38. | 7 | | | | |
| 125 | 5 | 232. | 12. | 49 | 25. | 16. | 37 | 38. | 7 | | | | |
| 126 | 6 | 232. | 13. | 19 | 31. | 1. | 4 | 36. | 7 | | | | |
| 127 | 6 | 232. | 42. | 50 | 25. | 48. | 53 | 38. | 5 | | | | |
| 128 | 6 | 232. | 56. | 13 | 32. | 11. | 56 | 36. | 7 | | | | |
| 129 | 5 | 233. | 28. | 30 | 32. | 24. | 54 | 36. | 0 | | | | |
| 130 | 5 | 233. | 26. | 17 | 20. | 27. | 8 | 49. | 0 | | | | |
| 131 | 4 | 233. | 23. | 49 | 27. | 0. | 17 | 38. | 0 | + 0. 49 | — 0. 7 | γ | de la Couronne. |
| 132 | 5 | 233. | 36. | 21 | 32. | 5. | 46 | 36. | 2 | | | | |
| 133 | 5 | 233. | 40. | 35 | 25. | 10. | 10 | 38. | 6 | | | | |
| 134 | 6 | 233. | 40. | 45 | 25. | 4. | 8 | 38. | 6 | | | | |
| 135 | 5 | 233. | 49. | 14 | 22. | 8. | 32 | 39. | 6 | | | | |
| 136 | 5 | 233. | 49. | 23 | 33. | 13. | 10 | 35. | 6 | — 1. 1 | — 0. 18 | π | de la Couronne. |
| 137 | 6 | 234. | 34. | 38 | 31. | 15. | 40 | 36. | 3 | | | | |
| 138 | 7 | 234. | 46. | 13 | 33. | 41. | 39 | 35. | 3 | | | | |
| 139 | 6 | 234. | 49. | 34 | 32. | 25. | 22 | 36. | 0 | | | | |
| 140 | 4 | 235. | 6. | 0 | 26. | 44. | 22 | 35. | 8 | + 3. 18 | — 5. 8 | ♏ | de la Couronne. |
| 141 | 7 | 235. | 20. | 55 | 25. | 56. | 52 | 35. | 8 | | | | |
| 142 | 5 | 235. | 25. | 5 | 21. | 36. | 49 | 39. | 6 | + 0. 11 | — 1. 40 | ρ | du Serpent. |
| 143 | 6 | 235. | 52. | 31 | 29. | 34. | 0 | 36. | 7 | | | | |
| 144 | 7 | 236. | 23. | 53 | 32. | 59. | 32 | 35. | 4 | | | | |

| Numéros des Étoiles | Grandeur des Étoiles | ASCENSION droite. | | DÉCLINAIS. Boréale. | | VARIATION annuelle. | | DIFFÉRENCE avec FLAMSTÉED. | | Lettres de B A V E R A & Numéros. | N O M S des CONSTELLATIONS |
|---------------------|----------------------|----------------------|------------|------------------------|---------|------------------------|------------------|-------------------------------|-------------------|--------------------------------------|----------------------------------|
| | | | | | | En | En | En | En | | |
| | | D. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | S. Dtc. | ASCENS. droite. | DÉCLI- NAISON | ASCENS. droite. | DÉCLI- NAISON. | | |
| 243 | 7 | 264. 8. 12 | 31. 14. 23 | 34. 1 | 2. 0 | | | | | | |
| 244 | 6 | 264. 24. 21 | 25. 50. 15 | 36. 5 | 2. 0 | | | | | | |
| 245 | 7 | 265. 23. 8 | 31. 7. 13 | 34. 1 | 2. 0 | | | | | | |
| 246 | 5 | 265. 26. 29 | 29. 23. 1 | 34. 9 | 2. 0 | | | | | | |
| 247 | 6 | 266. 0. 39 | 32. 2. 34 | 33. 7 | 2. 0 | | | | | | |
| 248 | 5 | 266. 35. 50 | 26. 5. 19 | 34. 9 | 1. 6 | | | | | | |
| 249 | 7 | 266. 49. 7 | 32. 28. 35 | 33. 4 | 1. 1 | | | | | | |
| 250 | 4 | 267. 17. 20 | 29. 16. 17 | 35. 0 | 0. 9 | + 0. 50 | | - 1. 12 | | Σ | d'Hercule. |
| 251 | 7 | 267. 20. 26 | 33. 26. 38 | 33. 0 | 0. 9 | | | | | | |
| 252 | 7 | 267. 24. 25 | 32. 15. 33 | 33. 0 | 0. 9 | | | | | | |
| 253 | 6 | 267. 29. 30 | 32. 40. 44 | 33. 0 | 0. 9 | | | | | | |
| 254 | 7 | 267. 32. 4 | 30. 45. 40 | 34. 3 | 0. 9 | | | | | | |
| 255 | 7 | 268. 8. 20 | 33. 13. 58 | 33. 1 | 0. 7 | | | | | | |
| 256 | 7 | 268. 22. 14 | 33. 19. 34 | 33. 1 | 0. 7 | | | | | | |
| 257 | 6 | 269. 12. 7 | 33. 18. 21 | 33. 0 | 0. 3 | | | | | | |
| 258 | 5 | 269. 24. 29 | 32. 12. 48 | 33. 6 | 0. 2 | | | | | | |
| 259 | 5 | 269. 58. 23 | 30. 58. 51 | 34. 1 | 0. 1 | | | | | | |
| 260 | 5 | 270. 54. 47 | 31. 22. 28 | 34. 0 | 0. 3 | + 2. 41 | | + 0. 31 | | A | d'Hercule |
| 261 | 6 | 272. 16. 10 | 33. 28. 13 | 32. 2 | 0. 8 | | | | | | |
| 262 | 7 | 272. 41. 34 | 32. 58. 22 | 33. 3 | 0. 7 | | | | | | |
| 263 | 5 | 277. 8. 15 | 33. 17. 42 | 33. 2 | 0. 3 | | | | | | |
| 264 | 7 | 278. 4. 29 | 33. 30. 24 | 33. 2 | 2. 3 | | | | | | |
| 265 | 7 | 279. 11. 39 | 32. 58. 33 | 33. 4 | 3. 0 | | | | | | |
| 266 | 6 | 280. 24. 51 | 32. 15. 52 | 33. 3 | 3. 7 | | | | | | |
| 267 | 1 | 280. 29. 24 | 33. 7. 14 | 33. 3 | 3. 7 | - 1. 11 | | - 0. 29 | | β | de la Lyre. |
| 268 | | 281. 20. 50 | 32. 45. 59 | 33. 5 | 3. 9 | | | | | | nébuleuse. |
| 269 | 6 | 282. 11. 39 | 32. 10. 51 | 33. 8 | 4. 3 | | | | | | |
| 270 | 3 | 282. 40. 45 | 32. 24. 2 | 33. 8 | 4. 3 | + 0. 3 | | - 0. 15 | | γ | de la Lyre. |
| 271 | 6 | 283. 18. 21 | 32. 4. 19 | 34. 0 | 4. 6 | | | | | | |

Nota. La première des deux colonnes de la variation annuelle pour l'ascension droite, est additive + : la seconde, pour la déclinaison, est soustractive — depuis le n.^o 1 jusqu'au n.^o 260, & depuis ce dernier jusqu'au 271. additive +.







*M É M O I R E**S U R L E**MOYEN DE DISSOUDRE LA PLATINE**P A R L' A C I D E N I T R E U X.*

Par M. T I L L E T.

PENDANT que plusieurs Chimistes distingués s'occupent de l'examen de la Platine, qu'ils la rendent très-ductile, & obtiennent des succès sur plusieurs points intéressans qui concernent ce métal singulier, j'ai cru devoir le considérer sous un point de vue relatif au commerce des matières d'Or & d'Argent, & examiner si un Essayeur, sans sortir des bornes ordinaires de ses opérations, sans employer d'autres agens que ceux dont il est dans l'usage de se servir, ne pourroit pas dépouiller l'or & l'argent de la platine, & n'auroit pas plus de précautions à prendre dans son travail, en supposant ce dernier métal allié aux deux autres, que si l'or & l'argent n'étoient mêlés qu'avec du cuivre.

23 Juin
1779.

En attendant que je puisse rendre compte à l'Académie des expériences que j'ai déjà faites à cet égard, & que je me propose de continuer, je vais avoir l'honneur de lui exposer quelques faits, dont d'habiles Chimistes tireront meilleur parti que moi, & déduiront des conséquences que je ne suis pas capable de saisir.

P R E M I E R F A I T.

La platine, soit brute & dans son état naturel, soit devenue ductile par les procédés que M. le comte de Sickingen a fait connoître, & par ceux que M. le comte de Milly doit publier, la platine dans ces deux états, est parfaitement dissoluble dans l'esprit de nitre pur, & dépouillé de tout acide marin : ce premier fait a lieu lorsqu'on mêle une certaine

374 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
quantité d'or pur, & une plus grande quantité d'argent fin
avec la platine.

S E C O N D F A I T.

Si on ne mêle que de l'argent fin avec la platine, alors la dissolution est très-incomplète; la liqueur dissolvante se trouble, devient noire, & n'acquiert point de transparence, quel que long-temps qu'on la fasse bouillir sur le feu, même après le refroidissement, & quoiqu'on ait l'attention de la laisser assez long-temps dans le repos: le précipité noir qu'on trouve au fond du matras, la liqueur restant toujours trouble & ayant la couleur d'un brun-noirâtre, ce précipité, après avoir été lavé & recuit, est de véritable platine; il en a la couleur, &, selon les apparences, tous les caractères.

Il n'en est pas ainsi lorsqu'on mêle, par la voie de la fusion & d'une fusion parfaite, une certaine quantité d'or fin avec de la platine & de l'argent fin: la dissolution de la platine & de l'argent est complète; la liqueur devient transparente, même sur le feu, & l'or reste au fond du matras.

Si on précipite une partie de la dissolution d'un mélange d'or, d'argent & de platine par une petite quantité d'esprit de sel, on obtient un précipité d'un très-beau blanc, lequel séché, ne perd rien de sa blancheur *.

Si on précipite de nouveau, par l'huile de tartre par défaillance, la liqueur surnageante du premier précipité, on obtient un léger précipité en forme de *coagulum*, lequel séché, a la couleur d'un vert-pâle.

Si on précipite d'abord l'autre partie de la dissolution des trois métaux réunis par l'huile de tartre par défaillance, on a sur le champ un précipité abondant, sous la forme de flocons blancs, lesquels séchés, restent d'un blanc-sale, & qui approche même de la couleur grise.

* On verra dans le Mémoire, beaucoup plus étendu, qui suivra celui-ci, que ce premier précipité est de l'argent combiné avec l'acide marin & dépouillé de platine.

Mes premières expériences n'ayant roulé que sur de petites quantités, il ne m'a guère été possible d'examiner séparément les précipités de la dissolution dont je viens de parler; je me suis contenté d'abord, en les réunissant & les fondant ensemble avec un peu de borax, d'en obtenir un bouton d'argent que j'ai fait dissoudre dans l'esprit de nitre: mon but étoit, comme on le sent bien, d'y reconnoître la présence de la platine qui avoit été d'abord dissoute avec l'argent dans la liqueur qui avoit fourni ces précipités; ce bouton d'argent ne contenant point d'or, m'a présenté le même phénomène dont j'ai déjà parlé; l'esprit de nitre dans lequel je l'ai mis en dissolution, s'est un peu troublé, proportionnellement à la petite quantité de platine que le bouton d'argent contenoit; il n'a point repris la transparence, & a laissé au fond du matras un petit dépôt noir, tel qu'il s'annonce quand on fait dissoudre dans l'esprit de nitre un mélange composé seulement d'argent & de platine. Il paroît donc prouvé que la platine, qui n'est que foiblement attaquée par l'esprit de nitre lorsqu'on ne la mêle qu'avec de l'argent, est dissoute aussi complètement par cet acide que l'argent même, lorsque l'or fait partie du mélange, puisqu'elle s'est annoncée dans la dissolution du petit bouton d'argent dont je viens de parler, qui, lui-même, avoit subi avec elle la première dissolution. Il paroît d'un autre côté, qu'il seroit difficile aujourd'hui de regarder l'or comme faisant une partie essentielle & constitutive de la platine, puisqu'on ne remarque aucune augmentation de poids sur la matière d'or employée dans les expériences dont il s'agit: je ne dis pas cependant qu'on ne puisse extraire de la platine quelques particules d'or, comme elles se trouvent tous les jours dans d'autres matières que la platine, & où elles ne sont considérées que comme étrangères à ces mêmes matières qui les renferment; mais tout semble annoncer, par les premières expériences que j'expose ici sommairement, que l'or, loin de jouer un rôle essentiel dans la platine, n'en occasionne la dissolution complète, qu'autant qu'indissoluble lui-même par l'esprit de nitre, il se joint à la platine pour

mieux l'abandonner ensuite à toute l'action de cet acide. Par une suite nécessaire de cette observation, l'eau régale sera seule le véritable dissolvant de l'or; elle le sera aussi, à la vérité, de la platine pure; mais l'esprit de nitre aura toute son action sur celle-ci, par son mélange avec l'or & l'argent, tandis que l'or résistera à ce même acide, & que les deux autres métaux qui étoient confondus avec lui, éprouveront une véritable dissolution.

Je dois faire observer ici, d'après le premier travail sur cet objet dont je ne me suis occupé encore que d'une manière générale, qu'il est difficile de séparer totalement la platine de l'or, par la voie d'un premier départ, & en conservant à l'ordinaire l'or en cornet: la platine en effet recelée dans les interstices de ce métal indissoluble par l'esprit de nitre, y résiste dans quelques-unes de ses parties, & ne cède enfin qu'après un second, & quelquefois un troisième départ; mais si on prend le parti d'employer pour un seul départ cinq fois autant d'argent qu'on a mis d'or & de platine pour l'expérience, alors on obtient l'or en chaux, & toute la platine se trouve ordinairement dissoute avec l'argent. Ce dernier moyen exige de l'attention pour ne rien perdre de la quantité déterminée d'or qu'on a employée: j'espère qu'il sera possible de conserver l'or dans son état de pureté, & sous la forme de cornet, en employant une quantité d'argent suffisante pour qu'elle rende la platine accessible de toutes parts à l'esprit de nitre, & en ménageant l'action de cet acide, de manière qu'il n'attaque d'abord que faiblement les deux métaux dissolubles, & n'agisse ensuite avec toute sa force, qu'autant que le cornet dépouillé en grande partie de la platine & de l'argent, ne donnera lieu qu'à une action modérée de l'acide nitreux. Je me réserve volontiers le travail que pourra exiger l'expérience & le tâtonnement pour cet objet particulier, qui tient à l'opération des Essayeurs & à la sûreté du Commerce. Je ne doute point que quelques Chimistes plus éclairés que moi, ne s'occupent dans la suite du soin de considérer la platine ainsi dissoute par l'acide nitreux, à la faveur de son

union avec l'or & l'argent : je profiterai avec plaisir de leurs lumières, & sans perdre de vue, moi-même, ce point curieux de recherche, je tournerai principalement mon application vers celui qui concerne la pratique, en cherchant à y mettre, s'il est possible, autant d'exactitude que de simplicité.

Je finis par observer que la platine résistant, comme l'or & l'argent, à l'action de la litharge dans la coupelle, on ne sauroit découvrir, par ce moyen, s'il entre de la platine dans l'argent auquel on fait subir cette opération : mais, d'après les expériences dont je viens de parler, on s'apercevra bientôt de la présence de la platine dans l'argent, si on fait dissoudre dans l'esprit de nitre une petite partie du mélange de ces deux métaux ; la liqueur se troublera, restera opaque, & il se fera un précipité noir au fond du matras, qui, après un recuit, sera bientôt reconnu s'il est dû à la platine ; au lieu que la liqueur seroit devenue claire & transparente après la dissolution, sans donner aucun précipité, si l'argent avoit été employé seul & dans son état de pureté.



R É F L E X I O N S

S U R L E S

OBSERVATIONS DE LA DÉCLINAISON

ou Variation de l'Aimant dans l'Océan Atlantique ,

FAITES À LA MER.

Par M. L E M O N N I E R.

Lû
le 3 Mars
1779.

J'AI examiné avec soin les variations observées par Don Antonio d'Ulloa, dans la traversée de Cadiz à la Vera-Cruz, & à son retour en l'année 1778; & aux remarques intéressantes qu'a faites ce Commandant de la flotte Espagnole, à bord du vaisseau de guerre l'*Espagne*, j'ai cru devoir ajouter les réflexions suivantes.

1.^o La variation observée de 19^d 42' au mois de Mai, à Cadiz, étoit à peine, en 1776, de 1 degré moins grande vers l'ouest, qu'à Paris; au lieu qu'à Londres ç'a été tout le contraire.

2.^o M. d'Ulloa étant par 18 degrés $\frac{1}{2}$ de latitude boréale, 36 à 39 degrés à l'ouest du pic de Ténériffe, la variation lui a paru nulle, après quoi elle a changé de dénomination ou du Nord à l'Est. On pourroit donc la placer sur la Carte de Halley, à 52 degrés $\frac{1}{2}$ à l'ouest du méridien de Londres; mais la Carte des variations du même Auteur, donne pour 1700 la variation nulle sous la longitude de 30 degrés $\frac{1}{2}$ à cette même latitude de 18 degrés $\frac{1}{2}$ boréale: ainsi la ligne sans déclinaison se seroit avancée vers l'Ouest à cette latitude de 21 degrés $\frac{2}{3}$ en soixante-seize ans, ce qui ne s'étant trouvé tout au plus que d'environ 19 degrés sous l'équateur magnétique, il nous faut encore examiner ces observations au retour, quoique par une latitude plus grande.

Le 24 Juillet, M. d'Ulloa atterrant au port de la Vera-Cruz, a trouvé pareillement par les amplitudes orives &

occales, la variation 7 degrés $\frac{1}{2}$ au Nord-est; ce qui diffère à peine de $\frac{1}{4}$ de degré en excès, de ce qui avoit été trouvé en 1768 par les Bouffoles qu'avoit pour lors feu l'abbé Chappe.

En 1778, M. d'Ulloa à son retour, a compté ses longitudes du cap de Cannaveral, situé à la côte de la Floride ainsi qu'à l'embouchure du canal de Bahama, & la variation lui a paru nulle par 28^d 57' de latitude, étant à l'Est de près de 19 degrés à l'égard de ce cap.

Par ces observations postérieures, la réduction devient bien moins sensible pour la variation de la ligne sans déclinaison, vers l'Ouest depuis 1700, laquelle n'auroit été que de 7 $\frac{1}{2}$ à 9^d seulement, à 29 degrés de latitude sur la Carte de Halley; c'est-à-dire près de la moitié moins grande qu'elle n'a paru aux François & aux Anglois, sous le méridien & à l'Équateur magnétique, en soixante-quinze années.

Prenant un milieu, on auroit donc sous le tropique du Cancer, ou pour 24 degrés tout au plus de latitude boréale, le mouvement de la ligne sans déclinaison, en soixante-dix-sept années, d'environ 15 degrés, tandis que sous l'équateur magnétique on l'a trouvé plusieurs fois de 19 degrés tout au plus, pendant les mêmes intervalles de temps, à très-peu de choses près.

Comme M. d'Ulloa s'approchoit très-fort de l'île des Bermudes à son retour, on pourroit conjecturer avec raison, d'après les observations que nous venons de rapporter, comme aussi d'après celles de la nouvelle Angleterre qui ont été rendues publiques, que la ligne sans déclinaison ne se recourbe pas à beaucoup près autant que l'a supposé M. Halley sur sa Carte réduite, savoir vers les extrémités boréales de cette ligne sans déclinaison.

On trouve dans le deuxième volume des Voyages, publié à l'Imprimerie du Louvre en 1778, que six ans auparavant, à 73 degrés $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{3}$ de longitude à l'Ouest du Méridien de Paris, & par 30^d 17 à 38' de latitude boréale, la variation nord-est n'étoit plus que de 2 degrés $\frac{3}{4}$; mais M. d'Ulloa a trouvé à 75 degrés $\frac{1}{2}$ & à 73 degrés $\frac{1}{2}$ de longitude &

380 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

par $29^{\text{d}} 36'$ à $11'$ de latitude, la variation au nord - est $3^{\text{d}} 37' \frac{1}{2}$. Il y auroit donc ici près d'un degré en excès, & même deux tiers de degrés au-delà, puisqu'en six ans la variation a dû changer de toute cette dernière quantité : en un mot, M. d'Ulloa l'auroit trouvée trop grande, M.^{rs} Verdun, Borda & Pingré étant par $29^{\text{d}} \frac{1}{2}$ de latitude.

DÉCLINAISON DE L'AIGUILLE AIMANTÉE,

Observée à Paris en 1779.

Le 22 Mars, par un hâle moins vif qu'à l'ordinaire, & avec la nouvelle Boussole qu'on a décrite au volume précédent, nous avons observé, M.^{rs} le Chevalier Schamps, Cassini le fils & moi, à 11 heures du matin, en pointant plusieurs fois la lunette au troisième Moulin à Montmartre, toutes réductions faites, la déclinaison $20^{\text{d}} 30'$ à l'Observatoire.

Le 14 Juin, par un temps variable ou mêlé de quelques légères ondées, à la même heure que ci-dessus, à peine a-t-on trouvé, en recommençant plusieurs fois, un excès de 4 minutes; & adoptant la dernière observation, savoir lorsqu'on a pointé au troisième Moulin à Montmartre, on aura, toutes réductions faites, la variation ou déclinaison de l'aiguille du Nord à l'Ouest $20^{\text{d}} 34'$.

Nous aurions bien désiré comparer cette aiguille bien choisie avec différentes chapes d'agate, comme aussi avec une autre aiguille de pareille longueur, mais d'un tiers ou de la moitié moins pesante; ce qu'il faudroit sur-tout comparer entr'elles vers 3 heures du soir & par un temps calme ou plutôt tel qu'il le faut choisir pour des recherches aussi délicates.



M É M O I R E

S U R L A

LONGITUDE DE LA NOUVELLE ZEMBLE.

Par M. L E M O N N I E R.

LE lieu où les Hollandois ont hiverné à la nouvelle Zemle, à 76 degrés de latitude boréale*, a été fixé en ce siècle-là, par la conjonction observée de la Lune à Jupiter, 5 heures précisément, comme on l'a déjà dit, à l'orient de Venise; on aura par conséquent, à l'égard de l'île de Fer, que nous supposons 20 degrés $\frac{1}{2}$ à l'ouest du méridien de Paris, 105^d 15' de longitude orientale: mais les Ephémérides ne représentoient souvent alors qu'à un demi-degré les longitudes de la Lune & de Jupiter, & c'est ce qu'il reste à examiner, ou du moins à comparer avec le résultat des 5 heures de différence en longitude assignée à l'égard du méridien de Venise, représenté par les Ephémérides de Schala.

30 Juin
1779.

Je trouve, quant à la longitude de Jupiter, qu'il vaut mieux la déduire ici des observations de Tycho, que des Tables astronomiques; mais n'ayant plus les mêmes avantages, faute d'un mouvement égal pour la Lune, & uniforme pour ainsi dire, que Tycho n'observa que plusieurs jours après, j'aurai recours aux périodes de dix-huit ans dix à onze jours, pour en déduire, s'il est possible, l'erreur des Tables lunaires, le 24 Janvier 1597, au soir.

Soit d'abord le $\frac{8}{18}$ Janvier 1597, la distance de Jupiter *Aldebaran*, observée par Tycho à 6^h 2' $\frac{2}{3}$ du soir, de 32^d 40', & sa hauteur méridienne 45^d 10' 10": ayant trouvé que l'ascension droite de l'Étoile devoit être alors 63^d 16' 3", j'en ai conclu celle de Jupiter de 29^d 56' 8", & par conséquent, sa longitude 8 1^d 43' 5" tout au plus.

* Voyez sur-tout *Linshot* & la première des deux Cartes de l'édition latine de ce Voyage, publiée *in-folio* à Amsterdam, en 1592.

Mais le $\frac{21}{31}$ Janvier, je trouve aussi par les distances observées à la même Étoile, la différence d'ascension droite $3^d 4' 15''$, ce qui, joint à sa déclinaison boréale, donne la longitude de Jupiter, $8^d 2' 59' 56''$; or il est visible par-là, que le 24 Janvier 1597, au moment de la conjonction, la longitude de Jupiter auroit été $8^d 19' \frac{3}{4}$ ou $20'$, & son ascension & déclinaison boréale $30^d 29'$; & $11^d 18'$ tout au plus. Tels sont les élémens nécessaires, comme j'en ai averti ci-dessus, pour trouver l'ascension droite du milieu du ciel, l'abaissement de Jupiter sous l'horizon, & l'heure vraie du Soleil, laquelle seroit $6^h 17' \frac{2}{3}$ du matin, si l'azimut ou l'aire de vent où la conjonction a paru se faire, avoit été bien observée, savoir de 11 degrés $\frac{1}{4}$, à compter du Nord vers l'Est.

On voit par-là, qu'il y a au moins 6 heures $\frac{1}{4}$ d'incertitude dans l'heure vraie, assignée par les Hollandois, que leurs sabliers ou horloges dentées ou bien à rouages, ne leur donnoient pas alors trop facilement, outre qu'ils ne nous ont pas assez détaillé les preuves multipliées des corrections qu'ils ont dû faire à ces horloges: en effet, il est certain que Jupiter a dû passer au vrai méridien du côté du Nord, à $5^h 31' 48''$ du matin, & que l'azimut de 11 degrés $\frac{1}{4}$ doit être assurément du Nord vers l'Est; autrement il en faudroit ôter encore trois autres quarts-d'heure, si l'on vouloit supposer l'azimut de 11 degrés $\frac{1}{4}$ à l'ouest du méridien, du côté du Nord. Comme les Hollandois nous assurent, & comme ils nous donnent en effet les preuves les plus vraisemblables, qu'il y avoit un aire de vent à compter du Nord sur leur compas rectifié, il s'ensuivroit donc de l'heure qu'on vient de trouver, savoir $6^h 17' \frac{2}{3}$, que la longitude de la nouvelle Zemble seroit encore 4. degrés $\frac{1}{2}$ plus grande vers l'Est, qu'elle n'a été conclue par leur premier & excellent Pilote, à l'aide des Éphémérides de Schala.

Il nous reste donc à examiner encore s'il y auroit quelques corrections importantes à faire à cette longitude, à cause de l'erreur des Tables. Il a été douteux jusqu'ici qu'elle pût être

absolument nulle, & les Adversaires du Professeur royal, J. Morin, ont prétendu plus de quarante ans après, qu'elle devoit être quelquefois énorme, malgré la supériorité des Rudolphines de Képler, sur les Tables pruteniques, jointe aux premiers rayons de faveurs littéraires que S. M. Louis XIII & le Cardinal de Richelieu, Surintendant de la Marine, aient voulu dès-lors accorder à la science des Longitudes.

Je trouve d'abord dans mes Observations de l'année 1741, déjà publiées, l'erreur des Tables Newtoniennes en défaut de 3 minutes $\frac{1}{4}$, puisqu'elles donnent, le 23 Mars à $5^h 47' 56''$ de temps moyen, la longitude de la Lune $2^{\circ} 28' 34'' 9'' \frac{1}{2}$, au lieu que l'observation nous donne $2^{\circ} 28' 37'' 25'' \frac{1}{2}$; mais à cause de l'accélération du mouvement de la Lune, depuis le temps de Tycho jusqu'alors, jointe à quelques autres causes, dont on aura occasion de parler, l'état de l'orbite lunaire ayant varié depuis la fin de Janvier 1597, à celle du mois de Mars 1741, ces circonstances nous empêchent d'admettre ici la même erreur des Tables qu'on vient de découvrir, en la rapportant à l'année 1597. Voyez Gassendi, *vol. IV*.

Je ne trouve rien, comme je l'ai dit, au temps de cette conjonction parmi les observations de Tycho - Brahé, & environ trente-six ans après, je ne vois pas qu'Ismaël Bouillaud ait saisi quelques occultations correspondantes. En 1669 & 1687, la Lune ne fut point observée à pareille distance du Soleil; mais enfin, je trouve une conjonction apparente de la Lune à Jupiter, dans les Registres manuscrits de M. de la Hire, laquelle a été déterminée à l'Observatoire royal, le 2 Mars 1705, à $10^h 38' 8''$ de temps vrai. Comme la quadrature de Jupiter au Soleil, se trouve dans les mêmes Registres, observée le 6 Mars suivant, à $5^h 56' 51''$ de temps vrai, j'en ai déduit, en supposant le lieu du Soleil $(16^d 0' 10''$, & les différences d'ascensions droites & de déclinaisons observées, la longitude de π $17^d 24' 25''$; d'où il m'a été facile, à l'aide des Tables de Halley, d'établir la longitude de π $17^d 7' 49''$ pour l'instant de la conjonction observée le 2 Mars au soir: les Tables des Institutions donnent ce

384 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

jour-là, à $10^h 50' 38''$ de temps moyen, la longitude de la Lune, $\Pi 17^d 43' 52'' \frac{1}{2}$, avec une latitude boréale de $0^d 56' 8''$. L'angle parallaxique, dans l'hypothèse de la Terre aplatie de $\frac{1}{200}$, étoit $51^d 49' 27'' \frac{1}{2}$; d'où l'on déduit la longitude apparente de la Lune, $\Pi 17^d 5' 57'' \frac{1}{2}$: or M. de la Hire assurant, & même par une figure faite à dessein, que Jupiter lui a paru dans la ligne des cornes, ce qui indique la conjonction apparente avec la Lune, & l'incertitude d'une pareille observation ne pouvant guère influencer que d'une minute de temps, c'est-à-dire d'une demi-minute de degré sur la longitude de la Lune, il doit s'ensuivre que l'erreur des Tables Newtoniennes étoit en 1705, le 2 Mars au soir, de 1 minute $\frac{7}{8}$ en défaut ou négative; on peut donc admettre, selon les deux observations de 1705 & 1741, qu'elle devoit être encore moindre en 1597.

J'ai donc calculé le lieu de la Lune, sur les Tables des Institutions, le 24 Janvier 1597, pour $12^h 32'$ de temps moyen, au méridien de Paris, c'est-à-dire en supposant d'abord la nouvelle Zemble $5^h 44' \frac{1}{2}$ plus orientale, & j'ai trouvé sa longitude $8^d 20' 19'' \frac{1}{2}$; celles de Mayer donnent $8^d 21' 44'' \frac{1}{2}$; mais la longitude de Jupiter, déduite des observations de Tycho, étoit alors $8^d 19' \frac{1}{4}$ ou $20'$: ainsi dans la première hypothèse, qui est celle des Hollandois, savoir, que la conjonction de Jupiter à la Lune se seroit faite le 25 à 6 heures du matin, on auroit la longitude géographique de la nouvelle Zemble, au port de la Glace, à très-peu de chose près, la même que les $105^d 15'$ trouvés ci-dessus, ou plutôt $106^d 35'$, & 1^d à peine plus grande selon les Tables de Mayer,

Mais si l'on adopte pour l'heure de la conjonction, $6^h 17' \frac{2}{3}$ du matin à la nouvelle Zemble, la longitude de la loge des Hollandois se trouvera $4^d 25'$ ou $5^d \frac{1}{2}$ plus avancée.

Il nous reste à considérer encore ici l'effet de la parallaxe, & sur-tout celui de la réfraction, laquelle étant extraordinaire, a dû agir puissamment, dans le sens opposé à l'effet de ces parallaxes.



SECOND

SECONDE MÉMOIRE

SUR LE

MOYEN DE DISSOUDRE LA PLATINE

PAR L'ACIDE NITREUX,

*Et sur les Déchets extraordinaires qu'éprouve ce métal
par l'effet de cette dissolution.*

Par M. TILLET.

JE rendis compte à l'Académie, le 23 Juin 1779, de mes premières observations sur la dissolution de la Platine dans l'acide nitreux, à la faveur du mélange de ce métal avec une certaine quantité d'or & d'argent : je ne pus lui présenter alors que quelques faits principaux, en m'engageant à répéter mes expériences sur cette matière, à les varier, d'après les faits nouveaux qui pourroient me frapper, & à conduire sur-tout mon travail vers l'objet utile, qui peut seul donner quelque prix aux recherches dont il s'agit.

Je n'ai donc rien négligé d'abord pour m'assurer de nouveau des deux faits principaux que j'ai avancés : le premier consiste en ce que j'ai donné comme absolument constante la dissolution parfaite de la platine dans l'acide nitreux, lorsque ce métal a été mêlé intimement avec de l'or & de l'argent dans des proportions convenables ; le second est relatif au mélange de l'argent seul avec la platine, duquel il ne résulte, ainsi que je l'ai dit, qu'une dissolution très-imp parfaite, si l'on fait usage également de l'acide nitreux ; & cette opération incomplète a toujours lieu, quelque concentré que soit cet acide, quoiqu'on l'ait plus ou moins affoibli, & quelque action qu'on ait tâché de lui donner, tant par une chaleur considérable, que par une ébullition long-temps soutenue.

N'ayant aucun doute sur la dissolution parfaite de la platine

Mém. 1779.

Ccc

dans l'acide nitreux, quand l'or fait partie du mélange, j'ai voulu me rendre certain d'une manière bien positive de la dissolution réelle d'une partie de la platine dans l'acide nitreux, lorsque ce métal n'étoit mêlé qu'avec de l'argent : je voyois très-bien qu'une grande partie de la platine précipitée en poudre noirâtre, n'avoit éprouvé qu'une division mécanique; mais je n'étois pas sûr que la portion de ce métal, restée dans la liqueur, y fût réellement dissoute, & je pouvois soupçonner avec quelque vraisemblance, que réduite en particules extrêmement atténuées par l'effet du dissolvant, elle y étoit en état de simple suspension & disposée à se précipiter d'elle-même après un certain temps : j'étois d'autant plus fondé dans cette présomption, que l'acide nitreux, après toute son action sur un mélange d'argent & de platine, reste long-temps fort trouble, même après son refroidissement; que les particules les plus atténuées du métal ne se précipitent que lentement; que la liqueur ne s'éclaircit qu'après quelques jours de repos, mais en conservant toujours une couleur brune & assez foncée pour laisser quelque incertitude sur une véritable dissolution. J'employai donc le moyen qui me parut le plus propre à dissiper mes doutes à cet égard : après avoir laissé reposer assez long-temps l'acide nitreux, dans lequel j'avois fait dissoudre de l'argent mêlé avec un peu de platine, je versai la liqueur aussi claire que je pus l'obtenir, sur un filtre de papier assez serré & que j'avois plié en quatre, afin que d'une filtration plus lente & plus gênée il n'en résultât qu'une liqueur avec laquelle les métaux fussent intimement combinés; j'étendis dans une grande quantité d'eau toute la liqueur que je retirai de cette filtration, & après l'avoir versée dans une terrine, j'y plongeai une plaque de cuivre; l'argent, comme on sent bien, ne tarda pas à se précipiter, & la platine qui avoit passé avec lui à travers le filtre, s'annonça également au-dessus de l'argent par des caractères que je reconnus, & dont un grand nombre d'expériences précédentes m'avoit averti. J'aurai lieu de revenir, dans la suite de ce Mémoire, sur la précipitation de l'argent & de la platine par le moyen

du cuivre, & de faire remarquer que ce procédé, relativement à la platine, n'est pas le meilleur que l'on puisse employer : il suffit pour ce moment-ci, qu'on regarde comme constant que la portion de platine restée dans l'acide nitreux, après la dissolution d'un mélange de ce métal avec de l'argent seulement, après le dépôt qui s'est formé au fond du matras, & lorsque la liqueur s'est autant éclaircie qu'il est possible qu'elle le soit, il suffit, dis-je, qu'on reconnoisse que cette petite portion de platine est réellement dissoute dans l'acide, & l'est aussi parfaitement que l'argent, tandis que la plus grande partie de la platine employée dans le mélange, n'étant à proprement parler que divisée, se précipite bientôt au fond du matras, perd beaucoup moins de son premier état que celle qui a éprouvé une véritable dissolution, & souffre par conséquent beaucoup moins de déchet que celle-ci, lorsqu'il s'agit de la rétablir dans l'état métallique & souvent ductile dont elle jouissoit.

Les nombreuses expériences que j'ai faites pour constater la dissolution de la platine par l'acide nitreux, ont roulé principalement sur des mélanges où ce métal étoit joint à de l'or & de l'argent : si j'en ai fait quelques-unes sur un mélange d'une petite portion de platine & d'une quantité plus ou moins considérable d'argent fin seulement, je n'y ai été conduit que par la simple curiosité ; j'y ai eu pour but de considérer les cristallisations auxquelles ce dernier mélange donne lieu, & qui m'ont paru propres à caractériser au premier coup-d'œil, l'argent qui contient un peu de platine ; ces cristallisations ne sont pas de nature, il est vrai, à devenir une règle pour déterminer la quantité précise de platine qu'un lingot d'argent peut contenir ; mais elles préviennent utilement sur une espèce d'alliage qu'on ne soupçonneroit jamais sans ces caractères extérieurs, & avertissent alors de recourir à une opération différente de celle de la coupelle, si l'on veut séparer la platine de l'argent qui la contient ; ces cristallisations une fois reconnues, comme un effet assez singulier qui décele la platine, le mélange de ce métal avec l'argent

n'a plus rien qui intéresse. La séparation de ces deux métaux n'est pas possible par la voie de la coupelle, & on n'y parvient que difficilement par le moyen des acides. Le seul avantage que paroît offrir un alliage de cette espèce, c'est que l'argent fin acquiert de la consistance & du ressort par son union avec la platine pure, sans perdre beaucoup de sa ductilité, & en conservant dans le mat & le bruni, la couleur tranchante dont on sait que l'argent est susceptible.

S'il est peu de circonstances où l'on trouve quelque avantage à unir la platine avec l'argent dans de certaines proportions; & si d'ailleurs l'opération par laquelle on parvient à séparer ces deux métaux, demande un temps assez long, exige des soins pour qu'il n'en résulte pas beaucoup de déchets, & n'a pas la simplicité qu'on y désireroit, parce que la voie de la dissolution, à laquelle seule on peut recourir, ne conduit pas sur le champ à des produits bien distincts; il n'en est pas ainsi du mélange de ces métaux lorsque l'or s'y trouve joint, & qu'il s'agit de les obtenir tous les trois séparément.

Il faut observer d'abord qu'il ne convient point en général d'associer l'or à la platine, & qu'il est de l'intérêt du Commerce que le premier de ces métaux soit dépouillé des moindres parties du second, non-seulement parce qu'il est d'un prix supérieur à celui de la platine, mais encore par la raison que ce dernier métal altère sensiblement la riche couleur de l'or, & le fait d'une manière plus désagréable que le cuivre de rosette: l'or, à la vérité, acquiert toujours de la dureté & du ressort par son union avec la platine; mais cette propriété, avantageuse quelquefois, peut lui être procurée par d'autres métaux & d'une manière plus marquée que la platine ne peut la lui donner. Si l'on suppose cependant un mélange accidentel ou formé à dessein d'or, d'argent & de platine, & qu'il soit question de les séparer par le moyen de l'acide nitreux, alors on aura une dissolution complète des deux derniers de ces métaux; on obtiendra par ordre des précipités bien distincts, & il sera facile de faire reparoître chacune de ces substances dans l'état métallique qui leur est particulier.

Tels sont les motifs qui m'ont déterminé à ne prendre pour objet principal de mes expériences que des mélanges des trois métaux, & d'en varier les proportions afin de saisir celle où la platine attaquée avec plus de succès, pourroit être séparée nettement des deux autres métaux, qui ne se trouvoient avec elle que pour en faciliter la dissolution.

Je ne détaillerai point ici les expériences sans nombre que j'ai faites, tant en petit qu'un peu en grand, pour bien connoître les faits que je desirois de constater : comme rien ne s'y est démenti, à l'égard de la dissolution bien réelle de la platine dans l'acide nitreux pur, & d'une dissolution plus parfaite peut-être qu'on ne l'obtient par l'eau régale lorsqu'on fait attaquer la platine seule par les deux acides réunis, je n'exposerai les détails que de quelques-unes de mes expériences ; ils suffiront sans doute pour qu'on puisse bien juger des conséquences que j'en ai tirées, & pour que des Chimistes plus éclairés que moi perfectionnent mon travail avec moins de peine que je n'en ai eu à l'ébaucher.

Quoique les expériences en petit, ne conduisent pas ordinairement à des résultats sur lesquels il soit prudent de compter, cependant du scrupule dans les recherches, des instrumens faits avec précision, & une égalité assez constante dans les produits, sont une présomption favorable pour les conséquences qu'on en tire : alors une seule expérience en grand qui quadre avec une multitude d'autres, lesquelles n'ont roulé que sur de petites quantités de matière, fait entrer, pour ainsi dire, celles-ci dans le nombre des épreuves exécutées en grand, & achève la conviction.

Je n'employai donc d'abord pour mes expériences que 10 ou 11 grains d'or fin, 1 grain ou 2 de platine, & 30 ou 36 grains d'argent fin. Je dois avertir que la platine dont je fis usage, étoit ductile & aussi pure, je crois, qu'il est possible de l'obtenir : mon dessein étant de la dissoudre complètement par l'acide nitreux, j'avois intérêt de ne l'employer qu'autant qu'elle étoit bien dépouillée de tout ce qui pouvoit être attaqué naturellement par ce même acide, afin que je

même disparaître dans les parties atténuées, dans le précipité presque sans consistance qui résulte de la platine dissoute dans l'acide nitreux, & que ce métal, qui est seul comparable à l'or du côté de la pesanteur, loin de résister à cet acide, dans les épreuves dont il s'agit ici, s'y altère, s'y décompose en grande partie, tandis que le cuivre, dont la pesanteur spécifique n'approche pas de celle de la platine, cède sans peine il est vrai à l'action de l'acide nitreux, mais reparoît bientôt avec tous ses caractères métalliques, annonce sa pesanteur naturelle, même en état de précipité, & n'éprouve qu'un déchet médiocre lorsqu'on le rétablit par la fonte dans toute sa ductilité.

Ayant donc remarqué assez constamment qu'il restoit encore un peu de platine dans les cornets d'or, quelque précaution que je prisse pour qu'aucune de ses parties n'échappât à l'action de l'acide nitreux, & m'étant aperçu que plus j'employois de platine dans le mélange des trois métaux, moins le départ étoit complet, je me bornai à une petite quantité de platine pour de nouvelles expériences; elle fut de la vingt-quatrième partie de l'or que j'employai, avec une quantité d'argent deux à trois fois plus forte que celle de l'or. Je parvins enfin à dépouiller totalement les cornets de la platine qu'ils contenoient; ils avoient la netteté, le beau mat & la couleur que j'y desirois, & je ne retrouvai à la balance que le poids précis de l'or qui étoit entré dans le mélange.

Le succès de cette expérience exige des précautions; il faut que le mélange éprouve une grande chaleur dans la coupelle pendant que la litharge s'y imbibe, que la matière y circule avec un peu plus de vivacité que les essais d'or ne le demandent, & que les trois métaux soient parfaitement combinés dans le bouton qui les contient; il convient encore que ce bouton soit réduit en une lame fort mince, & que, par une conséquence nécessaire de cette dernière précaution, le départ soit conduit avec beaucoup de ménagemens: si en effet on brusquoit l'opération, en commençant à se servir d'un acide nitreux un peu trop fort, quelques parties du
cornet

cornet pourroient s'en détacher; peut-être même se briseroit-il entièrement, en laissant alors de l'incertitude sur la réunion totale de l'or employé: aussi ai-je toujours eu l'attention, pour ces épreuves délicates, de ne faire usage de l'acide nitreux porté à un certain degré de force qu'au moment d'achever le départ, après que cet acide, très-affoibli d'abord pour la première attaque du cornet, rendu ensuite plus actif pour la seconde, avoit criblé lentement ce cornet, & par-là l'avoit préparé à toute l'action d'un acide nitreux plus puissant.

Dans la vue d'obtenir, s'il étoit possible, un succès égal, en employant le double de platine, je formai un mélange dans lequel ce métal entroit pour un douzième sur onze parties d'or & une quantité d'argent proportionnée. Il me resta presque toujours après l'opération un léger excédant de poids dans les cornets d'or, & cette surcharge de quelques trente-deuxièmes de grain n'étoit pas constamment égale; je fis même une expérience qui me convainquit que si je n'avois pas dépouillé l'or de la totalité de la platine, je ne pouvois pas en attribuer la cause à un défaut d'action de l'acide nitreux: les étuis d'or destinés à renfermer des cornets d'essais, & que j'ai proposés pour faire tout-à-la-fois le départ de plusieurs de ces cornets dans un même matras, ces étuis me servirent utilement pour l'épreuve dont il s'agit. Je fis passer à la coupelle douze grains d'or pur & trente grains d'argent fin; j'en obtins un bouton d'essai ordinaire dont je formai un cornet destiné, comme on peut le prévoir, à servir de témoin dans l'expérience que je projetois: deux autres cornets qui contenoient chacun 11 grains d'or fin, 1 grain de platine & l'argent nécessaire pour le départ, furent mis chacun dans un étui, comme le cornet où il n'entroit point de platine fut renfermé dans le sien, & un même matras servit pour le départ de ces trois cornets. Je donnai à cette expérience l'attention qu'elle demandoit, en ménageant, comme on a vu plus haut, l'action de l'acide nitreux, afin que les trois cornets restassent bien entiers: après qu'ils eurent reçu un recuit convenable dans leur étui, ils en sortirent sans y avoir éprouvé

*Mémoires de
l'Acad. année
1778, page
505.*

la moindre adhérence & sans qu'aucune de leurs parties se fût détachée; portés ensuite à la balance, ils m'instruisirent bientôt de l'effet de l'acide nitreux dont j'étois sur-tout occupé dans ce moment: le premier de ces cornets avoit exactement le poids des douze grains d'or que j'avois employés pour lui, avant qu'il fut soumis au départ. Il n'en étoit pas ainsi des deux autres; l'un conservoit encore un huitième de grain au-delà des onze grains d'or qu'il avoit reçus, & j'observai dans l'autre un excédant de poids encore plus fort; cette surcharge assez inégale ne pouvoit être attribuée sans doute qu'à la platine: l'état de ces cornets ne l'annonçoit pas au premier coup-d'œil; mais en les considérant avec une certaine attention, & en les rapprochant d'autres cornets d'or qui ne contenoient rien d'étranger à ce métal, on ne remarquoit à leur surface ni la grande netteté, ni la couleur riche & particulière à l'or mat qui auroit dû les distinguer.

Je ne pouvois pas douter que dans cette expérience l'acide nitreux n'eût agi autant qu'il falloit sur tout ce qu'il étoit capable de dissoudre, puisqu'il n'étoit resté aucune partie d'argent dans le cornet d'or de 12 grains, quoiqu'on s'aperçoive quelquefois d'une légère surcharge en argent dans les essais ordinaires par un vice de l'opération: j'ai donc dû conclure avec beaucoup de fondement, que si le même acide employé à trois reprises dans le même matras, & agissant avec le même degré de force sur les trois cornets réunis, a enlevé à l'un tout l'argent qu'il contenoit, sans porter d'atteinte à l'or, on doit regarder cet acide comme ayant exercé dans cette expérience toute l'action dont il étoit capable, & que s'il s'est trouvé un excédant de poids sur les deux autres cornets, il ne faut pas l'attribuer à un défaut d'énergie dans le dissolvant ou à quelque vice dans l'opération: tout en effet y a été parfaitement égal, au grain près de platine que chacun de ces deux cornets contenoit, & dont une très-petite portion s'est trouvée inaccessible à l'acide nitreux pendant qu'il a pu dissoudre sans peine la plus grande partie de ce métal.

La cause de cette imperfection assez ordinaire du départ,

lors même que la platine n'entre que pour un douzième de l'or dans le mélange des trois métaux, & qu'on a pour but de conserver en entier le cornet d'or pur qui doit résulter de l'opération, cette cause ne se présente pas d'abord à l'esprit, & peut-être ne pourrois-je pas hasarder à ce sujet quelques conjectures si, dans le courant de mes expériences, je n'eusse pas été averti plusieurs fois d'un fait que je ne soupçonnois pas.

J'ai été contraint, pour des expériences beaucoup plus en grand que celles dont je viens de parler, & que j'exposerai dans la suite de ce Mémoire, d'employer un creuset pour fondre ensemble & mêler aussi intimement que je le pourrois l'or, l'argent & la platine destinés dès-lors à être soumis au départ: après avoir forgé le lingot provenant de cette fonte, & du poids de 4 onces au moins, je le réduisois en lames très-minces, & je le divisois en trente-deux parties; chacune d'elles, du poids d'un gros ou environ, étoit roulée en cornet, & j'en réunissois ensuite seize pour un seul départ dans un même matras. Après cette opération, les lotions répétées dans l'eau distillée & le recuit ordinaire, je vis que mes seize cornets étoient en général assez bien conservés; mais je m'aperçus qu'il régnoit des fentes circulaires sur quelques-uns d'eux, qu'il s'élevoit un peu au-dessus du corps du cornet de petites lames minces, très-étroites, dont la surface étoit d'or, mais qui avoient une consistance, un ressort que n'ont jamais les cornets sortis d'un départ, & encore moins des parties effilées & fort minces qui s'en seroient détachées: j'eus bientôt reconnu, à l'aide de la loupe, qu'une petite portion de platine, ayant encore la couleur de ce métal en état de ductilité, régnoit dans l'intérieur des petites lames circulaires qui s'étoient séparées en partie du corps du cornet, & que l'or leur servant comme d'une espèce de fourreau, les auroit toujours dérobées à ma vue, si ces petites lames, par un effet de leur ressort naturel, n'eussent pas occasionné une rupture dans le cornet & ne m'eussent pas averti de leur présence par la couleur si différente de l'or qu'elles offroient du

côté de la tranche & à la faveur de cette même rupture du cornet.

On voit clairement sans doute, d'après les détails dans lesquels je viens d'entrer, qu'une portion peu considérable de la platine ductile & réduite en petites parties que j'avois employée, pour l'expérience dont il s'agit ici & à laquelle je reviendrai, n'étoit pas entrée en fusion dans le creuset, lorsque j'y fis fondre les trois métaux; qu'elle y resta comme isolée & au fond du creuset, selon toute apparence, pendant que ces métaux se combinèrent & se pénétrèrent réciproquement; qu'elle passa dans le lingot en état de platine pure, lorsque je vidai le creuset; qu'elle s'allongea entre les rouleaux du laminoir, en prenant toute l'étendue que son volume, quel qu'il fût, lui permit d'occuper; qu'elle s'étendit peut-être de 1 ou 2 pouces sur 96 de longueur qu'avoit la lame entière produite par le lingot; qu'elle put par conséquent faire partie de deux des cornets que je tirai de cette lame, y résister à l'acide nitreux, & s'y manifester enfin après leur départ, avec tous les indices que j'ai exposés.

Si ce fait, qui m'a paru mériter quelque attention, est regardé comme constant, je crois qu'il fera naître des conjectures bien fondées sur la cause de l'excédant de poids qu'on remarque ordinairement dans les cornets d'or qui résultent d'un mélange d'or, d'argent & d'un peu de platine, après que ces métaux ont été séparés.

La platine résiste, étant seule, au feu le plus violent de nos fourneaux; elle ne se fond qu'avec peine, étant jointe à d'autres métaux assez fusibles, tels que l'or, l'argent & le cuivre; j'aurai même lieu de faire observer, dans d'autres expériences que je rapporterai, qu'on regarde quelquefois la platine comme fondue parfaitement avec quelqu'un de ces métaux fusibles, tandis qu'elle n'y est que dans un état pâteux & bien éloigné de celui d'une exacte combinaison. Dès-lors ne pourroit-on pas soupçonner, avec beaucoup de vraisemblance, que dans les mélanges d'or, d'argent & de platine, quelques-unes des parties de ce dernier métal refusent quelque-

fois de s'incorporer dans la matière en fusion, & y restent dans l'état simple de ramollissement, parce que les parties de la matière en bain qui les environnent, n'ont pas assez de chaleur pour faire passer à l'état de fluidité ces petites portions de platine & achever la combinaison? Des faits palpables viendront bientôt à l'appui de ce que j'avance ici, & prouveront, je crois, qu'on n'est pas toujours sûr d'avoir fondu complètement la platine, au milieu même des métaux qu'on voit en pleine fusion.

D'ailleurs il est bon d'observer que de petites portions de platine fondue, à la faveur de l'or & de l'argent, peuvent se trouver non pas pénétrées par l'un & l'autre de ces métaux, mais enveloppées simplement & hors d'attaque par conséquent de tout ce qui seroit capable de les entamer, puisqu'elles ne peuvent l'être qu'autant qu'elles sont pénétrées de l'or & de l'argent réunis, qu'autant que les trois métaux forment un tout parfaitement combiné.

Ces remarques, dont il eût été difficile que je me fusse occupé avant que d'avoir considéré avec attention, dans le courant de mes expériences, quelques effets peu ordinaires & que j'étois bien éloigné de prévoir, ces remarques, dis-je, ne paroissent-elles pas conduire à une explication assez plausible de la cause de l'excédant de poids qu'offrent communément les cornets d'or, après le départ des trois métaux réunis dont j'ai parlé plus haut!

Il est certain d'abord, qu'en faisant attaquer par l'acide nitreux un mélange d'or, d'argent & de platine, on obtient la dissolution de l'argent & celle de la plus grande partie de la platine; que moins on emploie de ce dernier métal dans l'opération du départ, moins il en reste proportionnellement dans les cornets d'or; & qu'en ne faisant entrer la platine que pour un vingt-quatrième du poids de l'or dans un alliage de cette espèce, on peut parvenir à dépouiller totalement les cornets d'or du peu de platine qu'ils contenoient. Ce métal, si rebelle, quand il est seul, aux plus vives attaques de l'acide nitreux, cède donc facilement à ce même

acide quand il se trouve combiné avec l'or & l'argent? Cette dissolution n'a donc lieu, n'est constante & plus parfaite peut-être que celle de la platine seule par l'eau régale, qu'à la faveur d'une exacte combinaison des trois métaux? S'il est évident que dans ces circonstances l'acide nitreux a la plus grande action sur la platine, comment seroit-il possible qu'une petite portion de ce métal échappât à la puissance de cet acide, pendant que ce métal auroit été dissous presque en entier, & l'auroit été promptement si on ne supposoit pas que cette petite portion de platine n'a été garantie de l'action de l'acide que parce qu'elle se trouvoit en état de platine pure, & comme isolée entre les trois métaux mélangés? Le fait que j'ai cité plus haut, ce filet de platine ductile, que l'or recouvroit, qui avoit été laminé sous cette enveloppe, & que je n'aperçus qu'à la faveur de la rupture du cornet, cette portion de platine ainsi conservée, après la fonte complète en apparence des trois métaux auxquels elle appartenoit, ne semble-t-elle pas venir à l'appui de l'opinion que j'expose? Si on ne regarde pas encore ce fait, quelque frappant qu'il soit, comme aussi concluant pour cette opinion qu'il le paroît au premier coup-d'œil, on voit au moins qu'il méritoit que je m'y rendisse attentif, & qu'il conduît à une explication assez naturelle de l'excédant de poids sur les cornets d'or dont je cherche ici la raison.

Quelle que soit la cause de cet excédant de poids, on peut l'enlever par une seconde opération, qui sera faite avec d'autant plus de succès, que cet excédant sera plus foible relativement à la quantité d'or fin qui sera entrée dans les cornets; & c'est alors que cessera toute illusion sur une augmentation de la matière même de l'or, comme produite par celui qu'on a soupçonné dans la platine : après une telle expérience, le préjugé tombe nécessairement; l'or qu'on avoit employé reste seul, & l'excédant de poids s'évanouit.

J'ai déjà annoncé qu'on parvenoit plus aisément à dépouiller l'or de la platine dans l'opération du départ, en évitant de le conserver en cornet, & en le faisant précipiter en une chaux

assez fine au fond du matras. On fait que par un départ trop prompt & un acide nitreux trop actif, on a bientôt brisé les cornets d'essais & divisé l'or en une infinité de parties; mais dans cette opération-ci, c'est d'un mélange des trois métaux où l'argent entre en plus grande quantité que le départ des essais d'or ne l'exige, c'est de la dissolution lente & progressive des deux métaux attaquables par l'acide nitreux, qu'il faut attendre une chaux d'or bien atténuée, sur-tout si la combinaison des matières a été parfaite, & qu'on peut espérer que cet or réduit en poudre ne contiendra plus rien d'étranger. On ne sauroit se dissimuler cependant que ce procédé demande beaucoup d'attention & une certaine dextérité pour qu'il n'en résulte pas un inconvénient; l'or ainsi précipité en une chaux très-divisée qu'il faut bien laver pour la dépouiller de l'acide nitreux dont elle reste imbibée, & qui tient encore en dissolution quelques parties des deux autres métaux, cet or est difficile à rassembler parfaitement; on court le risque par une suite des lotions & de la précipitation de cette chaux d'or dans un creuset, afin qu'elle y éprouve un recuit, de perdre quelques-unes de ses parties les plus atténuées, & de ne pas obtenir par conséquent dans cette circonstance le poids total de l'or qu'on aura employé: mais avec des précautions on peut éviter cette perte; & comme on sera rarement dans le cas d'avoir recours à ce procédé moins simple pour dépouiller l'or de la platine, on y portera plus volontiers une certaine attention, celle qu'on donne à des expériences délicates & où il s'agit d'établir des produits qui entreront en comparaison.

Je n'ai considéré jusqu'ici la platine que relativement à sa dissolution dans l'acide nitreux, à la faveur de l'or & de l'argent qu'on lui associe, & par rapport encore à la difficulté qu'on éprouve pour la bannir totalement de celui de ces métaux qui résiste à l'acide nitreux & subsiste en entier après l'opération. Je vais exposer dans la suite de ce Mémoire, les observations que j'ai faites sur la manière de séparer la platine, après sa dissolution dans l'acide nitreux, de l'argent avec lequel elle y est combinée, sur l'état où elle se trouve par

une suite de cette dissolution, & sur les déchets considérables que j'y ai remarqués, malgré toutes les précautions que j'ai prises pour ne rien perdre du précipité de ce métal.

Mes expériences, lorsque je commençai ces recherches, ne roulèrent d'abord que sur de petites quantités des trois métaux réunis, & par conséquent sur très-peu de platine en particulier; mais elles furent si multipliées que je pus recueillir, à différentes reprises, plusieurs précipités de platine, & les considérer attentivement, avant que de leur faire reprendre l'état métallique, que rien en eux ne paroïssoit annoncer.

Le premier moyen que j'employai pour retirer la platine de l'acide nitreux, où elle avoit été dissoute avec l'argent qui étoit entré dans le mélange des trois métaux, fut d'étendre la dissolution dans une grande quantité d'eau & d'y mettre ensuite une plaque de cuivre rouge, suivant le procédé connu & adopté pour les travaux en grand: l'argent se précipita d'abord avec son éclat métallique; il couvrit le cuivre de ramifications brillantes, découpées comme la fougère & si déliées qu'elles s'inclinoient en tout sens au moindre mouvement de l'eau; elles offroient alors un spectacle très-agréable, par l'éclat plus ou moins vif qu'elles prenoient à la plus légère ondulation: mais ce spectacle nouveau pour moi, quoique j'eusse fait précipiter mille fois de l'argent par le cuivre, ne dura pas long-temps; bientôt une poudre brune commença à s'attacher à ces ramifications; elle en ternit l'éclat par des degrés insensibles, les affaissa peu-à-peu & les couvrit enfin de manière que je n'aperçus plus l'argent dont la plaque de cuivre étoit enveloppée, ni même celui qui s'étoit précipité au fond du vase, & que cette poudre brune déroboit totalement à mes yeux. Je ne doutai point qu'elle ne fût due à la platine contenue dans la dissolution, & je soupçonnai dès-lors qu'elle avoit été la cause assez difficile à expliquer des belles ramifications que j'avois d'abord remarquées.

J'aurai occasion de faire observer qu'un dixième de platine fondu avec de l'argent fin, y occasionne des cristallisations, y donne lieu à la formation d'une multitude de figures pyramidales

pyramidales & régulières, qui ont beaucoup de rapport avec le fait dont je viens de parler.

J'avois donc obtenu, par ce moyen, l'argent & la platine précipités l'un après l'autre, mais confondus en grande partie & hors d'état, étant réduits à des molécules impalpables, de pouvoir être séparés même grossièrement : je n'hésitai point par conséquent à laisser ces deux métaux confondus ; ils formoient une chaux grise que je lavai avec soin & que je fis recuire dans un creuset : elle conserva la même couleur après le recuit ; mais lorsque je l'eus fondue, le lingot qui en provint avoit à peu-près la blancheur de l'argent exempt de platine, & la mie du lingot, à l'endroit où il fut cassé, étoit d'un blanc assez mat.

Ce fut en examinant sa superficie à l'aide d'une loupe, que je commençai à m'apercevoir des cristallisations dont j'ai parlé, & que je fus mis sur la voie pour en obtenir de plus parfaites : on verra bientôt pourquoi je remarque ici que la couleur grise de la chaux subsista après le recuit, & disparut après la fonte. Je réduisis ce lingot en lames très-minces que je fis dissoudre par l'acide nitreux ; après le refroidissement de la liqueur & un assez long repos, j'eus au fond du matras un précipité de platine, mais bien moins considérable que je ne l'attendois : je n'ignorois pas que l'acide nitreux avoit pu en dissoudre une partie, & produire par-là une diminution sur le précipité ; mais cet acide en eût-il autant dissous qu'il en étoit resté en dépôt au fond du matras, ce qui n'étoit guère probable d'après d'autres expériences que j'avois faites sur un pareil mélange de platine & d'argent, je ne jugeois point encore que ce précipité fût aussi considérable, à beaucoup près, que la poudre noirâtre qui recouvroit la chaux d'argent, & qui confondue avec elle, étoit entrée dans la composition du lingot que je venois de faire dissoudre.

Je crus donc devoir répéter cette même expérience, à une différence près qui paroissoit peu essentielle, mais d'où j'attendois quelque lumière sur ce qui m'avoit surpris dans l'expérience dont je viens de parler : au lieu de faire recuire

& de fondre ensuite la chaux d'argent mêlée de platine que j'obtins en précipité par le cuivre d'une dissolution pareille à la première, je me contentai de la faire sécher sur un feu doux, & après l'avoir ramenée, en la remuant sans cesse avec une spatule, à l'état d'extrême division où elle étoit d'abord, je la mis dans un matras dont la boule avoit beaucoup plus de capacité qu'il n'en eût fallu pour une dissolution ordinaire d'argent; je ne versai d'abord qu'un peu d'acide nitreux affoibli sur cette chaux: on juge bien que malgré cette précaution l'effervescence fut très-vive; lorsqu'elle fut calmée, je versai de nouvel acide nitreux; j'en ménageai l'action en ne l'appliquant à la chaux que par intervalles; & c'est ainsi que par degrés & à froid je parvins à dissoudre la plus grande partie de l'argent qu'elle contenoit. Lorsque je n'eus plus à craindre une certaine effervescence, tant de la chaleur qu'il convenoit de donner à la dissolution que de l'emploi d'un acide plus actif, je mis le matras sur des charbons à demi-éteints, & j'y laissai l'acide en ébullition jusqu'à ce qu'il m'eut paru qu'il avoit produit tout son effet: lorsque la liqueur se fut refroidie & eut acquis de la transparence, je la décantai avec précaution; je versai sur le dépôt resté au fond du matras un acide nitreux plus fort, & je le fis bouillir aussi pendant quelque temps sur un feu modéré; après le refroidissement de cet acide, je remarquai que le dépôt étoit beaucoup plus considérable que celui de l'expérience précédente, & qu'il paroissoit répondre à la quantité de poudre noirâtre qui avoit recouvert la chaux d'argent dans l'un & l'autre précipité que j'avois obtenu par le cuivre. Je commençai dès-lors à soupçonner que si je n'avois eu que très-peu de dépôt après la dissolution du lingot dont j'ai parlé plus haut, quoiqu'il contînt autant de poudre noirâtre que la chaux dont il s'agit ici, c'est que, par la fonte, une grande partie de cette poudre s'étoit décomposée, avoit perdu peut-être les propriétés métalliques, & la faculté par conséquent de s'incorporer dans le lingot; au lieu que cette même poudre noirâtre mêlée avec la chaux d'argent & foiblement attaquée.

par l'acide nitreux, qui exerçoit principalement & avec la plus grande facilité sur l'argent toute l'action dont il étoit capable, cette poudre résultant de la platine, a pu rester dans le même état où elle étoit lorsqu'elle s'est précipitée par le moyen du cuivre, puisqu'en la faisant attaquer de nouveau par l'acide nitreux, je n'ai pu produire sur elle qu'un effet qu'elle avoit déjà éprouvé : mais il n'en a pas été ainsi sans doute de l'effet qu'a produit sur elle le feu, & un feu tel qu'il est nécessaire pour que la chaux d'argent se réduise parfaitement en bain.

En réfléchissant sur les faits que j'expose ici, dans l'ordre où ils m'ont frappé, on commence à sentir que la dissolution de la platine ductile, affinée, ayant toute la pesanteur spécifique, prise en un mot dans l'état le plus parfait que nous lui connoissons, on commence, dis-je, à entrevoir que cette dissolution par l'acide nitreux, est une terrible épreuve pour ce métal, & qu'il y souffre dans sa matière propre, dans les principes qui le constituent, une altération dont les autres métaux sont à l'abri. Les faits que j'ai encore à rapporter, quadreront avec ceux-ci : on verra sans cesse des précipités de platine, ou au moins une grande partie de ces précipités, échapper aux moyens connus de rendre aux substances métalliques les propriétés qui les distinguent, & disparaître, pour ainsi dire, entre des mains occupées à les rétablir dans leur premier état.

Il faut beaucoup de précautions pour recueillir ces précipités & pour les réduire à un état sec & pulvérulent ; l'infinité de particules dont ils sont l'assemblage, ont tant de légèreté qu'elles ne tombent totalement au fond du matras qu'après un long repos, & qu'on ne soupçonneroit jamais qu'elles eussent appartenu à un métal d'une aussi grande pesanteur que l'est la platine. Je crus d'abord qu'en mettant cette poudre noirâtre dans une capsule de verre, pour l'y faire sécher sur un bain de sable & ensuite dans un creuset, afin qu'elle y éprouvât un recuit, je pourrois l'obtenir, comme les précipités d'autres métaux, en un état pulvérulent & même métallique ; mais je fus fort trompé à cet égard : ce précipité réduit à

très-peu de chose, dans la capsule de verre par la sécheresse, en comparaison de ce qu'il étoit avant qu'il y reçût une douce chaleur, s'attacha fortement au fond & aux parois de la capsule; je ne pus en détacher une partie qu'à l'aide de la pointe d'une lame de couteau; & une autre portion de ce même précipité que je voulus faire sécher dans un creuset, y resta tellement adhérente, qu'il me fut impossible de l'en détacher. J'avois eu l'attention cependant de laver à plusieurs reprises ce précipité, & de lui enlever par-là, autant qu'il m'avoit été possible, les moindres parties de l'acide, très-affoibli d'ailleurs, dans lequel il avoit nagé: je vis alors qu'il falloit se borner à la capsule de verre pour faire sécher ce dépôt noirâtre, mais qu'il y avoit une précaution à prendre pour ne rien perdre de ce dépôt desséché: ce soin ne consista qu'à rapprocher vers le milieu de la capsule les parties du dépôt qui en étoient le plus éloignées, à mesure qu'elles commençoient à perdre leur humidité, à ne pas attendre qu'elles l'eussent perdue entièrement pour les détacher de la surface du vase, & à former ainsi au milieu de la capsule un petit amas auquel s'étoit réduit tout le dépôt que j'y avois mis. J'eus alors le précipité de platine sous la forme d'une poudre noirâtre, dont j'ai été contraint de parler plusieurs fois avant que j'eusse dit comment je l'avois obtenue: elle étoit si légère que le moindre souffle l'auroit dissipée, & qu'un petit amas de cette poudre, de la grosseur ou à peu-près d'une noisette, ne pesoit pas tout-à-fait 5 grains: encore est-il bon d'observer qu'elle receloit quelques parties d'argent qui en augmentoient un peu le poids.

Je fis plusieurs expériences dans la vue d'examiner si cette poudre ne pourroit pas reprendre une certaine consistance & revenir à l'état métallique dont elle me paroissoit si éloignée: j'en fis passer à la coupelle avec du plomb seulement; j'en mêlai d'autre avec une quantité déterminée d'argent fin, & une dose de plomb convenable, qui subit également l'épreuve de la coupelle; je joignis encore du *minium* à une portion de cette poudre, & je la traitai par le flux noir. Le résultat

de ces expériences fut toujours que presque la totalité de cette poudre disparoissoit dans les produits : à peine l'argent mis à dessein dans la coupelle conservoit-il quelque trace de platine ; on s'en apercevoit encore moins dans les petits grains d'argent dûs aux particules de ce métal que la poudre contenoit, & que la litharge, en s'imbibant dans les coupelles, avoit laissées sur leur bassin : rien n'avoit pu donner à ce précipité de platine la consistance d'une matière quelconque, loin de l'avoir rétabli dans son état métallique ; je n'aperçus même aucune espèce de scories sur le bassin des coupelles où ce précipité, soit seul avec du plomb, soit joint à de l'argent, avoit passé par l'épreuve de la litharge.

Dans une de mes expériences, où j'avois joint à 24 grains d'or fin 69 grains d'argent fin également, & 5 grains ou à peu-près de précipité de platine, je ne remarquai point de scories aux bords du bassin de la coupelle, comme on y en voit dans quelques circonstances, après que la litharge s'y est imbibée ; le bouton composé d'or, d'argent & de quelques particules de platine, étoit net, bien arrondi, & avoit l'éclat ordinaire : je le pesai avant que d'en faire le départ ; je fus surpris d'en trouver le poids plus foible de 4 à 5 grains qu'il n'auroit dû être suivant la quantité des trois matières que j'avois employées, & je craignis, dans le premier moment, d'avoir oublié de mettre dans la coupelle le précipité de platine en poudre, quoiqu'il fût spécialement l'objet de mon expérience ; mais je ne pus pas douter, par un examen plus particulier du bouton, par la suite du départ que j'en fis & le résultat de cette opération, que le précipité de la platine n'eût été joint dans la coupelle aux deux autres métaux : les deux cornets d'or que j'obtins de cette expérience, étoient à la vérité très-beaux, mais je crus y apercevoir quelques indices légers de platine, & ils me suffirent pour que les conséquences que j'avois à tirer me parussent bien fondées.

Si on rapproche en effet cette dernière expérience de celles qui la précèdent, on reconnoîtra sur le champ que le précipité de platine n'a pas plus de consistance dans une épreuve que

dans une autre, malgré les différences qu'on y a remarquées; & que si quelque portion de ce précipité y a repris ses propriétés métalliques, elle est peu considérable & laisse toujours subsister une présomption assez forte sur la décomposition de ce métal singulier.

On m'objectera peut-être que cette poudre noirâtre que mes expériences m'ont donnée, n'est pas dûe à la platine pure & dépouillée de tout ce qui lui est étranger; que la matière noire & ferrugineuse avec laquelle on la trouve toujours unie, peut être l'origine de celle que j'ai recueillie par voie de dissolution, & qu'il est difficile de concevoir qu'un métal aussi solide se détruise, pour ainsi dire, par l'effet d'un dissolvant, & encore dans des circonstances particulières, tandis que l'action de ce même dissolvant n'a jamais de pareilles suites dans les autres métaux qui s'y trouvent exposés, quelque force qu'on suppose dans cet acide pour les dissoudre, quelle que soit la violence avec laquelle ces métaux en sont attaqués. Je répondrai en rappelant ici ce que j'ai dit, que la platine dont j'ai fait la matière de mes expériences, étoit très-ductile, qu'elle devenoit brillante à peu-près comme l'argent au sortir du laminoir, & qu'elle étoit aussi pure que je pouvois l'espérer: j'ajouterai que je ne me servis que d'or & d'argent fins pour toutes mes opérations, & que je fus très-attentif, en les suivant, à ne laisser aucune incertitude sur ce qui résulteroit de la dissolution de la platine par l'acide nitreux.

S'il est nécessaire d'écarter l'or & l'argent fins pour remonter au principe de ce résidu singulier, il n'est pas possible de le chercher ailleurs que dans la platine; & si la pureté de celle dont je me suis servi n'est pas parfaitement prouvée, on verra au moins, par une expérience dont je rendrai compte, que les portions de ce métal qui se sont annoncées encore avec les caractères métalliques, après une première dissolution, les ont perdus à la seconde, & se sont converties en cette poussière noirâtre que j'ai tenté en vain de ramener à son premier état de solidité.

On remarque sans doute, dans le compte que je viens de

rendre de mes premières expériences, que le moyen dont je me suis servi pour retirer de l'acide nitreux l'argent & la platine qu'il tenoit en dissolution, n'étoit pas le meilleur que je pusse employer : on a vu que, par une suite de la confusion qui se faisoit des deux métaux précipités l'un sur l'autre par la même cause, j'étois obligé de mettre de nouveau l'argent en dissolution pour que la platine s'en séparât & restât seule au fond du matras. Il est vrai que ce procédé n'étoit pas assez simple ni même propre à me procurer des produits bien distincts ; mais il me fut utile pour me faire connoître cette poudre noire, ce résidu sans consistance que la platine fournit ; je pus, en l'employant, distinguer assez bien la partie du métal capable de reprendre les caractères métalliques d'avec la portion de ce même métal que j'essayai en vain, par différens moyens, de rétablir dans son premier état. Le procédé en effet dont je fis usage en continuant mes recherches, fut plus favorable à la vérité pour séparer l'argent de la platine d'une manière exacte, mais il étoit de nature à me dérober la présence de ce résidu noirâtre, & à ne me laisser après le dépôt total de l'argent, pour produit presque unique de la platine, que la partie de ce métal qui en avoit repris les propriétés. Je dûs donc au moyen le moins avantageux de faire précipiter l'argent & la platine du dissolvant qui les contenoit, la connoissance de ce résidu singulier : quoiqu'en apparence il soit peu digne d'attention, je crois cependant qu'il pourra donner lieu à de nouvelles recherches sur la nature de la platine ; que les Chimistes, qui se sont déjà occupés de ce métal avec tant de succès, pourront le considérer de nouveau relativement à mon travail qui n'est qu'ébauché, & que bientôt ils verront mieux que moi, par les épreuves que la platine subira entre leurs mains, combien elle est éloignée, malgré tout ce qui la distingue, de l'or & de l'argent, sur-tout quand on considère l'état fixe de ces deux métaux & les principes inaltérables qui les constituent.

Lorsque je commençai mes expériences, pour séparer de la manière la plus exacte l'argent & la platine que l'acide

nitreux tenoit en dissolution, je me bornai à une petite quantité des trois métaux, afin de ne tenter des expériences un peu plus en grand qu'avec la certitude d'y réussir: je n'employai d'abord que 12 ou 24 grains d'or fin, 2 ou 4 grains de platine ductile & une quantité d'argent fin trois fois plus forte, ou à peu-près, que celle de l'or qui faisoit partie du mélange: les trois métaux passaient à la coupelle, non pour y être épurés, comme on sent bien, puisqu'aucun d'eux ne contenoit d'alliage, mais afin qu'ils s'y fondissent complètement à la faveur de la litharge, & y entraissent dans une combinaison parfaite: le bouton que j'en retirois étoit laminé, réduit en cornet & dissous dans l'acide nitreux: à mesure que je retirois du matras l'acide plus ou moins affoibli, que j'y avois mis à deux ou trois reprises, je le versois dans un flacon où devoit se faire le premier précipité; je lavois le cornet d'or, je lui donnois le recuit ordinaire, & je ne m'occupois plus ensuite que de la dissolution d'argent & de platine que le flacon contenoit.

Je commençois par y verser une quantité d'eau distillée, égale à celle de la dissolution, & je faisois parfaitement le mélange de la totalité de la liqueur, en agitant fortement le flacon; j'y versois ensuite à plusieurs reprises de l'esprit de sel; je laissois repoler la liqueur pendant quelques heures, afin que la partie supérieure s'éclaircît, & que je pusse juger, en y faisant tomber des gouttes d'esprit de sel, si elle contenoit ou non quelques parties d'argent: lorsque je m'étois rendu certain que la totalité, ou à peu-près, de ce métal s'étoit précipitée au fond du flacon, je laissois repoler la liqueur pendant plusieurs jours; je ne la décantois même qu'autant qu'elle étoit de la plus grande transparence & que l'esprit de sel ne la troubloit plus. L'affaïssement bien marqué de l'argent & son adhésion au fond du flacon me donnoit la facilité de verser dans un vase de verre ou dans une terrine de grès la liqueur très-claire, & jusqu'à la dernière goutte; elle ne contenoit plus que la platine: l'argent en effet resté dans le flacon en étoit entièrement dépouillé, comme je l'ai toujours
reconnu,

reconnu, en rendant à ce métal sa première ductilité. La liqueur que la terrine contenoit, & qui étoit devenue une eau régale foible, attiroit ensuite toute mon attention; elle en fut long-temps l'objet principal dans le cours de mes expériences, parce que je n'employai pas d'abord le seul moyen d'en retirer totalement la platine, & que je fus trompé sur ce qu'il y avoit de réel en résidu de ce métal dans les premiers précipités que j'obtins. J'étendois donc dans une assez grande quantité d'eau distillée cette liqueur, tenant la platine en dissolution, & après l'avoir mêlée parfaitement en me servant d'une spatule de bois, j'y versois de l'alkali fixe avec ménagement; après l'effervescence qui en étoit la suite prompte, j'y versois de nouvel alkali; j'attendois qu'il eût produit son effet, & je continuois ainsi d'y en verser jusqu'à ce que la liqueur devînt caline & que l'acide fût saturé: alors je commençois à m'apercevoir que la liqueur perdoit un peu de sa transparence, qu'il nageoit une infinité de particules blanchâtres, légères, un peu transparentes elles-mêmes, & qui, en se réunissant, tomboient fort lentement au fond du vase; lorsque le dépôt étoit formé & que la liqueur avoit repris sa transparence, j'en décantois la plus grande partie, & je filtrois le reste à travers du papier fin, assez serré & plié en quatre: le dépôt resté sur le filtre ressembloit beaucoup, tant pour la couleur que pour l'espèce de consistance qu'il avoit, à de la colle de farine qui a perdu une partie de son humidité. J'enlevois de dessus le filtre la feuille sur laquelle étoit le dépôt; je le laissois sécher à l'air; je l'enveloppois ensuite dans cette même feuille de papier, & j'en formois un peloton que je brûlois dans un creuset bien couvert, en le faisant rougir au milieu des charbons. Étant certain que par cette précaution je ne perdois rien du dépôt, je mêlois la poudre jointe aux cendres du papier à laquelle il s'étoit réduit, soit avec du *minium*, soit avec de la chaux de cuivre, & je la traitois par le flux noir: je passois à la coupelle le culot de plomb qui me venoit d'une part, & je faisois dissoudre dans l'acide nitreux le culot de cuivre réduit en lames minces que je

retirois d'un autre côté; je n'employois l'acide, dans cette circonstance, qu'à froid & après l'avoir affoibli.

Dès les premières expériences que je fis pour retirer la platine de l'acide nitreux, par le procédé plus exact dont je viens d'exposer les détails, je vis avec surprise que non-seulement le plomb sur la coupelle & le cuivre dans le matras ne m'avoit pas laissé la petite quantité de platine à laquelle je devois m'attendre, dans l'ordre ordinaire des réductions de métaux, mais qu'il s'y en trouvoit à peine quelques particules, dont peut-être je ne me serois pas aperçu si je n'eusse pas compté sur un produit plus ou moins fort en platine dans ces opérations. Je répétai plusieurs fois ces expériences tantôt en me bornant à la quantité précise d'or, d'argent & de platine que j'avois d'abord employée, tantôt en augmentant un peu la quantité de ces trois métaux, & en donnant une attention nouvelle aux détails de l'opération : j'ai toujours reconnu que ce qui restoit en platine, soit sur la coupelle, soit dans le matras, n'avoit aucune proportion avec la quantité de ce métal qui étoit entrée dans le mélange, & j'ai senti que ce fait, assez surprenant en lui-même, méritoit encore d'être approfondi.

Dans la forte persuasion où j'étois que la platine dissoute dans l'acide nitreux pouvoit en être précipitée par le moyen de l'alkali fixe, mais que peut-être cette précipitation n'avoit lieu que difficilement, je crus qu'en mêlant de la dissolution de cuivre par le même acide avec celle qui contenoit de la platine, le dépôt de ce dernier métal deviendrait plus facile à la faveur du cuivre qui s'y trouveroit mêlé, & qui certainement seroit très-prompt à se précipiter.

Je versai donc de l'alkali fixe sur un mélange de ces deux sortes de dissolution : lorsque la liqueur bien saturée eut repris sa transparence, j'en décantai la plus grande partie, & je filtrai le reste qui contenoit tout le dépôt : lorsque la filtration fut finie, je fis sécher ce dépôt bleuâtre; je l'enveloppai avec le papier même sur lequel il étoit resté; je le réduisis en cendres, comme on a vu que je l'ai fait pour

une autre expérience, & je procédai à la réduction de ce dépôt par le moyen du flux noir. J'avois fait dissoudre un gros de cuivre dans l'acide nitreux qui me servit pour cette expérience, & qui fut mêlé avec la dissolution de platine : je retrouvai ce même gros de cuivre, ou à peu-près, dans le culot que je retirai de cette opération ; je l'aplatis sous le marteau ; je le laminai, & je le fis dissoudre à froid dans de l'acide nitreux affoibli ; mais ce fut inutilement pour y retrouver aussi la quantité de platine que j'avois employée : cette expérience ne fit que confirmer celles dont j'ai rendu compte ; elle me convainquit, par une comparaison frappante, que le cuivre, bien inférieur à la platine, quant à la pesanteur spécifique & à la roideur des parties, n'éprouvoit pas cependant une altération considérable dans sa dissolution par l'acide nitreux, tandis que la platine, avec des caractères qui annoncent la plus grande solidité dans les principes qui la constituent, ne sort jamais d'une pareille épreuve, l'acide nitreux fût-il affoibli, qu'avec des pertes qui étonnent & qui doivent la faire regarder à cet égard, comme au-dessous même du cuivre, loin qu'on puisse la placer à côté des métaux précieux.

On juge sans doute que d'après tout ce qui s'étoit passé sous mes yeux, & un grand nombre d'expériences qui ne s'étoient point démenties sur le fait dont il s'agit ici, je fus conduit comme nécessairement à conclure, ou que la platine se décomposoit, se détruisoit en très-grande partie lorsque je la rendois dissoluble par l'acide nitreux, ou qu'une fois dissoute dans cet acide, elle y restoit si bien combinée, que les moyens dont je me suis servi pour la faire précipiter n'étoient pas capables de produire cet effet, ne pouvoient pas au moins le produire tout entier.

J'ai donc fini par tourner mes vues de ce dernier côté ; j'ai voulu être certain que j'aurois retiré de la dissolution de platine, la moindre des parties de ce métal qu'elle auroit contenue ; j'ai désiré que si ensuite de cette dissolution, la platine ne paroïssoit pas en total ou à peu-près, comme l'or, l'argent, le cuivre, & avec l'éclat & la solidité qui

caractérisent les métaux, on ne pût attribuer qu'à la nature même de la platine les déchets extraordinaires qu'on y observeroit.

Je n'ai pas eu besoin, pour parvenir à ce but, de m'écarter beaucoup de la route que j'avois d'abord suivie; au lieu en effet de chercher la platine dans le dépôt seul qui, à la faveur de l'alkali fixe, s'étoit précipité de la dissolution, je la cherchai, tant dans ce dépôt même que dans la liqueur qui l'avoit fourni.

Persuadé que cette expérience-ci seroit plus décisive que celles dont j'ai rendu compte, pour qu'il ne subsistât aucun doute, s'il étoit possible, sur le fait dont il est ici question, je la fis un peu plus en grand que n'étoient les précédentes; à une once d'or fin, je joignis 2 gros de platine ductile & 2 onces 6 gros d'argent fin, je fondis ces trois métaux dans un creuset; je les y mêlai aussi parfaitement qu'il me fut possible pendant que la matière étoit en bain, & je la coulai ensuite dans une lingotière dont aucune grenaille de ce mélange ne s'écarta; le lingot que j'obtins de cette fonte étoit très-net & aussi doux que peuvent l'être l'or & l'argent qui contiennent de la platine; il fut forgé, réduit en une lame mince & divisé en trente-deux parties, lesquelles furent roulées en cornets du poids chacun d'un gros ou environ: je fis dissoudre dans l'acide nitreux seize de ces cornets qui composoient à peu-près 2 onces, & je conduisis cette opération avec les mêmes soins que j'avois donnés à d'autres dont j'ai parlé précédemment. Lorsque les cornets d'or eurent été recuits & pesés, je remarquai que leur poids étoit de 4 gros 12 grains, c'est-à-dire plus fort de ces 12 grains qu'il n'auroit fallu pour que ces cornets eussent représenté exactement la quantité d'or que j'avois employée: on a vu en effet qu'il étoit entré une once d'or dans le lingot dont les seize cornets, avant le départ, formoient la moitié, & que par conséquent il ne devoit me rester que 4 gros de ce métal après la dissolution de la platine & de l'argent. Je ne fus point surpris de cette surcharge de 12 grains; le poids de la platine, dans cette expérience, étoit

D'un gros sur quatre d'or fin : je savois que quand on l'emploie dans une pareille proportion pour le mélange des trois métaux, & qu'on veut conserver en entier les cornets, il est très-difficile de la dissoudre en totalité; mais cet inconvénient n'influoit en rien, comme on va en juger, sur les conséquences qu'il y avoit à tirer de l'opération; au lieu de supposer un gros de platine dans la dissolution, je ne comptai que sur 60 grains, & j'établis mes résultats sur le pied d'un sixième de moins à l'égard de ce métal.

Après avoir étendu cette dissolution dans une certaine quantité d'eau, j'en fis précipiter l'argent par l'esprit de sel, & je versai ensuite de l'alkali fixe jusqu'à saturation sur la liqueur transparente que j'avois décantée du flacon où l'argent étoit resté en dépôt : au lieu d'attendre que cette liqueur s'éclaircît en me donnant un précipité, je l'agitai beaucoup au contraire & je la versai brusquement dans une terrine que je plaçai sur un bain de sable, afin qu'elle s'y évaporât lentement à la faveur d'une chaleur modérée; j'avois soin, à mesure qu'elle diminueoit & laissoit sur les bords le sel qui s'y desséchoit bien-tôt & y adhéroit fortement, de le détacher de la superficie de la terrine & de le faire rentrer dans la liqueur; je parvins ainsi peu-à-peu à rassembler en une masse saline tout ce que la liqueur contenoit, & lorsqu'elle fut bien sèche, j'en constatai le poids; il étoit de 5 onces 4 gros.

J'avois d'abord pensé que pour retirer la platine de ce dépôt salin, qui étoit une espèce de nitre régénéré, il me suffiroit, en faisant usage du flux noir, de le composer d'une partie de salpêtre égale à la quantité du dépôt salin que j'emploïerois, & de deux parties de tartre qui détonneroient seules avec le salpêtre; je croyois qu'en mêlant ensuite le dépôt salin, joint à une certaine quantité de *minium* avec le flux noir, j'obtiendrois, par une réduction prompte, un culot de plomb plus ou moins chargé de la platine que le dépôt salin auroit fournie : mais je ne réussis point dans cette expérience; je ne recueillis des scories que quelques grenailles de plomb; je la fis même une seconde fois avec aussi peu de succès : j'en

sentis bien-tôt la raison; il n'étoit pas entré assez de tartre dans la composition du flux noir, & il convenoit d'ailleurs que le dépôt salin fût joint au salpêtre pour la détonation.

On a vu plus haut que la masse saline retirée de la liqueur pesoit 5 onces 4 gros.

Je n'employai d'abord que la cinquième partie de ce dépôt salin, qui pesoit par conséquent 1 once 57 grains; je la mêlai avec une quantité égale de salpêtre raffiné, & je les fis détoner ensuite avec un peu plus de 4 onces de tartre; lorsque ce flux noir eut été réduit en poudre, j'y mêlai 6 gros de cuivre provenant du dépôt que laissent après elles aux affinages, les eaux-fortes de reprise: cette espèce de chaux de cuivre me parut préférable à toute autre pour cette opération; ce n'est qu'une poudre impalpable & par-là très-propre à saisir dans sa réduction toutes les particules éparées des autres matières métalliques avec lesquelles ce cuivre en poudre se trouve confondu.

*Année 1775,
page 183.*

Page 202,

La fonte de ce mélange réussit comme je le desirois; les scories étoient nettes, & je trouvai au fond du creuset en forme de cône renversé dont je me servis, un culot de cuivre du poids de 4 gros 48 grains. Je ne fus point étonné du déchet de 1 gros 24 grains sur la chaux de cuivre que j'avois employée: on peut voir en effet, dans un Mémoire que j'ai lu à l'Académie, sur la fonte de la chaux de cuivre des affinages, qu'après plusieurs expériences pour la revivifier le plus utilement qu'il seroit possible, la moindre perte que j'éprouvai sur cette chaux, en la rétablissant dans son état métallique, fut de 22 pour 100 ou environ; & on voit que dans l'expérience dont il s'agit ici, les déchets ont été dans un rapport égal ou à peu-près sur cette même chaux.

On peut se rappeler que les seize cornets d'or dépendans de l'expérience dont il est ici question, avoient un excédant en poids de 12 grains, qui ne pouvoit être attribué qu'à une portion de platine dont ces cornets n'avoient pas été dépouillés; dès-lors il devient constant que le dépôt salin résultant de la dissolution ne contenoit, comme je l'ai dit,

que 60 grains de ce métal; que le cinquième de ce dépôt, qui avoit été la matière de mon expérience, n'en contenoit que 12, & que cette cinquième partie de la platine devoit le trouver dans le culot de cuivre, pesant 4 gros 48 grains, qui m'étoit resté de cette opération.

Je réduisis ce culot de cuivre en lames fort minces & propres à être promptement attaquées par l'acide nitreux : je n'en employai d'abord qu'une douzième partie ou 28 grains; je les fis dissoudre à froid dans l'acide nitreux que j'avois affoibli; la dissolution fut lente, mais complète; & lorsque je m'aperçus que l'acide n'agissoit plus sur le métal, je mis le matras sur le feu, & j'y tins la liqueur en ébullition pendant quelque temps : il s'en précipita une poudre noirâtre que je lavai avec de l'eau distillée, que je rassemblai avec soin & que je fis recuire ensuite dans un petit creuset : elle y prit une couleur grise; examinée au microscope, elle avoit le coup-d'œil de la platine en poudre & tous les caractères métalliques : je la pesai à une balance délicate, son poids ne se trouva que de $\frac{21}{64}$ de grain : je répétai trois fois cette expérience, en ne faisant dissoudre également que 28 grains ou un douzième du culot de cuivre; le poids de la poudre de la platine que je recueillois rouloit toujours sur 20 à $\frac{21}{64}$ de grain : on a vu cependant que chacune de ces portions déterminées du culot de cuivre auroit dû contenir 1 grain entier de platine, ou au moins à peu-près 1 grain, en supposant que ce métal n'eût souffert aucune altération notable dans l'opération du départ : on remarque au contraire qu'il s'est trouvé une perte des deux tiers sur chacun des petits produits en poudre de platine, & que cette perte s'est soutenue constamment dans les quatre différentes dissolutions.

Je jugeai encore mieux du degré de confiance que pouvoient mériter ces premiers résultats par celui qui les suivit; je fis dissoudre dans de l'acide nitreux affoibli & à froid également jusqu'au moment où l'acide n'agissoit plus, 112 grains du même culot de cuivre; je cherchai, comme on voit, dans le produit d'une seule opération celui que les

quatre autres réunies m'avoient donné; il fut effectivement d'un grain $\frac{10}{32}$ de platine, quantité à laquelle se rapportoient les produits réunis des expériences précédentes, & qui n'étoit elle-même que le tiers, à très-peu près, des 4 grains de platine que les 112 grains de cuivre auroient dû contenir. Il paroît certain, d'après les détails dans lesquels je viens d'entrer, que si la quantité de flux noir que j'ai été contraint d'employer étoit dix fois plus considérable qu'il ne falloit pour revivifier le peu de platine que le cinquième du dépôt salin contenoit, & la chaux de cuivre que j'y avois jointe, cette même chaux de cuivre étoit aussi plus que suffisante pour saisir toutes les particules de la platine capables de reprendre l'état métallique & pour se combiner parfaitement avec elles. Sur 12 grains de platine, il n'y en a eu que 4 qui ont pu rentrer dans l'état de métal; le cuivre s'en est emparé, & ces 4 grains de platine se sont trouvés répandus avec une égalité parfaite, comme je viens de le faire observer, dans les 336 grains de cuivre, auxquels s'étoit réduite la chaux de ce même métal que j'avois employée.

Si au lieu de verser de l'alkali fixe sur l'acide nitreux tenant la platine en dissolution, & de faire évaporer ensuite la totalité de la liqueur pour obtenir le nitre régénéré & chargé de la platine, on fait évaporer l'acide nitreux dans l'état où il est lorsque l'argent en a été précipité par le moyen de l'esprit de sel, on aura un léger dépôt qui contiendra la platine, comme le nitre régénéré l'auroit contenu: si à ce dépôt peu considérable, on joint le double & même le quadruple de son poids en chaux de cuivre, afin qu'elle puisse recueillir toutes les parcelles de platine, & on traite ce mélange par le flux noir, on obtiendra un petit culot de cuivre très-ductile qui contiendra la platine, mais qui après avoir été dissous à froid par l'acide nitreux, ne laissera au fond du matras que la moitié ou environ de la quantité de cette même platine qu'on aura employée; ce restant de la quantité du métal mis en expérience, ne sera pas même entièrement dans l'état métallique, puisqu'en le mettant dans un matras avec
de

de l'acide marin, après l'avoir recuit, & en faisant bouillir la liqueur, on remarquera que cette platine réduite en poudre grisâtre perdra un peu de la couleur cendrée, reprendra celle qui est propre à la platine brute, mais éprouvera une nouvelle diminution sur son poids : ce nouveau déchet n'est pas constamment égal, toute proportion gardée ; il dépend du plus ou du moins de particules ferrugineuses qui se trouvent mêlées avec les parties de platine dont l'état métallique est encore conservé : cette seconde perte est quelquefois d'un tiers, d'un quart ou d'un cinquième du poids qu'avoit le précipité de platine avant qu'on l'exposât à l'action de l'acide marin. On voit par-là que la platine dissoute d'abord par l'eau régale, où elle a éprouvé beaucoup de déchet, portée ensuite à l'état de ductilité, & dépouillée par conséquent d'une grande quantité de matière ferrugineuse, se trouve réduite, après une première dissolution dans l'acide nitreux, à la moitié ou environ du poids qu'elle avoit avant qu'elle fût soumise à l'action de ce dernier acide, & fera sans cesse des pertes proportionnelles lorsqu'on la traitera de nouveau par l'acide nitreux & suivant le procédé que j'ai décrit.

Il est bon d'observer ici que la méthode dont je viens de parler, celle de faire évaporer la liqueur dans laquelle la platine est restée en dissolution, après que l'argent en a été précipité par le moyen de l'esprit de sel, & de ne point employer auparavant de l'alkali fixe, il convient, dis-je, de faire attention que ce procédé, outre qu'il est plus simple que celui que j'avois d'abord suivi, est le plus favorable pour ne rien perdre de la platine contenue dans la liqueur, & que j'ai remarqué moins de déchet sur le métal, en employant ce procédé plus simple, que je n'en avois reconnu dans les premières expériences dont j'ai exposé les détails.

On m'objectera peut-être & avec raison, que par le procédé dont j'ai fait usage, j'ai recueilli, il est vrai, du dépôt salin toute la platine qu'il contenoit, mais qu'il a pu s'en dissoudre une partie pendant la dissolution du cuivre avec lequel la platine étoit mêlée, comme elle éprouve jusqu'à un certain

point l'action de l'acide nitreux, lors même qu'elle n'est combinée qu'avec de l'argent ; & on ajoutera, par une conséquence juste de cette supposition, que j'ai annoncé le poids de la poudre de platine, après la dissolution du cuivre, comme plus foible qu'il n'est réellement.

Cette objection est bien fondée ; c'est même parce que j'ai senti qu'elle se présenteroit naturellement à l'esprit lorsqu'on suivroit le fil de mes recherches, que j'ai fait plusieurs expériences relatives à ce point particulier : je crois qu'elles pourront faire juger avec une sorte de précision, de ce qui reste réellement en platine après la dissolution de ce métal dans l'acide nitreux.

On a vu dans l'expérience précédente, que le culot de cuivre retiré du cinquième du dépôt salin devoit contenir $\frac{1}{28}$ en platine : je ne m'écartai point de cette proportion pour les expériences dont je vais parler ; mais au lieu de composer de ces deux métaux un petit lingot duquel je pusse tirer des portions à mesure que j'en aurois besoin, je ne mêlai que 2 grains de platine ductile à 56 grains de cuivre ; & afin que je fusse certain que ces 2 grains de platine étoient bien réellement dans le cuivre que j'aurois à faire dissoudre dans l'acide nitreux, j'employai, pour les fondre ensemble, le feu de lampe des Émailleurs, tantôt en réunissant les deux métaux dans une coupelle d'essai sur laquelle dardoit la flamme, tantôt en les mettant sur un charbon plat & dans un petit bassin qu'on y avoit creusé. Je n'aurois jamais pu compter sur une distribution égale de la platine dans un lingot de cuivre, si j'eusse employé ce moyen d'unir les deux métaux ; & d'un autre côté j'aurois souvent couru le risque de laisser adhérentes dans un creuset quelques-unes de leurs parties si je me fusse borné à n'y fondre que 58 grains pour le total des deux métaux : j'obtins plus sûrement la précision que je desirois, à la faveur de la flamme dardée vivement sur les deux métaux : j'eus besoin qu'elle y fût poussée assez longtemps & avec violence, tant le cuivre rouge, & sur-tout la platine, entrent difficilement en fusion par ce moyen. Chacun

des boutons métalliques que j'avois ainsi mélangés, contenoit donc la petite portion de platine que je lui avois associée, & je ne pouvois attribuer qu'à l'action de l'acide nitreux la moindre perte que j'y remarquerois.

Après avoir aplati ces boutons sous le marteau, & les avoir réduits en lames minces, je les divisai chacun en huit ou dix parties, & je les fis dissoudre à froid dans de l'acide nitreux affoibli par une égale quantité d'eau distillée; cet acide ainsi affoibli, n'avoit que 21 degrés de force ou à peu près: j'avois cru d'abord qu'il auroit peut-être suffi de faire dissoudre à froid ces lames minces & composées presque entièrement de cuivre, pour avoir en précipité bien net, les 2 grains de platine qui s'y trouvoient joints; je voyois la dissolution s'opérer d'une manière égale & toujours soutenue; je remarquois, à l'aide de la loupe, les particules noirâtres de platine qui se dégageoient de celles du cuivre, & voltigeoient dans la liqueur à mesure que ce dernier métal se fondoit peu-à-peu dans l'acide, en se combinant avec lui, & je regardois l'opération comme terminée lorsque la liqueur devenue tranquille avoit laissé tomber au fond du matras en poudre noire, en petites lames excessivement minces, toute la platine qu'elle contenoit; mais après avoir lavé avec beaucoup de précautions ce précipité & l'avoir fait recuire, j'ai observé quelquefois qu'il pesoit un peu plus de 2 grains, & qu'il receloit encore par conséquent quelques particules de cuivre: dès-lors je me déterminai à faire bouillir l'acide pendant quelques minutes après la dissolution à froid & l'état tranquille de la liqueur. Loin d'avoir un excédant de poids lorsque j'avois ainsi donné par la chaleur plus d'action à l'acide nitreux, j'observois quelque diminution sur le poids de la platine, & je voyois qu'elle rouloit sur un quart de grain ou environ, c'est-à-dire sur le huitième de la platine que chacun des boutons contenoit. Je répétai plusieurs fois cette expérience, soit en faisant dissoudre le bouton tout entier, soit en le divisant en deux ou même en quatre parties, pour faire autant d'opérations & obtenir des résultats que je pusse

rapprocher de celui que le bouton entier m'avoit fourni : Il m'a toujours paru que la perte sur les 2 grains de platine rouloit, comme je l'ai dit, sur un huitième ou environ de ce métal, lorsqu'on n'avoit rien perdu des particules sans nombre, infiniment légères & très-lentes à se précipiter en total, qui composoient la quantité juste de platine que j'avois à recueillir. Cette opération en effet, quand même on la feroit en grand, demande beaucoup de soin ; & peut-être, en la bornant à de petits objets dont une balance délicate ne manqueroit jamais de déterminer le poids, seroit-il possible d'y mieux réussir qu'en employant une quantité un peu considérable de platine, dont les particules subdivisées à l'infini dans une grande quantité de liqueur, seroient très-difficiles à rassembler.

Ne pouvant pas douter que la platine mêlée avec du cuivre ne fût attaquée jusqu'à un certain point par l'acide nitreux, quoiqu'affoibli & employé à froid, je tâchai de faire restituer à cet acide le quart de grain en platine dont il s'étoit chargé : je suivis à cet égard la méthode que j'avois déjà employée & dont on a vu les détails : je versai de l'alkali fixe sur cet acide jusqu'à saturation ; je fis évaporer la liqueur, & ayant traité ensuite par le flux noir le dépôt qu'elle me laissa, j'en tirai un petit bouton de cuivre qui fut laminé & dissous dans l'acide nitreux : il resta au fond du matras un léger dépôt de poudre noirâtre que je lavai attentivement avec de l'eau distillée & que je fis précipiter ensuite dans un petit creuset neuf dont le fond étoit très-net : au lieu d'y trouver, après le recuit qu'y reçut cette poudre noire, des parcelles de platine dans l'état métallique, éparées, mais aisées à rassembler au moindre coup que l'on donne au creuset, je n'y vis qu'une tache noirâtre superficielle, sans aucune apparence de métal, & si adhérente au fond du creuset, qu'il me fut impossible d'en détacher quelques parties pour mieux les examiner. A la vue de cette pellicule noire & comme incrustée dans l'endroit du creuset où le précipité de platine s'étoit réuni, il ne me fut pas difficile de reconnoître la poudre noire dont j'ai déjà parlé, qui s'attachoit fortement aux capsules de verre, &

dont je ne pus parvenir à former un petit amas pulvérulent qu'en la détachant peu-à-peu des parois de la capsule & à mesure qu'elle perdoit son humidité : on se rappelle que cette poudre noire n'avoit presque rien conservé de sa nature métallique, & annonçoit une décomposition en partie de la platine, comme le fait dont il s'agit ici tend beaucoup à la confirmer.

Je ne pus donc pas constater par le poids, si le quart de grain en platine que l'acide nitreux avoit enlevé, se trouvoit réellement dans le précipité que j'obtins ; mais il me parut assez considérable pour répondre à ce quart de grain, s'il eût repris ses propriétés métalliques, & conséquemment la pesanteur spécifique de la platine dont ce précipité étoit une portion.

Dans le nombre des boutons composés de 56 grains de cuivre & de 2 grains de platine, que je fis fondre au feu de lampe, il s'en trouva deux qui m'instruisirent d'un fait aussi singulier en lui-même, qu'il s'accorde peu avec un autre du même ordre dont je suis témoin tous les jours.

Après avoir réduit un de ces boutons en une lame très-mince, & l'avoir coupée avec des ciseaux en huit ou dix parties, je la fis dissoudre dans de l'acide nitreux affoibli ; lorsque la liqueur fut tranquille & que l'opération me parut terminée, je considérai, à l'aide de la loupe, le fond extérieur du matras, dans la vue seule d'examiner la quantité de platine en poudre qui pouvoit s'y être précipitée ; je fus fort surpris d'y apercevoir de petites plaques blanches dont la forme me parut la même que celle des morceaux du bouton laminé que j'avois mis dans le matras & dont j'attendois l'entière dissolution, à la petite portion près de platine qu'ils contenoient : ma première idée fut de soupçonner que l'acide nitreux n'avoit pas produit tout son effet, & sur le champ je plaçai le matras sur le feu où l'acide resta en ébullition pendant quelque temps : cette dernière opération ne servit qu'à donner plus de blancheur, plus de netteté aux petites plaques que j'avois d'abord observées ; je n'hésitai donc plus à décanter l'acide, à laver le précipité & à le faire tomber ensuite dans un petit creuset

où il pût recevoir un recuit; mais avant que d'en venir à ce dernier terme de l'opération, j'examinai attentivement les petites plaques que le creuset contenoit : je ne doutai point qu'elles ne fussent presque entièrement de platine, & je ne me trompois pas; mais leur petitesse, relativement à la dimension de celles que j'avois mises en dissolution, leur forme régulière & absolument pareille à celle de ces mêmes plaques mises dans l'acide nitreux, la surface assez considérable qu'elles occupoient, quoiqu'elles ne dussent peser que 2 grains, tout me parut surprenant dans ce fait & piqua ma curiosité. Mon étonnement augmenta lorsque je vis que ces plaques avoient conservé toutes leurs dimensions après le recuit, ou au moins n'avoient pas pris une retraite sensible; elles pesoient ensemble 2 grains & représentoient par conséquent le poids total de la platine qui étoit entrée dans le bouton duquel ces plaques sortoient. Instruit de ce que j'avois à observer dans une seconde expérience, par le fait assez singulier que je venois d'avoir sous les yeux, je m'appliquai moins à chercher quelle pouvoit en être la cause, qu'à le constater de manière qu'il ne me restât aucun doute sur la certitude que j'y attacherois. Lorsque j'eus aplati sous le marteau & réduit en une lame mince un bouton pareil à celui dont je viens de parler, je coupai sur cette lame deux petites plaques parfaitement égales, & qui avoient chacune 7 lignes $\frac{2}{3}$ de longueur sur 3 lignes $\frac{1}{4}$ de largeur; une de ces plaques fut mise dans l'acide nitreux affoibli, & je réservai l'autre pour lui être comparée après la dissolution du cuivre qu'elle contenoit : l'effet que j'ai annoncé plus haut eut lieu également dans cette expérience-ci; il se trouva au fond du matras une petite plaque blanche qui avoit conservé sa première forme, mais dont les dimensions étoient beaucoup plus petites au simple coup-d'œil, que celles de la plaque que j'avois réservée: je décantai l'acide nitreux, & après avoir lavé la plaque, qui étoit d'une légèreté extrême, je la fis glisser doucement dans un petit creuset; lorsque l'eau en fut totalement écoulée & que la plaque fut restée à sec, j'en pris les dimensions avec un compas; elle n'avoit plus

que 3 lignes $\frac{1}{2}$ de longueur sur 2 lignes $\frac{1}{4}$ de largeur; elle avoit perdu par conséquent 4 lignes $\frac{1}{2}$ d'un côté & 1 ligne $\frac{1}{2}$ de l'autre. Le recuit que je donnai à cette petite feuille de platine ne produisit aucun changement dans ses dimensions, ou au moins il ne fut pas assez marqué pour que le compas m'en avertît.

On sera étonné sans doute que la retraite considérable, & une retraite en tout sens que cette feuille de platine a éprouvée, n'ait eu lieu que dans l'acide nitreux & pendant la moindre action sur le cuivre qui la contenoit; on verra encore avec surprise que le recuit n'a contribué en rien au rétrécissement d'une feuille de métal si légère, tandis qu'il est certain qu'un cornet d'or, après le départ, conserve toutes les dimensions qu'il avoit avant que d'y être soumis, & qu'au contraire après le recuit il perd un tiers, ou à peu-près, sur ces mêmes dimensions.

On présumera peut-être que la grande diminution que j'ai observée sur l'étendue qu'avoit d'abord cette feuille de platine, n'étoit pas dûe à un resserrement des parties sur elles-mêmes, mais à un retranchement qui a pu se faire avec une sorte d'égalité aux bords de cette feuille, tandis que le milieu est resté intact & tel qu'il subsistoit dans la petite plaque avant que l'acide nitreux l'attaquât: mais on écartera bien-tôt cette idée quand j'aurai fait observer que non-seulement les bords de cette feuille de platine étoient parfaitement terminés & avoient conservé leur vive-arête, mais qu'on remarque encore quelquefois, avec le secours de la loupe, sur les bords de quelques-unes de ces feuilles, une légère bavure, une espèce de morfil que la cisoire occasionne, parce qu'elle ne coupe pas toujours d'une manière bien nette les plaques d'où sortent ces petites feuilles de platine *. Les bords de celle dont il s'agit ici

* On doit faire attention encore que dans le cas où l'on persisteroit à croire qu'il n'y a pas de retraite réelle dans la feuille de la platine, mais que ses bords sont entamés de toutes parts,

& que le milieu seul subsiste dans son entier, il faudroit supposer que la portion détachée des bords s'annoncerait d'une manière sensible, quelque foible qu'elle fût, & se précipiteroit

424 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

n'ont donc souffert aucune altération ; & comme il est constant que cette feuille si délicate de platine a éprouvé une diminution considérable sur son étendue, même au milieu d'un fluide très-actif qui tendoit sans cesse par sa nature à écarter les unes des autres les parties de cette feuille, on se trouve forcé de reconnoître qu'il y a eu dans cette circonstance une retraite bien réelle, un rapprochement de ces mêmes parties dont la cause paroît d'autant plus difficile à découvrir, que ce fait particulier ne s'accorde point avec ceux du même ordre qui sont connus, & qu'il ne laisse rien entrevoir qui conduise à l'expliquer.

Il sera plus aisé, je crois, de remonter à la cause d'un autre fait qu'on a pu remarquer dans l'expérience dont j'expose ici les détails. On a dû être surpris que 2 grains de platine fondus avec 56 grains de cuivre aient pu subsister en feuille après la dissolution du second de ces métaux ; on a dû naturellement s'attendre à un précipité de platine en poudre, parce qu'en la supposant également distribuée dans toute l'étendue du mélange, chaque grain de platine répondoit à 28 grains de cuivre ; & que dans cette supposition d'une combinaison parfaite, il ne seroit pas possible que 2 grains de métal formaient un corps continu, comme la petite feuille de platine dont il s'agit ici, quelque léger & criblé de toutes parts qu'on pût l'imaginer. Ainsi on ne peut donner une explication plausible de ce fait qu'en supposant, avec beaucoup de

au fond du matras : or on ne remarque dans ces circonstances aucune particule de platine qui soit mêlée avec les feuilles ; celles-ci sont seules au fond du matras, & s'y offrent dans la plus grande netteté au milieu de la liqueur qui a toute sa transparence.

Il est vrai que ces feuilles de platine se divisent quelquefois en deux parties dont les bords sont bien terminés & sans apparence de rupture, par la raison sans doute qu'elles proviennent de deux petits morceaux de platine qui

n'étoient qu'adhérens l'un à l'autre dans le bouton de cuivre, qui n'étoient point entrés en fusion avec ce dernier métal, & qui s'étoient étendus l'un à côté de l'autre sous les rouleaux du laminoir ; mais en rapprochant les deux parties de cette feuille de platine, on voit clairement qu'elles en forment la totalité, & représentent, à la grande retraite près qu'elles ont éprouvée, la petite plaque de cuivre chargée d'un peu de platine, à laquelle ces deux portions de la feuille appartenoient.

vraisemblance,

vraisemblance, que le mélange de la platine & du cuivre n'étoit pas complet dans cette circonstance, quoiqu'il eût été fait au feu de lampe, & que la matière en fusion roulât comme une perle, dans le bassin de la coupelle, pour peu qu'on l'agitât. Les deux grains de platine n'auront été mis, selon toute apparence, que dans un état pâteux au milieu du cuivre en fusion; peu de ce dernier métal les aura pénétrés; & ces 2 grains de platine aplatis sous le marteau dans le bouton de cuivre qui les contenoit, laminés ensuite avec lui, auront pris toute l'extension dont ils étoient susceptibles, & auront formé, au milieu de la lame de cuivre, une lame distincte de platine qui, par sa nature, devoit résister à l'acide nitreux. J'ai remarqué en effet, dans une occasion où je faisois fondre du cuivre & de la platine au feu de lampe, & où je regardois ces deux métaux comme bien mêlés, qu'un des boutons que j'avois obtenus, laissoit apercevoir une petite portion de platine, dont l'éclat argentin me frappa sur le champ, & qui étoit restée intacte au-dessous du cuivre en fusion.

Quoique je ne doutasse point que les précipités de platine, ayant toutes les propriétés métalliques après la dissolution de ce métal par l'acide nitreux, ne pussent être décomposés en très-grande partie par l'effet d'une seconde dissolution, comme l'avoit été la platine ductile que j'avois fait dissoudre en premier lieu par le même acide, cependant je voulus avoir une expérience positive sur cette altération nouvelle de la platine, & je présimai qu'elle seroit au moins aussi considérable que celle dont on a eu la preuve dans les expériences peu différentes entr'elles, que j'ai rapportées à ce sujet.

Je mêlai donc 6 grains de précipité de platine réduite en poudre, qui provenoient de mes expériences, & qui avoient au coup-d'œil tous les caractères métalliques, avec 24 grains d'or fin & 69 grains d'argent dépouillé également de tout alliage: je fis passer à la coupelle ces trois métaux dans une quantité de plomb convenable; je laminai le bouton qui en provint, & après en avoir formé deux cornets, j'en fis le départ avec les ménagemens que deman-

Mém. 1779.

H h h

doit la quantité d'argent fin que j'avois employée pour que les cornets d'or se conservassent dans leur entier. Je retirai ensuite, à la faveur de l'esprit de sel, tout l'argent que la dissolution contenoit, & n'attendant alors de l'eau régale qui en étoit résultée, que la platine seule dont la quantité juste m'intéressoit, j'y versai de l'alkali fixe, comme on a vu précédemment que je l'avois fait pour des expériences pareilles, & je procédai à l'évaporation totale de la liqueur; je mêlai 5 gros de chaux de cuivre des affinages avec le dépôt salin que la liqueur me laissa; je fis ensuite entrer ce dépôt pour un sixième dans le flux noir que je composai; je revivifiai ce cuivre; j'en obtins un culot très-net du poids de 3 gros $\frac{1}{2}$ 22 grains, & tenant la petite portion de platine qu'il avoit recueillie: il en contenoit fort peu en effet; à peine m'en donna-t-il un grain réduit en une poudre grise, métallique il est vrai, mais sur laquelle on auroit remarqué un déchet sensible, si on l'eût rassemblée en un globule de platine nette & ayant toute la ductilité.

Les deux cornets d'or dépendans de cette expérience, & dont j'ai parlé plus haut, avoient retenu un demi-grain de platine, ou à peu-près, sur les 6 grains que j'avois employés; on vient de voir que le culot de cuivre m'en restitua un grain; je perdis donc dans cette expérience les trois quarts ou environ de la platine qui y étoit entrée.

On remarquera peut-être que la platine en poudre dont il falloit que je fisse usage, dans la vue de suivre sa décomposition, n'étoit pas assez nette, assez réduite à son état vraiment métallique, pour que je pusse en déduire une perte réelle avec autant de précision que je l'ai fait; mais on voudra bien observer que j'ai établi le poids de cette platine en poudre sur le pied de celui qu'elle avoit, comme résultat des premières expériences; qu'on ne sauroit exiger une diminution à l'égard du poids réel de cette platine en poudre que j'ai employée en second lieu, qu'elle ne retombe sur celui du produit en précipité de platine que j'ai d'abord annoncé, & qu'il est assez indifférent pour la perte réelle que souffre ce métal, ou qu'elle

soit égale dans des opérations réitérées, ou qu'elle soit plus considérable à mesure que la platine subit des épreuves, & passe de l'état métallique à celui où elle est mise par l'action violente d'un dissolvant.

Quelque opinion que l'on ait à l'égard de l'effet, soit constamment égal de l'acide nitreux sur la platine, soit plus marqué à mesure qu'on l'a fait précipiter de cet acide pour la soumettre de nouveau à toute son action, il paroît constant, d'après mes expériences, que la platine ductile a éprouvé d'abord un déchet de près des deux tiers de la quantité que j'en avois employée : il paroît certain également que la platine en poudre retirée de l'acide nitreux & dissoute de nouveau par ce même acide, a souffert une perte au moins aussi considérable que celle dont je parle ; & par une suite nécessaire de ces déchets successifs sur une quantité déterminée de platine, on voit qu'il ne reste à la fin de la seconde opération, qu'une petite partie du métal employé.

Si l'on présume que j'ai porté un peu trop haut cette perte, par la raison que je n'ai pas fait restituer à l'acide nitreux, malgré les précautions que j'ai prises, toute la platine qu'il contenoit, ou parce que la chaux de cuivre ne s'est pas chargée de la totalité du métal que le dépôt salin receloit, on peut borner le déchet à la moitié, ou aux deux cinquièmes de ce métal ; mais je prie qu'on se rappelle dans ce moment, qu'il y a une perte de moitié ou environ sur la platine brute, après sa dissolution par l'eau régale, & lorsqu'elle a été conduite à cet état de ductilité parfaite, que d'habiles Chimistes ont eu le talent de lui procurer ; qu'on fasse attention que par mes expériences cette perte, & une plus forte quelquefois, a lieu sur ce métal, après même qu'il est devenu ductile, & qu'on l'a dépouillé d'une matière qui en altéroit la pureté ; qu'on observe encore que ce métal attaqué sans cesse par l'acide nitreux, éprouve sans cesse de nouveaux déchets, & toujours aussi considérables qu'il les avoit soufferts avant que d'avoir été mis dans l'état de pureté dont il est susceptible ; qu'on remarque enfin qu'en faisant ainsi dissoudre la platine,

même celle qui est ductile, par l'acide nitreux, en rétablissant ensuite dans l'état métallique ce qu'il en reste comme précipité, ce métal paroît se détruire continuellement, & ne laisse bien-tôt, pour peu que ces opérations soient répétées, que de foibles vestiges de la consistance qu'il avoit.

Lorsqu'on traite les métaux & sur-tout ceux qui sont parfaits, on est si peu accoutumé à des déchets considérables, tels qu'on les remarque sur la platine, qu'il seroit difficile de regarder les principes qui la constituent, comme aussi fixes que ceux des autres métaux : en même temps qu'on est frappé de sa grande pesanteur spécifique, on est étonné des altérations notables qu'elle éprouve par les effets de l'acide nitreux, tandis que d'autres métaux beaucoup moins pesans qu'elle, cèdent facilement, il est vrai, à l'action des acides, mais reviennent bien-tôt avec peu de perte & plus purs qu'ils n'étoient à l'état de solidité, de liaison intime des parties qui les caractérisoit.

On a vu, dans le courant de ce Mémoire, que mes expériences m'ont conduit nécessairement à faire un grand nombre de réductions, pour revivifier la chaux de cuivre que j'employois, & recueillir par ce moyen les moindres parcelles de platine que l'acide nitreux mêlé d'un peu d'esprit de sel avoit laissées au fond des capsules, après l'évaporation totale de la liqueur, que le cuivre avoit saisies en reprenant son état métallique, & avoit entraînées avec lui au fond des creusets, où le culot composé de cuivre & d'un peu de platine s'étoit formé.

On soupçonnera peut-être que si j'ai éprouvé, dans ces réductions, des déchets considérables sur la platine, c'est uniquement parce que je n'ai pas retiré des différens dépôts, que les liqueurs évaporées m'ont fournis, toute la platine qu'ils contenoient; que les scories que j'abandonnois, après l'opération, pouvoient encore receler des parcelles de platine; que les particules excessivement atténuées de ce métal pouvoient avoir échappé au cuivre qui se revivifioit, & s'être trouvées ensuite trop légères pour se précipiter d'elles-mêmes au fond du creuset à travers du flux noir, quelque fluide qu'on le supposât.

Quoique j'aie toujours eu l'attention d'employer vingt ou trente fois plus de chaux de cuivre dans mes réductions, que je n'attendois de platine qui s'y seroit réunie, quoique cette chaux fût réduite elle-même en parties de la plus grande ténuité, capables par conséquent de saisir par-tout celles de la platine qu'elles rencontreroient, & que j'eusse tout lieu de croire qu'il n'étoit rien resté dans les scories qui eût pu rentrer dans l'état métallique; cependant afin de ne laisser subsister aucun doute à cet égard, j'ai tourné mes vues du côté de l'examen de ces mêmes scories, & je les ai traitées comme si elles eussent contenu encore la platine que j'en avois retirée.

A la suite de quelques réductions & après avoir cassé les creusets où elles avoient été faites pour en tirer les culots de cuivre, j'ai recueilli avec soin les fragmens de ces creusets auxquels des portions de scories restoient adhérentes, & je les ai mis dans une terrine de grès, en y versant une quantité d'eau suffisante: au bout de quelques jours ces scories se sont ramollies, se sont détachées entièrement des fragmens de creuset & sont tombées au fond de la terrine; j'ai fait filtrer ensuite à travers un papier gris, la totalité de l'eau chargée du dépôt des scories qui s'y étoit formé, & lorsque le papier, ainsi que le dépôt qui étoit resté à sa surface, a eu perdu la plus grande partie de son humidité, je l'ai fait calciner jusqu'au rouge dans un creuset; j'ai réduit en poudre impalpable dans un mortier ces scories calcinées, j'y ai mêlé une quantité convenable de chaux de cuivre, & j'ai procédé de nouveau à la réduction de ces matières par le flux noir, en y portant la même attention que j'y eusse donnée pour retirer de ces matières une certaine quantité de platine que je n'eusse pas douté d'obtenir.

Après avoir fait dissoudre dans l'acide nitreux, avec les ménagemens qu'on a déjà vus, le culot de cuivre que je tirai de la première de ces réductions, dans lesquelles j'avois pour objet l'examen des scories, je remarquai qu'il se précipita au fond du matras une petite quantité de poudre noirâtre très-légère, laquelle même ne s'y précipita en total qu'après

le refroidissement & un assez long repos de l'acide nitreux, dans lequel j'avois achevé de faire dissoudre le culot de cuivre que j'avois obtenu de cette première réduction : j'eus l'attention, en lavant cette poudre légère, de n'en perdre aucune parcelle ; je la fis tomber entièrement au fond d'un petit creuset, en y plongeant l'extrémité du col du matras, tenu dans un sens renversé, & par-là donnant lieu à la chute de toute la poudre répandue dans l'eau que ce matras contenoit : ce ne fut que très-lentement & après un temps considérable que la totalité de cette poudre noirâtre se déposa au fond du creuset ; ce ne fut que peu-à-peu & en frappant légèrement les parois du creuset, que je parvins à l'y rassembler en une petite masse dont aucune partie ne pût rester écartée après le recuit. Quand l'eau que le creuset contenoit encore en eut été égoutée entièrement ou s'y fut imbibée, je plaçai le creuset entre des charbons ardents, & je fis subir à cette poudre un recuit ordinaire.

Je crus trouver au fond du creuset, après cette opération, une matière pulvérulente & facile à se détacher des parois intérieures du creuset, comme j'y observois ordinairement la platine en poudre & en état métallique que je recueillois : mais celle-ci étoit adhérente au fond du creuset ; elle y formoit une tache noirâtre & qu'il ne me fut jamais possible d'enlever. Alors je sentis qu'on ne pourroit obtenir ce peu de matière noirâtre dans un état pulvérulent, qu'en la rassemblant dans une capsule de verre, en l'y faisant sécher à un feu doux, en la détachant peu-à-peu par le moyen d'une lame de couteau, & en la faisant recuire ensuite dans un creuset, après l'y avoir rassemblée en un petit monceau : je suis parvenu en effet, par ce dernier moyen, à obtenir dans l'état pulvérulent & assez bien détaché du creuset, le peu de matière noirâtre que les scories m'ont donné toutes les fois que je les ai traitées par le flux noir ; mais je n'y ai rien aperçu de métallique, quoique j'aie examiné attentivement cette poudre à l'aide du microscope ; elle étoit même en si petite quantité & d'un poids si léger, qu'elle n'auroit fait qu'une portion très-foible

de la petite quantité de platine à laquelle cette poudre avoit appartenu, dans le cas où elle eût repris tous les caractères métalliques.

Il résulte, comme on voit, de ces opérations réitérées sur les scories, que la portion de platine que j'ai retirée des réductions différentes dont j'ai parlé dans ce Mémoire, étoit toute celle qui avoit conservé ses propriétés métalliques; que les déchets que j'ai annoncés sur la platine dissoute par l'acide nitreux, paroissent aussi réels qu'ils sont extraordinaires dans une matière de la plus grande pesanteur spécifique; que la moitié ou environ de ce métal perd en se décomposant son caractère distinctif, se trouve réduite à des parcelles impalpables, d'une légèreté excessive, & si difficiles à rassembler, qu'à peine en peut-on recueillir une partie en prenant toutes les précautions possibles, pour qu'aucune de ces parcelles n'échappe à l'amas très-petit & toujours prêt à se désunir qu'on est venu à bout d'en former au fond d'un creuset.

Si, d'après ce fait bien constant, on considère qu'une quantité déterminée de platine dissoute à plusieurs reprises par l'acide nitreux, à la faveur de son mélange avec l'or & l'argent, ne cesse point d'éprouver des pertes considérables à mesure qu'on la retire en partie de l'opération du départ, & qu'on soumet la partie retirée du métal à une nouvelle dissolution; si l'on fait attention que les scories de la troisième ou quatrième réduction fournissent la matière noirâtre, très-légère & si difficile à se précipiter dont il vient d'être question, comme les scories de la première réduction l'avoient donnée, & qu'il n'y a de différence à cet égard que relativement aux quantités, alors on sentira que ce n'est point ici l'effet de l'épurement simple d'un métal, mais les suites d'une décomposition & d'une altération si réelle des principes qui constituent cette matière, qu'il n'en subsiste qu'une très-petite partie après quatre ou cinq opérations, & qu'on tireroit la poudre noirâtre des scories d'une dernière épreuve, comme on l'auroit obtenue de toutes les autres réductions qui l'auroient précédée.

Cette matière qui ne cesse point de se décomposer, ne seroit-elle proprement que du fer? alors il ne faudroit supposer que ce métal dans la platine, puisqu'elle éprouve des altérations notables chaque fois qu'elle est dissoute par l'acide nitreux: mais d'un autre côté sa grande pesanteur spécifique semble annoncer un alliage qui a toute une autre densité que le fer. Peut-être la pénétration a-t-elle lieu dans cet alliage singulier, comme je l'ai observée dans ceux qui sont composés d'étain pur & de cuivre rouge; elle concourroit, si elle avoit lieu effectivement, à l'explication de la densité surprenante d'un mélange où le fer paroît certainement dominer, & qui cependant, quant à cette même pesanteur spécifique, doit être mis à côté de l'or.

Mais il n'y a encore à cet égard que de simples conjectures à former. Les expériences dont je viens de rendre compte, la décomposition du métal qu'on y a remarquée, les déchets considérables & toujours renouvelés qui en ont été la suite, pourront donner lieu à des recherches plus profondes que celles que j'ai présentées, & nous procurer enfin des lumières décisives sur un point de physique aussi propre à piquer par lui-même la curiosité, qu'il demande des manipulations délicates, des attentions scrupuleuses, un travail obstiné.

Si je termine donc ce Mémoire par quelques observations sur la platine en elle-même, c'est moins pour en faire connoître la nature dans laquelle il paroît très-difficile de pénétrer, que pour écarter quelques idées qui pourroient se présenter à l'esprit dans l'examen de ce métal, soit relativement à son origine, soit à l'égard des principes qui le constituent ou des matières qui s'y trouvent jointes. Il paroît bien certain que le fer joue le principal rôle dans la platine, tant comme partie constitutive de ce métal, que comme l'accompagnant toujours dans les endroits d'où la platine est tirée. Non-seulement les grains de ce métal sont mêlés avec une grande quantité de sable ferrugineux & dans l'état pulverulent, mais j'ai remarqué souvent que de petits groupes de grains de platine étoient comme soudés ensemble par ce même sable ferrugineux, & se

se maintenoient en cet état, à moins qu'on ne les frappât pour les désunir.

Il y a toute apparence que les grains de platine se trouvent ainsi groupés, & par masses beaucoup plus fortes que nous ne les voyons, dans les mines desquelles on les tire, & que leur liaison est dûe à ce même sable ferrugineux : aussi les grains de platine qu'on tire de ces groupes ne sont-ils pas aplatis comme presque tous les autres que nous recevons isolés, & annoncent-ils qu'ils ont échappé à la trituration que les Espagnols emploient pour en séparer l'or.

Quelques Observateurs ont soupçonné que la platine étoit un produit de l'art, une suite des opérations que font les Espagnols dans l'exploitation de leurs mines d'or, & que malgré leurs précautions il restoit dans les résidus de leurs travaux, de petites portions de ce métal précieux, que nous trouvons toujours mêlées dans la platine que nous recevons d'eux.

Mais il est plus naturel de présumer que la platine se trouve dans des mines telle, à peu-près, qu'on nous l'envoie; qu'elle est le produit d'un feu souterrain & d'un assemblage de matières différentes, parmi lesquelles le fer domine. En examinant avec attention des grains de platine brute, j'en ai remarqué qui étoient incrustés dans de petits graviers, & y étoient enchâssés avec autant de justesse que l'est un diamant dans son chaton; d'ailleurs tous les grains de platine qui, dans la trituration, n'ont éprouvé aucun choc, conservent une forme qui annonce la fusion; ils sont très-lissés dans toute leur surface; tous leurs bords sont arrondis, & plusieurs d'entr'eux ont la figure de petits rognons, où l'on n'aperçoit aucune aspérité : cet état constant de la platine, avant qu'elle ait été soumise aux opérations de l'art, donne tout lieu de croire qu'il est dû à un feu violent & capable de fondre ce métal avec la portion de fer qu'il contenoit, pendant qu'une autre portion de fer qui ne sera pas entrée dans le mélange, se trouvera réduite à l'état pulvérulent dans lequel nous voyons ce dernier métal.

S'il est certain que parmi les grains de platine on trouve

presque toujours de petites paillettes d'or, & qu'après avoir fait bouillir de l'acide marin sur de la platine brute, on remarque, avec le secours du microscope, qu'un grand nombre des grains de ce métal ont leur surface dorée; il est constant aussi que ces mêmes grains de platine ne recèlent aucune partie d'or intérieurement. Sachant que quelques Naturalistes pensent que des veines de ce métal précieux traversent la platine, & par-là contribuent à sa pesanteur, j'ai choisi, dans les grains de platine, les plus gros que j'ai pu y apercevoir, & qui n'avoient point été aplatis; je les ai divisés en deux parties, & j'ai exposé ensuite sous le microscope ces deux portions du métal du côté par lequel elles s'étoient séparées: la mie de ces grains de platine avoit la couleur naturelle de ce métal, mais je n'y ai remarqué aucunes traces d'or; elles m'auroient aussi-bien frappé, s'il y en eût eu quelques-unes, que d'autres petits corps étrangers que j'y aperçus, tels que de très-petits graviers, de petites portions de quartz & une matière noirâtre qui ressembloit assez au sable ferrugineux: j'y ai remarqué aussi quelques soufflures qui, comme on fait, sont les indices assez ordinaires d'une fusion incomplète. Lorsqu'on examine avec attention les deux portions d'un grain de platine divisé, & qu'on les regarde par le côté où la rupture s'est faite, on s'aperçoit que le bord de la surface de ces portions de platine appartient à une espèce de croûte métallique très-mince, dont les grains de ce métal sont revêtus: elle est très-lisse & porte tous les caractères d'un métal qui a été fondu complètement: l'intérieur des grains de platine n'a pas la même netteté; les soufflures qu'on y voit & dans lesquelles une substance noirâtre dérobe l'éclat des parties métalliques, ces soufflures ou petites cavités donnent lieu de croire que quelqu'actif qu'ait été le feu qui a mis la platine en fusion, il n'a pas eu encore assez de violence pour bien fondre le métal, pour le rassembler en masse, & le dégager parfaitement de tout ce qui lui étoit étranger. On remarque en effet que dans la réduction des métaux, l'opération est incomplète, la matière n'est qu'en grenaille dispersée dans les

flux qu'on a employés, si la chaleur n'a pas été assez vive, si la totalité du mélange n'a pas été mis dans la plus grande fluidité: dès-lors on ne doit pas être surpris que la platine résiste à la chaleur de nos meilleurs fourneaux, puisque ceux de la Nature, dont les effets sont si prodigieux, ne paroissent pas encore assez actifs pour bien fondre la platine & réduire en masse ce métal. Quant à la pellicule d'or que le microscope fait apercevoir sur la surface des grains de platine qui ont été exposés à l'action de l'acide marin, il y a tout lieu de croire qu'elle est une suite de l'amalgame du mercure & de l'or, lorsque les Espagnols cherchent à retirer, par voie de trituration, les parcelles d'or que la platine contient; une portion du mercure chargée du métal précieux, peut alors rester adhérente à la surface de plusieurs des grains de platine, se dissiper, à la faveur d'un recuit, en laissant sur ces grains l'or dont le mercure s'est dépouillé; & cet or après avoir passé dans l'acide marin, jouira de l'éclat qui lui est naturel.

Cependant les parcelles de ce métal, qu'il est ordinaire de trouver parmi les grains de platine, contiennent encore quelque alliage qui en altère un peu la belle couleur: j'ai reconnu, par l'essai que j'ai fait de ces paillettes d'or, que leur alliage est à peu de chose près d'un sixième, & qu'on peut les regarder en général comme au titre de l'or employé pour les bijoux.

J'ai dit dans un endroit de ce Mémoire *, qu'après avoir Page 417.
obtenu un précipité de platine de la dissolution du cuivre, avec lequel ce métal étoit combiné, & lui avoir donné un recuit, on pourroit lui faire éprouver encore plus ou moins de déchet en le mettant dans l'acide marin, & en tenant pendant quelque temps cet acide en ébullition.

Je dois avertir premièrement que l'acide marin pris dans l'état ordinaire, n'attaque que faiblement ces précipités de platine, après qu'ils ont été recuits, mais que son action est plus forte sur eux si on les y expose avant qu'ils aient été recuits.

Je ferai observer en second lieu, que l'acide marin déphlogistiqué par la distillation de cet acide sur la manganèse,

attaque vivement, à l'aide de la chaleur, les précipités de platine avant qu'ils aient été recuits; qu'il les attaque également, quoiqu'avec un peu plus de difficulté, lorsqu'on les a fait rougir dans un creuset, & qu'il parvient, en assez peu de temps, à les dissoudre les uns & les autres, ou au moins à les mettre dans un état d'atténuation si complète, que l'acide, en prenant une couleur jaunâtre & un peu foncée, devient transparent après un jour ou deux de repos, sans laisser de dépôt sensible au fond du flacon qui le contient.

Mais il n'en est pas ainsi de la platine ductile, bien nette & laminée; l'acide marin déphlogistiqué ne l'attaque presque point, quoiqu'on le tienne assez long-temps en ébullition; il n'enlève pas même à ce métal le brillant qu'il a acquis en passant entre les rouleaux du laminoir: je n'ai observé en effet qu'une perte très-peu sensible sur le poids des petites plaques de platine laminée, auxquelles j'ai fait subir l'action de l'acide marin déphlogistiqué; elle n'étoit que la mille quatre-vingtième partie du poids de ces petites plaques, & j'ai remarqué qu'elle étoit assez constamment la même.

On voit par ces dernières expériences, dont il convenoit que je fisse mention, que la platine ductile, quoique très-inférieure à l'or à plusieurs égards, a cependant l'avantage sur ce métal précieux de résister tout autrement que lui à l'acide marin déphlogistiqué, puisque cet acide ainsi préparé attaque l'or pur très-sensiblement, le corrode à sa surface, lui enlève par conséquent tout son brillant métallique, & peut lui faire perdre un douzième, & dans certaines circonstances jusqu'à un sixième ou à peu-près de son poids; tandis qu'une lame de platine conserve, comme je l'ai dit, son éclat métallique, & reste presque intacte au milieu de ce même acide déphlogistiqué en ébullition *.

* M. Darcet, dont les lumières & l'exactitude sont connues, ne s'est pas borné à constater par des expériences & d'après les procédés de M. Schéele, l'action bien réelle qu'a sur l'or fin l'acide marin déphlogistiqué; il a an-

noncé à ce sujet des combinaisons & des remarques qui répandront du jour sur ce point de Chimie intéressant, & prouveront en particulier que cet acide acquiert beaucoup d'énergie à la faveur de certaines de ces combinaisons.

L'érosion qu'éprouve l'or fin dans cette expérience, devient très-remarquable lorsqu'après avoir plié en deux une lame brillante de ce métal, on la fait passer de nouveau ainsi pliée entre les rouleaux d'un laminoir; lorsqu'on a l'attention de maintenir les deux parties de la lame tellement appliquées l'une sur l'autre qu'elles ne laissent point de jour entr'elles, & qu'on expose ensuite la lame, dans cet état, à toute l'action de l'acide marin déphlogistiqué.

Si après l'effet qu'aura produit l'acide sur cette lame d'or ainsi doublée, on la rétablit dans son premier état, en mettant à découvert les deux surfaces de la lame qui étoient appliquées l'une sur l'autre, & que l'acide n'avoit pas pu attaquer, alors on sera frappé de l'éclat que la même lame d'or aura conservé d'une part, tandis que de l'autre elle sera de la couleur d'un jaune-mat un peu terne, & y aura souffert une altération notable par une suite de l'attaque vive de l'acide à laquelle rien ne se fera opposé.

Nota. On a dû remarquer, dans l'exposé que je viens de faire de toutes mes expériences sur la dissolution de la platine par l'acide nitreux, que ce métal a éprouvé plus de déchets lorsque j'ai mêlé de l'alkali fixe avec cette dissolution, & que j'ai traité ensuite, par le flux noir, le dépôt salin qui en est résulté, que quand j'ai fait évaporer simplement la dissolution sans y mêler d'alkali fixe, & que j'ai traité également par le flux noir le résidu qu'elle m'a donné. Ne pourroit-on pas soupçonner, d'après cette observation, que l'alkali fixe qu'on mêle ainsi intimement avec la platine atténuée au dernier point, & si susceptible par elle-même d'altération, a quelque action sur elle, & l'a d'autant plus sûrement que ce sel, dans la circonstance dont il s'agit, se trouve combiné en quelque sorte avec elle dans la réduction opérée par le flux noir, & y exerce toute son action sur ce métal, s'il l'attaque réellement, à la faveur du degré de chaleur assez considérable qu'exige la réduction complète, tant de la platine que de la chaux de cuivre destinée à la recueillir !



M É M O I R E
SUR L'INCLINAISON
DU TROISIÈME SATELLITE DE JUPITER.

Par M. DE LA LANDE.

Lû
le 9 Mai
1779.
Remis
en 1782.

LORSQUE je donnai à l'Académie, en 1762, l'explication du mouvement direct observé dans les nœuds du 4.^e Satellite, & dont on cherchoit la cause depuis long-temps, je remarquai que le nœud du 3.^e Satellite devoit avoir un mouvement semblable, & qu'il en résulteroit nécessairement dans l'inclinaison une variation que j'espérois discuter dans une autre occasion (a) : la quantité de cette variation n'étoit pas encore connue par les observations, & lorsque je publiai, en Octobre 1764, la première édition de mon ASTRONOMIE, on ne savoit autre chose sinon que depuis soixante-six ans, cette inclinaison avoit toujours augmenté; mais on ne voyoit point encore jusqu'où pourroit aller cette augmentation. Ce fut une des causes qui me fit proposer à l'Académie d'indiquer pour le sujet du Prix, *la Théorie des Satellites de Jupiter.*

M. Bailly, dans son excellent Ouvrage sur *les Satellites*, ayant cherché les masses des Satellites par les inégalités connues jusqu'alors, pensa que cette inclinaison pourroit bien augmenter jusqu'en 1797 (b), mais en ajoutant qu'il seroit bien fâché qu'on regardât cela comme une prédiction.

M. de la Grange, qui dans le même temps remporta le Prix de l'Académie sur ce sujet, proposoit une hypothèse de cent quatre-vingt-quinze ans, mais en ajoutant aussi qu'il ne prétendoit que donner une idée de la manière dont on pourroit rendre raison de l'augmentation de l'inclinaison (c).

M. Maraldi, qui a perfectionné & approfondi avec autant

(a) Mémoires de l'Académie, 1762, page 233; Mém. 1765, p. 607.

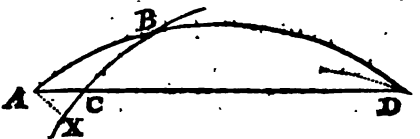
(b) Essai sur la Théorie des Satellites de Jupiter, 1766, page 135.

(c) Recherches sur les inégalités des Satellites, page 161, dans le Recueil des Pièces qui ont remporté les Prix, Tome IX, 1777.

d'affiduité que de pénétration tous les points de la théorie des Satellites, ne tarda pas à s'apercevoir que depuis 1763, l'inclinaison du 3.^e cessoit d'augmenter; & quoique les observations de 1769, dans les limites des plus grandes latitudes, eussent assez mal réussi, il vit que l'inclinaison étoit diminuée d'environ 2 minutes (d).

On attendoit avec impatience les observations de la limite suivante, en 1775, pour voir si cette diminution continueroit d'avoir lieu, & si la période d'augmentation avoit réellement fini en 1763; j'ai examiné pour cet effet toutes les observations que j'ai pu rassembler, & je me suis assuré que cette augmentation avoit cessé peut-être même un peu plus tôt.

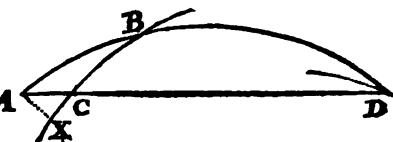
Lorsqu'en publiant la seconde édition de mon *Astronomie*, en 1771, je voulus y placer une collection de Tables nouvelles pour toutes les Planètes; je demandai à M.^{rs} Wargentin & Maraldi ce qu'ils avoient de plus nouveau sur les Satellites de Jupiter: le premier m'envoya des Tables nouvelles où il employoit des équations empiriques de douze & de quatorze ans pour représenter les mouvemens du 3.^e Satellite; je les adoptai, ne pouvant faire mieux: mais à l'égard de l'inclinaison du 3.^e Satellite, je préférerai l'hypothèse de M. Maraldi, & j'employai une Table où il suppose que l'orbite BC du 3.^e Satellite se meut sur l'orbite AB du 1.^{er}, le nœud B faisant tout le tour en cent trente-deux ans, l'angle B restant toujours de $12'$, l'in-



clinaison du premier étant de $3^d 14'$ sur l'orbite AC de Jupiter, & le nœud à $10^d 13^d 52'$. Ainsi la plus grande inclinaison du troisieme a été en A , $3^d 26'$ en 1763, & la plus petite a été en 1697 de 3^d seulement dans le nœud opposé D ; elle sera de même en 1829. Je suppose qu'on veuille chercher pour 1773 l'inclinaison & le nœud C ; d'après la période de cent trente-deux ans, on a pour le mouvement annuel du nœud B , $2^d 43' 38''$, ou $27^d 16' 22''$ depuis 1763 jusqu'en 1773.

(d) Mémoires de l'Académie, 1769.

Si l'on suppose donc que AB , sur l'orbite du 1.^{er} Satellite, soit de $27^{\text{d}} 16' 22''$, l'angle A de $3^{\text{d}} 14'$, & l'angle B de $12'$; on résoudra le triangle ABC pour trouver l'angle C , inclinaison actuelle du 3.^e Satellite sur l'orbite de Jupiter.



Pour employer les formules ordinaires de la Trigonométrie sphérique, on abaisseroit la perpendiculaire AX , & l'on diroit, $R : \cos. AB :: \tan. B : \cot. BAX$ & $\sin. BAX : \sin. CAX :: \cos. B : \cos. C$; mais les logarithmes du $\cos.$ de B & du $\sin. BAX$, dans nos Tables ordinaires, ne variant que de quatre parties pour une minute entière, on peut avoir une unité d'erreur sur leur différence : on préfère quelquefois la formule $\cos. C = \cos. B (\cos. A - \sin. A \tan. B \cos. AB)$; mais celle-ci exige que l'on cherche huit fois dans les Tables, & cela dans trois Tables différentes, tandis que la première ne demande que huit fois, & cela dans la même Table. Ainsi on peut préférer la première, quand on ne craint pas une erreur d'une seconde sur l'inclinaison : je trouve par la première formule, $3^{\text{d}} 24' 44''$; & par la seconde, $3^{\text{d}} 24' 45''$ pour l'inclinaison C du 3.^e Satellite en 1773; ce qui est exactement conforme à la Table.

On peut aussi se servir de la formule suivante, qui se déduit par les triangles supplémentaires de celle que j'ai démontrée dans mon *Astronomie*, art. 3696,

$$\cos. \frac{1}{2} C = \sin. A \sin. B \cos. \frac{1}{2} AB + \sin. \frac{1}{2} (A - B).$$

Enfin on peut commencer par chercher le côté AC , qui est la libration du nœud & dont la tangente $= \frac{\tan. AB \cos. BAX}{\cos. CAX}$;

on dira ensuite,
$$\sin. C = \frac{\sin. AB \sin. B}{\sin. AC}.$$

On trouve par ces deux méthodes, $3^{\text{d}} 24' 44''.4$ pour l'inclinaison en 1773. Si l'on a cherché l'inclinaison C par la première formule, on trouvera la libration AC du nœud, en

en disant, *cos. BAX* : *cos. CAX* :: *cot. AB* : *cot. AC*, ce qui donnera *AC* de $1^d 3' 24''$. Cela s'accorde avec la Table, puisqu'elle marque pour 1773, $10^f 12^d 20'$, & que le lieu moyen du nœud est à $10^f 13^d 52'$, lieu du nœud du 1.^{er} Satellite; la différence est en effet $1^d 3' 2'$.

Il y a grande apparence que l'action du 2.^e Satellite influe beaucoup sur l'inclinaison du 3.^e comme je l'ai dit dans mon Mémoire sur ce sujet (*e*); mais rapportant son effet à l'orbite du 1.^{er} pour l'ajouter avec l'effet que celui-ci produit, on ne s'écarte pas beaucoup des observations, & l'on simplifie beaucoup l'hypothèse & le calcul.

C'est donc cette hypothèse employée dans les Tables, que j'ai comparée avec les durées observées depuis quelques années (*f*), pour en tirer la confirmation ou la correction de ces mêmes Tables, & j'ai été surpris de leur exactitude.

| | | | | |
|-------|------------------|------------------------------------|-----------------------------|------|
| 1773. | 8 Août..... | 12 ^d 1' 17 ^f | M. Maraldi, à Perinaldo. | I. |
| | | 14. 41. 6 | | |
| | 2 Novembre. ... | 11. 49. 3 | M. Tosino, à Cadix. | II. |
| | | 14. 11. 22 | | |
| | 8 Décembre..... | 7. 52. 58 | à Cadix. | III. |
| | | 10. 9. 59 | | |
| 1774. | 18 Juillet..... | 13. 24. 30 | M. Messier. | IV. |
| | | 14. 59. 40 | | |
| | 30 Août..... | 12. 58. 8 | à Cadix. | V. |
| | | 14. 33. 54 | | |
| | 23 Décembre..... | 5. 48. 38 | M. Messier. | VI. |
| | | 7. 18. 26 | | |
| | | 6. 14. 26 | M. Lagrange, à Milan. | |
| | | 7. 47. 20 | | |
| 1775. | 9 Août..... | 14. 11. 1 | M. Messier. | VII. |
| | | 16. 9. 17 | | |

(*e*) Mémoires de l'Académie, 1765, page 607.

(*f*) Mémoires de l'Académie, 1774, page 11; Éphémérides de Vienne, 1778, page 45; Éphémérides de Milan, 1776, 1777 & 1778.
Mém. 1779. K k k

442 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

| | | | | |
|--------------------------|------------------------|------------|--------------------------------------|-------|
| 1775. 21 Septembre. | 14 ^d 18' 8" | 16. 22. 45 | M. Messier. | VIII. |
| 1776. 26 Février. | 6. 13. 10 ^d | 8. 49. 10 | M. Reggio, à Milan. | IX. |
| 24 Novembre. | 14. 10. 20 | 17. 28. 47 | à Milan, Éphémér. 1778. | X. |
| 1777. 26 Mars. | 9. 57. 35 | 13. 24. 40 | le P. Fixlmilner, à Cremsmunster. | XI. |

Voici maintenant la comparaison de ces onze observations, avec la durée de chaque Éclipse tirée des Tables dont je viens de parler : j'y ai ajouté l'erreur des Tables sur le milieu de l'Éclipse.

La onzième observation étant fort près du nœud, ne peut servir qu'à faire voir que le diamètre de l'ombre est fort bien dans les Tables, 1^h 47' 0", mais que l'erreur des Tables sur les conjonctions alloit en croissant en 1777.

| OBSERV. | DIST. au Nœud. | DEMI- DURÉE observée. | DEMI- DURÉE par les Tables. | CORRECTION des Tables pour la demi-durée. | CORRECTION pour le milieu. |
|---------|----------------------|-----------------------------|-----------------------------------|--|----------------------------------|
| I. | 47 ^d | 1 ^h 19' 55" | 1 ^h 19' 29" | + 0' 26" | + 1' 33" |
| II. | 55 | 1. 11. 9 | 1. 11. 0 | + 0. 9 | + 1. 34 |
| III. | 58 | 1. 8. 30 | 1. 7. 20 | + 1. 10 | + 0. 55 |
| IV. | 79 | 0. 47. 35 | 0. 47. 39 | — 0. 4 | — 1. 9 |
| V. | 83 | 0. 47. 53 | 0. 45. 29 | + 2. 24 | — 0. 5 |
| VI. | 87 | 0. 44. 54 | 0. 44. 19 | + 0. 35 | — 1. 8 |
| VII. | 66 | 0. 59. 8 | 0. 59. 10 | — 0. 2 | — 0. 29 |
| VIII. | 62 | 1. 2. 18 | 1. 3. 18 | — 1. 0 | — 1. 6 |
| IX. | 50 | 1. 18. 0 | 1. 18. 2 | — 0. 2 | — 1. 56 |
| X. | 27 | 1. 39. 13 | 1. 38. 18 | + 0. 55 | — 2. 35 |
| XI. | 14 | 1. 43. 32 | 1. 43. 45 | — 0. 13 | — 3. 15 |

Les troisième & huitième observations, qui sont presque

à même distance du nœud, donnent deux erreurs presque égales & en sens contraire; ce qui suppose une augmentation à faire dans le lieu du nœud d'environ 1 degré, ou une diminution de 10 à faire au nombre *A* de la Table, avant que de chercher la demi-durée. Cela s'accorde avec ce que M. Wargentín avoit mis dans ses Tables, lorsqu'il me les envoya en 1770, en m'avertissant que sa Table étoit purement empirique ou faite d'après les observations, sans avoir adopté aucune hypothèse; cependant les observations I & II, comparées avec l'observation IX, ne donnant presque aucune correction pour le nœud, il paroît qu'on peut encore s'en tenir à la Table, même pour le nœud (*g*).

Les observations IV & VI, qui sont les plus voisines du nœud, donnent des erreurs fort petites & en sens contraire; en sorte qu'il n'y a rien à changer à cet égard dans l'inclinaison que donne la Table, si ce n'est peut-être 20 secondes à ôter de l'inclinaison, ce qui mettroit à 1762, au lieu de 1763, le terme de la plus grande inclinaison.

La cinquième observation a une erreur de 2' 24"; mais M.^{rs} Tosino & Varela nous avertissent, dans le Recueil imprimé en 1776, page 113, que le temps n'étoit pas clair, *la atmosfera densa, y el planeta mal terminado*: dès-lors on a dû voir le Satellite plus long-temps éclipsé que dans les observations où il fait beau temps, & d'après lesquelles on a construit la Table.

Cette différence est sur-tout sensible pour le 3.^e Satellite, quand il entre dans l'ombre fort obliquement; on en peut juger par l'observation du 23 Décembre 1774, que j'ai rapportée ci-dessus d'après M. Messier, & d'après le P. Lagrange, alors Directeur de l'Observatoire de Milan; le milieu du passage est le même, à 3 secondes près, par les deux observations; ce qui prouve qu'elles ont été fort bien faites l'une & l'autre; mais il y a 3' 6" de moins pour la durée par

(*g*) Dans le Recueil des Tables de l'Académie de Berlin, on a mis cette Table; mais à 1765 on lit 10^e 13^d 35', au lieu de 10^e 14^d 11': c'est une faute d'impression.

444 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

M. Messier, parce qu'il est plus jeune, & que sa lunette achromatique est supérieure à un télescope de 2 pieds dont le P. Lagrange se servoit.

La septième observation ne s'accorde pas tout-à-fait avec la huitième, faite quarante-trois jours après, au bout de trois révolutions; mais il faisoit grand jour pour l'émerfion : ainsi M. Messier a dû voir le Satellite un peu plus tard, & trouver une durée trop longue, relativement à la huitième observation.

J'ai supposé dans ce Mémoire, les inclinaisons calculées dans l'hypothèse de l'ombre circulaire, quoique j'en aie fait voir le défaut (*h*); mais M. Maraldi n'ayant point encore adopté cette correction, j'ai voulu parler le même langage que lui.

Je n'ai pas cherché à mettre dans les calculs des demi-durées, une précision plus grande que celle de la Table que j'examine, où les parties proportionnelles peuvent occasionner quelques secondes d'erreur; mais il sera assez temps de faire ces calculs à la rigueur, d'après l'hypothèse que j'ai indiquée, si dans la prochaine limite on trouve le même accord entre les observations & l'hypothèse. D'ailleurs on ne pourra constater ces différences de quelques secondes que quand les observations seront perfectionnées par l'usage des diaphragmes, expliqué dans l'excellent Mémoire de M. Bailly (*i*): ce n'est que par cette méthode que l'on pourra tenir compte des diamètres des Satellites, & des inégalités dans leur lumière, dans les lunettes & dans les yeux des Observateurs. Jusqu'ici nous supposons que les observations qui ont servi à construire les Tables, & celles qui servent à les vérifier, étant faites avec des lunettes de 18 pieds ou des lunettes achromatiques de 3 pieds $\frac{1}{2}$, ne diffèrent pas sensiblement entr'elles. Si celles-ci sont un peu meilleures, comme on le croit, il en résultera des différences; mais quant à présent il ne paroît pas y avoir de changement à faire dans la Table qui suppose la plus grande

(*h*) Mémoires de l'Académie, 1763, page 413.

(*i*) Mémoires de l'Académie, 1771.

inclinaison du 3.^e Satellite 3^d 26' en 1763, la période de cent trente-deux ans, & le mouvement de l'orbite du 3.^e Satellite sur le premier, avec une inclinaison de 3^d 14' pour celui-ci sur l'orbite de Jupiter, & de 12 minutes sur l'orbite du second.

Je finirai ce Mémoire en rapportant quelques observations du 3.^e Satellite, faites par M. Méchain, comparées avec les Tables pour faire voir le progrès des erreurs. Le signe — indique ce qu'il faut ôter du calcul pour l'accorder avec l'observation.

| | | | | | | | | | |
|-------|----|----------|----------------|-----|-----------|----|---|----|--|
| 1778. | 10 | Avril.. | 7 ^d | 38' | 12" soir. | É. | — | 4' | 52". |
| | 17 | Avril.. | 11. | 40. | 10 soir. | É. | — | 4. | 28. |
| | 30 | Mai... | 8. | 9. | 32 soir. | I. | — | 4. | 31; un peu <i>dout</i> , à cause du grand jour |
| | 30 | Mai... | 11. | 36. | 42 soir. | É. | — | 2. | 20; il paroît foiblement. |
| | 26 | Nov... | 2. | 55. | 50 mat. | É. | — | 0. | 33. |
| 1779. | 8 | Janv... | 2. | 18. | 48 mat. | É. | — | 0. | 26. |
| | 19 | Février. | 10. | 57. | 9 soir. | I. | — | 1. | 51. |
| | 27 | Mars... | 9. | 50. | 26 soir. | É. | — | 2. | 5, |
| | 21 | Juin... | 9. | 31. | 25 soir. | É. | — | 3. | 32. |
| 1780. | 17 | Avril.. | 7. | 42. | 47 soir. | É. | — | 0. | 7; il y avoit des fumées. |
| 1781. | 26 | Février. | 2. | 2. | 57 mat. | É. | — | 0. | 58. |
| | 6 | Mars... | 4. | 27. | 37 mat. | I. | — | 1. | 4. |
| | 11 | Avril.. | 0. | 25. | 41 mat. | I. | — | 1. | 16. |
| | 16 | Mai.. | 10. | 2. | 35 soir. | É. | — | 0. | 15; il paroissoit déjà. |
| | 28 | Juin.. | 9. | 51. | 1 soir. | É. | — | 2. | 5. |

On peut juger par - là que les équations empiriques, employées par M. Wargentin dans les Tables, avec des périodes de douze ans & demi & de quatorze ans, ne satisfont pas parfaitement aux observations; il pense en effet qu'il vaudroit autant n'employer qu'une seule équation, que l'on changeroit de valeur en différens temps. Voyez le *Tome IV* de mon *Astronomie*, page 690; *Éphémérides de Berlin*, 1781. Mais cette forme, encore plus empirique ou plus aveugle, seroit peu propre à satisfaire les Astronomes: il faudroit donc employer la théorie ou les observations pour démêler mieux

l'influence des trois autres Satellites sur le troisième dont nous venons de parler. C'est pour cela que j'avois engagé l'Académie de Harlem à proposer ce sujet de Prix; mais il n'en a point encore résulté de théorie satisfaisante.

Ces équations, dont les périodes sembloient être de douze & de quatorze ans, pourroient venir l'une de l'excentricité, l'autre du mouvement de l'apside du 3.^e Satellite: en effet, quand on établit une première équation provenant de l'excentricité, & dont la période est à peu-près égale à celle de Jupiter même, on suppose cette période toujours uniforme, & les retours de la plus grande équation toujours les mêmes; mais si l'apside change, le retour de la plus grande équation ne tombe plus au même point du ciel; & quand on l'y suppose fixe, on trouve une différence: cette différence ne croît pas uniformément, parce que l'équation n'est pas proportionnelle à la distance comptée d'un certain point; on peut alors la représenter par une nouvelle équation dont la période soit égale à la révolution de l'apside, ou peut-être à un multiple ou un sous-multiple de cette révolution. C'est ce que je me propose de discuter quand j'aurai rassemblé un assez grand nombre de bonnes observations; en supposant que M.^{rs} Wargentin, Maraldi, de Lagrange & Bailly, à qui nous devons beaucoup de lumières sur cette théorie, ne s'en seront pas occupés avant moi, & avec plus de succès que je ne pourrois en espérer dans mes propres recherches.



M É M O I R E
SUR LA THÉORIE DE VÉNUS,
OU SUR LES ÉLÉMENTS
DE L'ORBITE DE CETTE PLANÈTE,
Déterminés au moyen de nouvelles Observations.

Par M. DE LA LANDE.

DEPUIS que j'ai publié de nouvelles Tables de Vénus, en 1770, dans la seconde édition de mon *Astronomie*, j'ai fait beaucoup d'observations propres à les corriger, & on les trouvera dans le IV.^e Volume de mon *Astronomie*, imprimé en 1781. Mais les conjonctions inférieures de Vénus, étant les circonstances les plus favorables à ces sortes de recherches, j'ai commencé par examiner le résultat de celles qui se sont présentées depuis quelques années, sur-tout après avoir vu avec étonnement une erreur de 6 minutes dans les conjonctions des 24 Octobre 1775 & 6 Janvier 1779, observées à Paris & à Toulouse avec soin. M. Slop, habile Astronome de Pise, dans son troisième Recueil d'observations, publié en 1778, rapporte trois conjonctions inférieures, observées avec précision, déduites chacune de plusieurs jours d'observations, calculées & réduites au Soleil; & celle que j'avois observée en 1776 en étoit une: j'ai voulu savoir d'abord ce qui en résultoit pour la correction de mes Tables, j'y ai employé la méthode extrêmement simple, que j'ai publiée dans les Mémoires de l'Académie, pour 1776, à l'occasion de Mars; & j'ai reconnu que cette erreur extraordinaire provenoit de 2' seulement sur la longitude vue du Soleil, dont une minute étoit l'erreur de l'équation, & une minute l'erreur de la longitude moyenne; elles conspiroient toutes les deux en 1776, & se multiplioient par la proximité de Vénus à la Terre.

La
en Novemb.
1779.
Remis
en 1782.

448 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

| Temps moyen de la Conjonction à Paris. | Longit. hélioc. obs. réduite à l'orb. | Erreur de mes Tables. | Anomales par mes Tables. | Longitudes moyennes. |
|---|--|--------------------------|--|---|
| 1774. 22 Mars 21 ^h 17' 28" | 6 ^e 2 ^d 47' 19" | + 1. 1 | 7 ^e 22 ^d 53' 52" | 6 ^e 2 ^d 7' 25" |
| 1775. 24 Oct. 2. 34. 1 | 0. 0. 58. 6 | + 2. 6 | 2. 22. 26. 29 | 1. 1. 44. 1. |
| 1777. 1 Juin 2. 32. 53 | 8. 11. 16. 52 | — 0. 34 | 10. 1. 14. 40 | 8. 10. 36. 11 ¹ / ₂ . |

Première Hypothèse. L'équation de Vénus étant supposée de 48' 30". Avec le lieu de l'aphélie, tel qu'il est dans mes Tables, c'est-à-dire avec les anomalies moyennes qui sont rapportées ci-dessus, je cherche dans ces mêmes Tables, où la plus grande équation est de 48' 30", l'équation pour chacune des deux premières observations, & je trouve la différence entre le mouvement moyen & le mouvement vrai ou la somme des équations 1^d 26' 54", trop forte de 1' 5", c'est-à-dire le mouvement vrai trop foible de 1' 5". J'augmente le lieu de l'aphélie ou je diminue les anomalies jusqu'à ce que la somme des équations soit diminuée de 1' 5", & je trouve qu'il faut pour cela augmenter la longitude de l'aphélie de 1^d 40'; alors j'ai une première hypothèse qui satisfait à l'intervalle des deux premières observations, soit en temps, soit en degrés, c'est-à-dire à la différence des longitudes moyennes & à celle des longitudes vraies.

Seconde Hypothèse. L'équation de Vénus étant supposée de 48' 0", comme dans les Tables de Halley. Avec l'aphélie de mes Tables, je trouve la somme des équations trop forte de 11"; j'augmente le lieu de l'aphélie de quelques minutes, & je vois qu'en l'augmentant de 17', on a la somme des équations telle qu'elle est par l'observation, 1^d 25' 49": ainsi dans cette seconde hypothèse, il y a 1^d 23' de moins que dans la première pour le lieu de l'aphélie, & 30" de moins pour la plus grande équation du centre.

Dans chacune de ces deux hypothèses, je calcule la seconde & la troisième observation, où la somme des équations doit être 86' 36": je la trouve dans la première hypothèse 89' 48", & dans la seconde 88' 27", moindre de 1' 21" que dans la première hypothèse, mais trop grande encore de 1' 51".

En

En conséquence je fais ces deux propositions,

$$\begin{aligned} 1' 21'' : 0' 30'' :: 1' 51'' : 0' 41'', \\ 1. 21 : 1^d 23' :: 1. 51 : 1^d 54'. \end{aligned}$$

Ainsi il faut diminuer encore de $41''$ l'équation de M. Halley ou de la seconde hypothèse, & diminuer l'aphélie de $1^d 54'$, ou ôter $1^d 37'$ de celui de mes Tables, pour accorder le second intervalle aussi-bien que le premier.

Je calcule donc les trois observations dans cette nouvelle hypothèse, en employant les deux Tables d'équations; & faisant une partie proportionnelle pour les $41''$, dont la plus grande équation de Halley doit être diminuée, & je trouve trois longitudes vraies qui sont plus petites d'environ $1' 8''$ que les longitudes observées; ce qui m'apprend qu'il faut ajouter $1' 8''$ à mes époques ou à la longitude moyenne de Vénus tirée de mes Tables.

On verra dans la Table suivante la comparaison de ces nouveaux résultats avec mes Tables & celles de Halley & de Cassini.

| | <i>Suivant Halley.</i> | <i>Suivant Cassini.</i> | <i>Par mes Tables.</i> | <i>Nouveau Résultat.</i> |
|---------------------------|--|---|---|---|
| Époque pour 1780.... | 10 ^f 22 ^d 53' 0" | 10 ^f 22 ^d 52' 44" | 10 ^f 22 ^d 52' 47" | 10 ^f 22 ^d 53' 55 ^a . |
| Aphélie pour 1780.... | 10. 7. 46. 46 | 10. 8. 21. 0 | 10. 9. 28. 0 | 10. 7. 51. 0. |
| Équation de l'orbite. . . | 48. 0 | 49. 6 | 48. 30 | 47. 19. |

Je m'en étois tenu, dans mon *Astronomie* (article 1270), à faire l'équation de $48' 30''$, n'ayant pas alors d'observations récentes qui fussent bien propres à cette recherche; celles que je viens de rapporter indiquoient qu'il falloit la diminuer au moins d'une minute. Supposant l'équation de $47' 20''$, on a excentricité 0,0068845, ou 4980 en supposant la distance du Soleil de 1000000.

Voilà pourquoi dans la conjonction du 24 Octobre 1775, observée à Paris, à Toulouse, à Pise, je trouve l'erreur de mes Tables d'environ $6'$ en moins : cela me parut extraordinaire, parce que sur plusieurs années d'observations, je n'avois jamais vu 2 minutes d'erreur; mais ces 6 minutes étoient une suite de l'erreur sur la longitude héliocentrique.

Mém. 1779.

LII

+ 2' 6" que l'on a vu ci-dessus, dont une minute pour l'époque & une pour l'équation. Depuis ce temps-là, M. Dagelet a observé la conjonction du mois de Janvier 1779, & il a aussi trouvé l'erreur des Tables — 6' vers cinq signes d'anomalie; ce qui dépend de la même cause, du moins en partie.

Cette augmentation d'une minute sur l'époque des longitudes, est confirmée par la conjonction supérieure de Vénus, observée à la fin de Juillet 1776 vers le périhélie, où il y avoit une demi-minute de plus que par mes Tables; ce qui fait une minute à ajouter au lieu vu du Soleil.

Quant à la diminution d'une minute que je viens de trouver sur l'équation de Vénus, elle m'est aussi indiquée par les plus grandes digressions de Vénus que j'ai observées au mois de Décembre 1775 & au mois de Mars 1777, dans lesquelles j'ai trouvé qu'il falloit éloigner Vénus du Soleil d'environ trois quarts de minute aux environs du périhélie; ce qui doit diminuer l'excentricité, en supposant que la distance moyenne soit exacte. Il faudroit une digression observée vers l'aphélie, comme celle qui est arrivée au mois de Juin 1774, pour établir la conséquence que je tire de la digression périhélie; mais il n'y a qu'une seule observation de M. Slop, & elle est à 25 degrés de l'aphélie: on n'en aura qu'au mois de Juin 1782. Au reste, les digressions périhélies s'accordent avec les résultats précédens. A l'égard de l'aphélie, le résultat ci-dessus ne sauroit avoir le même degré de certitude, parce que des trois conjonctions que je viens de calculer, il n'y en a aucune qui soit assez près des apfides; mais on verra bien-tôt que la diminution de l'aphélie est confirmée par d'autres observations.

Mais après avoir déterminé la plus grande équation de Vénus de 47' 19" par des conjonctions inférieures, qui sont les observations les plus décisives pour la théorie de cette Planète, j'ai voulu voir si les observations plus anciennes me donneroient à peu-près le même résultat: j'en ai trouvé plusieurs dans les *Elémens d'Astronomie* de M. Cassini

(page 561); j'en ai choisi trois, dont une vers le périhélie & deux vers les moyennes distances; j'ai calculé le lieu du Soleil par les Tables de la Caille, & j'ai réduit les observations en temps moyen.

| <i>Temps moyen de la Conjonction.</i> | <i>Longitude héiocentrique.</i> | <i>Anomalie moyenne.</i> | <i>Long. de l'Aphélie.</i> | <i>Longitude calculée.</i> |
|---|---------------------------------------|--|--|----------------------------|
| 1715. 26 Janv. 8 ^h 32' | 4 ^f 6 ^d 22' 47" | 5 ^f 29 ^d 39' 40" | 10 ^f 6 ^d 45' 41" | 4 ^f 6' 22' 10" |
| 1718. 8 Avr.. 10. 15 | 6. 18. 40. 42 | 8. 10. 58. 30 | 10. 6. 53. 40 | 6. 18. 40. 57 |
| 1719. 10 Nov.. 9. 1 | 11. 17. 55. 31 | 3. 11. 41. 11 | 10. 6. 57. 39 | 11. 17. 53. 39 |

Suivant la méthode que j'ai expliquée ci-dessus, je trouve qu'avec l'équation de mes Tables 48' 30", il faut diminuer l'aphélie de 1^d 28' pour que la différence des longitudes vraies, calculées pour la première & la seconde observation, soit égale au mouvement observé.

Avec l'équation de M. Halley 48' 0", il faut diminuer de 40' la longitude de l'aphélie pour représenter le premier intervalle.

Je calcule dans ces deux hypothèses le mouvement de Vénus entre la seconde & la troisième observation, je trouve dans l'une que le mouvement est plus petit de 5" que par mes Tables, & dans l'autre plus grand de 54"; d'où je conclus par une double proportion, que pour l'augmenter de 2' 7" & le rendre égal au mouvement observé, il faut augmenter l'aphélie de 1 5', & supposer l'équation de 47' 27". J'avois trouvé 47' 19" par les observations de 1774, 1775 & 1777; cet accord est plus grand que je ne l'avois espéré.

Calculant les trois longitudes par ces élémens, je les trouve trop petites de 51"; c'est ce qu'il faut ajouter aux époques de mes Tables; & comme j'avois trouvé 1' 18" vers 1775, il s'ensuit que le mouvement de Vénus a été plus grand de 17" en cinquante-sept ans, ou de 30" par siècle que suivant mes Tables.

Les conjonctions inférieures de 1689 & 1692, m'ont donné pour équation 46' 58". M. Kraft, qui cherchoit les élémens de Vénus par les conjonctions de 1715, 1716 &

452 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

1718, trouvoit l'aphélie à $10^{\circ} 6' 44''$, comme par mes Tables, & l'équation de $49' 6''$ (*Mémoires de Pétersbourg, tome XVI, page 666*); mais j'ai suffisamment prouvé qu'elle doit être plus petite.

L'équation de Vénus étant assez bien déterminée par ces trois calculs de huit conjonctions inférieures à des époques très-différentes, voyons s'il est possible de déterminer aussi bien le lieu de l'aphélie, du moins pour le temps où nous sommes.

Je me suis d'abord servi des plus grandes digressions observées par M. Dagelet & moi, en 1775, 1777 & 1778. Voici une observation de chacune, avec l'erreur des Tables déduite des observations de plusieurs jours, aux environs de la plus grande digression. On trouvera les autres dans le IV.^e volume de mon *Astronomie*.

| | Temps moyen. | Longitude observée. | Err. des Tables. |
|--------------------|-----------------------|--|------------------|
| 1775. 20 Juillet.. | 3 ^h 0' 42" | 5 ^h 11 ^d 38' 59" | + 10". |
| 1777. 6 Août.. | 20. 47. 22 | 2. 29. 23. 44 | + 30. |
| 1778. 7 Nov... | 3. 0. 48 | 9. 1. 51. 0 | - 70. |

J'ai trouvé que pour faire disparaître ces erreurs, il falloit ôter de l'aphélie $1^{\circ} 20'$ pour la première, $1^{\circ} 2'$ pour la seconde, & $2^{\circ} 17'$ pour la troisième. J'avois trouvé $1^{\circ} 37'$ pour les trois conjonctions calculées ci-dessus : il paroît donc par-là qu'il faudroit ôter $1^{\circ} 20'$ de l'aphélie de Vénus, établi dans mes Tables; mais les conjonctions inférieures valent mieux pour déterminer un élément aussi délicat : un degré d'erreur sur l'aphélie ne produit que $20''$ plus ou moins sur la plus grande élongation, au lieu qu'il fait $2' \frac{1}{2}$ sur la longitude géocentrique observée dans la conjonction inférieure près du périhélie.

Dans l'espace de huit ans que Vénus met à revenir dans la même situation, il arrive toujours cinq conjonctions inférieures, comme on le voit dans la Table suivante; la première vers l'aphélie, les trois suivantes vers les moyennes distances, & la dernière vers le périhélie.

| | CONJONCTIONS. | ANOMALIE. | LATITUDE. |
|---|-----------------|-------------------------------|------------------------------|
| 1 | 10 Août. . 1772 | 0 ^r 8 ^d | 8 ^d <i>Austr.</i> |
| 2 | 22 Mars... 1774 | 7. 22 | 8 <i>Bor.</i> |
| 3 | 24 Octob.. 1775 | 2. 23 | 5 <i>Austr.</i> |
| 4 | 1 Juin... 1777 | 10. 1 | 0 |
| 5 | 6 Janvier. 1779 | 5. 7 | 6 <i>Bor.</i> |
| | 9 Août. . 1780 | | |

De ces cinq conjonctions, il y en a quatre où la latitude est assez grande pour qu'on puisse voir Vénus le jour même de la conjonction avec de bons instrumens : dans les autres, on la peut voir deux jours avant & après.

Aussi M. Dagelet, qui sait distinguer les observations importantes, & qui a l'avantage d'un excellent mural pour les bien faire, a très-bien observé les deux conjonctions de 1779 & 1780, qui n'auront plus lieu d'ici à huit ans; je les ai trouvées aussi dans le Recueil que M. Darquier a présenté à l'Académie en 1781. L'erreur de mes Tables étoit + 6' dans la première, & — 1' dans celle de 1780, parce que cette fois l'erreur de l'époque détruisoit en partie celle qui venoit de l'aphélie. Voici deux des observations de M. Dagelet, choisies parmi un grand nombre, aux environs de chaque conjonction, mais qui ne sont pas la conjonction même.

| | Temps moyen à Paris. | Longitude de Vénus. | Latit. géocentrique. |
|-----------------|-------------------------|---------------------------------------|--------------------------|
| 1779. 10 Janv.. | 23 ^h 35' 33" | 9 ^r 14 ^d 5' 57" | 5 ^d 44' 8" B. |
| 1780. 7 Août... | 0. 13. 45 | 4. 19. 56. 42 | 7. 19. 36 A. |

J'ai calculé les longitudes géocentriques par mes Tables corrigées par les autres élémens que j'avois déterminés, j'ai trouvé qu'il falloit ôter 1^d 0' de l'aphélie pour la première observation, & 57' seulement pour la seconde. La différence ne suppose que 2" de mouvement vu du Soleil, & chaque minute de l'aphélie change de 2" la longitude géocentrique;

454 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

ainsi le lieu de l'aphélie en 1780, sera $10^{\circ} 8' 30''$. M. Halley a $43'$ de moins, & M. Cassini $9'$ de moins ou $10^{\circ} 8' 21''$.

A l'égard du mouvement de l'aphélie, je le réduirai à $2^d 15'$ par siècle ou $1' 27''$ par an, en considérant que les Tables de Cassini & de Halley, faites sur des observations de la fin du dernier siècle, s'accordoient pour 1700, à $6'$ près, sur le lieu de l'aphélie, & que les observations que j'ai calculées moi-même ci-dessus ne s'écartent pas de ce résultat.

J'ajouterai que les conjonctions des 28 Janvier 1707 & 31 Août 1708, en rectifiant le lieu du Soleil, donnent pour 1708, $10^{\circ} 6' 33''$; cela ne diffère que de $13'$ du lieu que donnent les élémens que je viens de citer, & les $13'$ ne font que $8''$ sur le mouvement vu du Soleil, quantité insensible dans ces observations.

| | | Longitude héliocentrique. | Mouvement. |
|------------------|------------|---------------------------|----------------------------|
| 1707. 28 Janv... | $18^h 34'$ | $4^{\circ} 8' 46' 17''$ | $6^{\circ} 29' 14' 45''$. |
| 1708. 31 Août., | 0. 30 | 11. 8. 1. 2 | |

Ces deux observations s'accordent avec mes Tables, en corrigeant seulement l'équation & en ajoutant $5'$ à l'aphélie, ce qui augmente de $7''$ le mouvement calculé; ainsi on ne peut pas s'écarter beaucoup en ajoutant $13'$ au lieu de l'aphélie & le supposant en 1708, $10^{\circ} 6' 33''$.

Mais les trois autres conjonctions calculées (page 451), donnoient une augmentation de $51''$ à faire aux époques, & une augmentation de $30''$ sur le mouvement séculaire, tandis que celles-ci donnent $1' 37''$ ou une diminution de $43''$, & celles de 1689 & 1692 une diminution de $50''$. Pour satisfaire le mieux qu'il est possible à toutes les sept, en préférant celle de 1689, & sur-tout celle de 1692 qui fut observée avec soin (*Mém. de 1692*), je me contente d'ôter $42''$ du mouvement séculaire de mes Tables, & je me retrouve entre Cassini & Halley. Voici ce mouvement suivant différens Auteurs & suivant moi; les différences sont peu sensibles, vu le peu d'ancienneté des bonnes observations,

| MOUVEMENT SÉCULAIRE. | |
|--|---------------------|
| 6 ^s 19 ^d 11' 52" | Halley. |
| 6. 19. 11. 2 | Cassini. |
| 6. 19. 12. 22 | Hornsbj. |
| 6. 19. 12. 12 | mes Tables de 1770. |
| 6. 19. 11. 30 | nouveau résultat. |

Il n'y a que les conjonctions inférieures qui puissent nous donner avec exactitude les vrais mouvemens de Vénus; il n'y en a qu'une dans le dernier siècle qui soit près du périhélie, & elle ne s'accorde point avec les autres; ainsi je ne puis faire mieux, quant à présent, pour la détermination du mouvement des apsidés de Vénus.

Avec ces élémens, on ne trouve que quelques secondes d'erreur dans la plupart des observations faites depuis quelques années, ce qui doit venir sur-tout des perturbations (*Mém. 1760, p. 329*) que j'ai négligées, ainsi que l'aberration qui n'est que de 3" dans les conjonctions inférieures. On ne pourra parvenir à un plus grand degré de précision que quand on aura un plus grand nombre de conjonctions inférieures avec plusieurs observations dans chacune. On trouvera ci-après la Table des équations de Vénus & de ses distances au Soleil, d'après l'excentricité déterminée dans ce Mémoire.

Au reste, les élémens que je viens d'établir, suffisent pour que l'erreur des Tables de Vénus n'aille jamais à une minute, & qu'on puisse s'en servir pour trouver, en cas de besoin, les longitudes en mer, en comparant la Lune avec Vénus. C'est une des raisons qui m'ont fait donner à la théorie de cette Planète une attention spéciale.

Le résultat des recherches contenues dans ce Mémoire est renfermé dans les deux Tables suivantes; on y trouvera les époques des moyens mouvemens, soit de Vénus, soit de son aphélie, pour les dix-huit années qui vont suivre; ensuite la nouvelle Table des équations & des distances au Soleil.

456 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Les autres Tables de Vénus, savoir les époques du nœud, la Table des Latitudes & celle des moyens mouvemens pour les jours du mois, n'exigeant aucun changement, j'ai cru que je pouvois renvoyer à celles qui sont dans la seconde édition de mon *Astronomie*, publiée en 1771 en trois Volumes in-4.^o & dont le quatrième a paru en 1781.

C'est ici la première fois qu'on a donné une théorie de Vénus, établie sur des observations détaillées; & dans la suite les Astronomes qui voudront perfectionner les Tables de cette Planète, trouveront dans ce Mémoire des points de comparaison que Képler, Cassini & Halley ne nous avoient point laissés quand ils ont publié leurs Tables astronomiques.

Époques de VÉNUS pour le reste du siècle.

| ANNÉES | VÉNUS. | APHÉLIE. |
|--------|---------------------------------------|--|
| 1783 | 9 ^r 7 ^d 16' 21" | 10 ^r 8 ^d 34' 21" |
| 1784 | 4. 23. 39. 59 | 10 ^r 8. 35. 48 |
| 1785 | 0. 8. 27. 28 | 10. 8. 37. 15 |
| 1786 | 7. 23. 14. 57 | 10. 8. 38. 42 |
| 1787 | 3. 8. 2. 25 | 10. 8. 40. 9 |
| 1788 | 10. 24. 26. 2 | 10. 8. 41. 36 |
| 1789 | 6. 9. 13. 31 | 10. 8. 43. 3 |
| 1790 | 1. 24. 1. 0 | 10. 8. 44. 30 |
| 1791 | 9. 8. 48. 29 | 10. 8. 45. 57 |
| 1792 | 4. 25. 12. 6 | 10. 8. 47. 24 |
| 1793 | 0. 9. 59. 35 | 10. 8. 48. 51 |
| 1794 | 7. 24. 47. 4 | 10. 8. 50. 18 |
| 1795 | 3. 9. 34. 33 | 10. 8. 51. 45 |
| 1796 | 10. 25. 58. 9 | 10. 8. 53. 12 |
| 1797 | 6. 10. 45. 38 | 10. 8. 54. 39 |
| 1798 | 1. 25. 33. 7 | 10. 8. 56. 6 |
| 1799 | 9. 10. 20. 36 | 10. 8. 57. 33 |
| 1800 | 4. 25. 8. 5 | 10. 8. 59. 0 |

ÉQUATION

ÉQUATION de l'orbite de VÉNUS.

| ANOMALIE MOYENNE DE VÉNUS. | | | | | | | | | | | | | |
|----------------------------|------------------|-------|------------------|-------|-------------------|-------|---------------------|-------|--------------------|-------|-------------------|-------|-------|
| Oriz | 0 ^r — | | 1 ^r — | | II ^r — | | III ^r — | | IV ^r — | | V ^r — | | Oriz |
| Degrés. | M. s. | Diff. | M. s. | Diff. | M. s. | Diff. | M. s. | Diff. | M. s. | Diff. | M. s. | Diff. | |
| 0 | 0. 0 | 49" | 23. 29 | 43" | 40. 49 | 24" | 47. 19 | 1" | 41. 10 | 25" | 23. 51 | 44" | 30 |
| 1 | 0. 49 | 49 | 24. 12 | 42 | 41. 13 | 24 | 47. 20 | 1 | 40. 45 | 26 | 23. 7 | 44 | 29 |
| 2 | 1. 38 | 49 | 24. 54 | 41 | 41. 37 | 23 | 47. 19 | 2 | 40. 19 | 26 | 22. 33 | 44 | 28 |
| 3 | 2. 27 | 49 | 25. 35 | 41 | 42. 0 | 23 | 47. 17 | 3 | 39. 53 | 27 | 21. 39 | 44 | 27 |
| 4 | 3. 16 | 49 | 26. 16 | 41 | 42. 23 | 21 | 47. 14 | 3 | 39. 26 | 28 | 20. 55 | 45 | 26 |
| 5 | 4. 5 | 49 | 26. 57 | 40 | 42. 44 | 11 | 47. 11 | 4 | 38. 58 | 29 | 20. 10 | 45 | 25 |
| 6 | 4. 54 | 49 | 27. 37 | 40 | 43. 5 | 20 | 47. 7 | 5 | 38. 29 | 29 | 19. 24 | 46 | 24 |
| 7 | 5. 43 | 49 | 28. 17 | 39 | 43. 25 | 20 | 47. 2 | 6 | 38. 0 | 29 | 18. 38 | 46 | 23 |
| 8 | 6. 32 | 48 | 28. 56 | 39 | 43. 45 | 18 | 46. 56 | 7 | 37. 30 | 31 | 17. 52 | 46 | 22 |
| 9 | 7. 20 | 49 | 29. 35 | 38 | 44. 3 | 18 | 46. 49 | 8 | 36. 59 | 32 | 17. 6 | 47 | 21 |
| 10 | 8. 9 | 49 | 30. 13 | 38 | 44. 21 | 17 | 46. 41 | 9 | 36. 27 | 32 | 16. 19 | 47 | 20 |
| 11 | 8. 58 | 48 | 30. 51 | 37 | 44. 38 | 16 | 46. 32 | 10 | 35. 55 | 32 | 15. 32 | 47 | 19 |
| 12 | 9. 46 | 47 | 31. 28 | 37 | 44. 54 | 15 | 46. 22 | 10 | 35. 23 | 32 | 14. 45 | 48 | 18 |
| 13 | 10. 33 | 48 | 32. 5 | 36 | 45. 9 | 14 | 46. 12 | 11 | 34. 49 | 34 | 13. 57 | 48 | 17 |
| 14 | 11. 21 | 48 | 32. 41 | 35 | 45. 23 | 14 | 46. 1 | 12 | 34. 15 | 34 | 13. 9 | 48 | 16 |
| 15 | 12. 9 | 47 | 33. 16 | 35 | 45. 37 | 13 | 45. 49 | 12 | 33. 40 | 35 | 12. 21 | 48 | 15 |
| 16 | 12. 56 | 48 | 33. 51 | 34 | 45. 50 | 12 | 45. 37 | 14 | 33. 5 | 36 | 11. 33 | 49 | 14 |
| 17 | 13. 44 | 47 | 34. 25 | 33 | 46. 2 | 11 | 45. 23 | 15 | 32. 29 | 37 | 10. 44 | 49 | 13 |
| 18 | 14. 31 | 46 | 34. 58 | 34 | 46. 13 | 10 | 45. 8 | 16 | 31. 52 | 37 | 9. 55 | 49 | 12 |
| 19 | 15. 17 | 46 | 35. 32 | 32 | 46. 23 | 9 | 44. 53 | 17 | 31. 15 | 38 | 9. 6 | 49 | 11 |
| 20 | 16. 3 | 46 | 36. 4 | 31 | 46. 32 | 9 | 44. 36 | 17 | 30. 37 | 38 | 8. 17 | 49 | 10 |
| 21 | 16. 49 | 46 | 36. 35 | 31 | 46. 41 | 8 | 44. 19 | 17 | 29. 59 | 39 | 7. 28 | 49 | 9 |
| 22 | 17. 35 | 46 | 37. 6 | 30 | 46. 49 | 7 | 44. 2 | 19 | 29. 20 | 39 | 6. 39 | 49 | 8 |
| 23 | 18. 21 | 45 | 37. 36 | 30 | 46. 56 | 6 | 43. 43 | 20 | 28. 41 | 40 | 5. 49 | 50 | 7 |
| 24 | 19. 6 | 45 | 38. 6 | 29 | 47. 2 | 5 | 43. 23 | 20 | 28. 1 | 40 | 4. 59 | 49 | 6 |
| 25 | 19. 51 | 44 | 38. 35 | 28 | 47. 7 | 4 | 43. 3 | 21 | 27. 21 | 41 | 4. 10 | 50 | 5 |
| 26 | 20. 35 | 44 | 39. 3 | 28 | 47. 11 | 3 | 42. 42 | 22 | 26. 40 | 41 | 3. 20 | 50 | 4 |
| 27 | 21. 19 | 44 | 39. 31 | 26 | 47. 14 | 3 | 42. 20 | 22 | 25. 59 | 42 | 2. 30 | 50 | 3 |
| 28 | 22. 3 | 43 | 39. 57 | 26 | 47. 17 | 2 | 41. 58 | 24 | 25. 17 | 43 | 1. 40 | 50 | 2 |
| 29 | 22. 46 | 43 | 40. 23 | 26 | 47. 19 | 2 | 41. 34 | 24 | 24. 34 | 43 | 0. 50 | 50 | 1 |
| 30 | 23. 29 | 43 | 40. 49 | | 47. 19 | | 41. 10 | | 23. 51 | 43 | 0. 0 | 50 | 0 |
| Ajouter | X II + | | X ^r + | | IX ^r + | | VIII ^r + | | VII ^r + | | VI ^r + | | Degr. |

Mém. 1779.

Mmm

458 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
LOGARITHMES des distances de VÉNUS au SOLEIL.

| Degrés d'anom. | ANOMALIE MOYENNE DE VÉNUS. | | | | | | | | | | | |
|----------------|----------------------------|-------|-----------|-------|-----------|-------|-----------|-------|-----------|-------|-----------|-------|
| | 0' | | 1' | | 11' | | 111' | | 1111' | | 11111' | |
| | Logarith. | Diff. | Logarith. | Diff. | Logarith. | Diff. | Logarith. | Diff. | Logarith. | Diff. | Logarith. | Diff. |
| 0 | 4.862318 | | 4.861924 | 20 | 4.860845 | 44 | 4.859359 | 53 | 4.857856 | 45 | 4.856746 | 20 |
| 1 | 4.862317 | 1 | 4.861898 | 20 | 4.860801 | 46 | 4.859306 | 52 | 4.857811 | 45 | 4.856720 | 21 |
| 2 | 4.862315 | 2 | 4.861872 | 28 | 4.860755 | 46 | 4.859254 | 52 | 4.857766 | 45 | 4.856695 | 21 |
| 3 | 4.862313 | 3 | 4.861844 | 28 | 4.860709 | 46 | 4.859202 | 52 | 4.857721 | 44 | 4.856670 | 21 |
| 4 | 4.862310 | 4 | 4.861816 | 30 | 4.860663 | 47 | 4.859150 | 52 | 4.857677 | 43 | 4.856647 | 21 |
| 5 | 4.862306 | 5 | 4.861786 | 29 | 4.860616 | 47 | 4.859098 | 52 | 4.857634 | 43 | 4.856624 | 22 |
| 6 | 4.862301 | 6 | 4.861757 | 31 | 4.860569 | 47 | 4.859046 | 52 | 4.857591 | 43 | 4.856602 | 22 |
| 7 | 4.862295 | 6 | 4.861726 | 31 | 4.860522 | 48 | 4.858994 | 52 | 4.857548 | 42 | 4.856580 | 23 |
| 8 | 4.862289 | 8 | 4.861695 | 32 | 4.860474 | 48 | 4.858942 | 52 | 4.857506 | 42 | 4.856560 | 23 |
| 9 | 4.862281 | 8 | 4.861663 | 33 | 4.860426 | 49 | 4.858890 | 51 | 4.857465 | 41 | 4.856541 | 23 |
| 10 | 4.862273 | 9 | 4.861630 | 33 | 4.860377 | 49 | 4.858839 | 52 | 4.857424 | 40 | 4.856522 | 23 |
| 11 | 4.862264 | 11 | 4.861597 | 34 | 4.860328 | 49 | 4.858787 | 51 | 4.857384 | 40 | 4.856504 | 23 |
| 12 | 4.862253 | 11 | 4.861563 | 35 | 4.860279 | 49 | 4.858736 | 52 | 4.857344 | 39 | 4.856487 | 24 |
| 13 | 4.862242 | 12 | 4.861528 | 35 | 4.860230 | 50 | 4.858684 | 50 | 4.857305 | 38 | 4.856471 | 24 |
| 14 | 4.862230 | 13 | 4.861493 | 36 | 4.860180 | 50 | 4.858634 | 50 | 4.857267 | 38 | 4.856456 | 24 |
| 15 | 4.862217 | 13 | 4.861457 | 37 | 4.860130 | 50 | 4.858583 | 51 | 4.857229 | 37 | 4.856442 | 25 |
| 16 | 4.862204 | 13 | 4.861420 | 37 | 4.860080 | 51 | 4.858532 | 50 | 4.857192 | 36 | 4.856429 | 25 |
| 17 | 4.862189 | 15 | 4.861383 | 38 | 4.860029 | 50 | 4.858482 | 50 | 4.857156 | 36 | 4.856416 | 25 |
| 18 | 4.862174 | 17 | 4.861445 | 39 | 4.859979 | 51 | 4.858432 | 50 | 4.857120 | 35 | 4.856405 | 26 |
| 19 | 4.862157 | 17 | 4.861306 | 39 | 4.859928 | 51 | 4.858382 | 49 | 4.857085 | 35 | 4.856394 | 26 |
| 20 | 4.862140 | 18 | 4.861267 | 39 | 4.859877 | 52 | 4.858333 | 50 | 4.857050 | 35 | 4.856384 | 26 |
| 21 | 4.862122 | 18 | 4.861228 | 41 | 4.859825 | 51 | 4.858283 | 49 | 4.857017 | 33 | 4.856376 | 27 |
| 22 | 4.862104 | 20 | 4.861187 | 42 | 4.859774 | 52 | 4.858234 | 48 | 4.856984 | 33 | 4.856368 | 27 |
| 23 | 4.862084 | 20 | 4.861146 | 42 | 4.859722 | 52 | 4.858186 | 48 | 4.856951 | 32 | 4.856361 | 27 |
| 24 | 4.862064 | 23 | 4.861105 | 42 | 4.859671 | 52 | 4.858138 | 48 | 4.856920 | 32 | 4.856355 | 28 |
| 25 | 4.862043 | 22 | 4.861063 | 43 | 4.859619 | 52 | 4.858090 | 48 | 4.856889 | 30 | 4.856350 | 28 |
| 26 | 4.862021 | 23 | 4.861020 | 42 | 4.859567 | 52 | 4.858042 | 47 | 4.856859 | 29 | 4.856345 | 28 |
| 27 | 4.861998 | 24 | 4.860978 | 44 | 4.859515 | 52 | 4.857995 | 47 | 4.856830 | 29 | 4.856342 | 29 |
| 28 | 4.861974 | 25 | 4.860934 | 44 | 4.859463 | 52 | 4.857948 | 46 | 4.856801 | 28 | 4.856340 | 29 |
| 29 | 4.861949 | 25 | 4.860890 | 44 | 4.859411 | 52 | 4.857902 | 46 | 4.856773 | 28 | 4.856338 | 30 |
| 30 | 4.861924 | 25 | 4.860845 | 45 | 4.859359 | 52 | 4.857856 | 46 | 4.856746 | 27 | 4.856337 | 30 |
| | XIV | | XIII | | XII | | XI | | X | | IX | |

M É M O I R E
SUR LA POPULATION DE PARIS,
ET SUR
CELLE DES PROVINCES DE LA FRANCE,
Avec des Recherches qui établissent l'accroissement de
la Population de la Capitale & du reste du Royaume.
DEPUIS LE COMMENCEMENT DU SIÈCLE.

Par M. MORAND.

DANS le Volume de nos Mémoires pour l'année 1771, j'ai donné une récapitulation (année par année) des baptêmes, mariages, mortuaires & enfans-trouvés de la ville & des faubourgs de Paris, depuis le commencement du siècle jusqu'à & compris 1770. Ce sommaire, précédé de quelques remarques appropriées au sujet, & qui tendent à l'éclaircir, ayant été agréable à l'Académie, je me suis engagé à suivre ce travail, à donner de temps en temps le résumé général des années subséquentes, en l'accompagnant de réflexions dans le cas où, au bout d'un certain temps, il résulteroit de ce recensement quelque connoissance importante (a).

Parmi les observations que le premier tableau m'a donné occasion de présenter sur cet objet, une des principales, en ce qu'elle intéresse le sentiment naturel de l'homme pour sa propre conservation, est la durée de la vie, plus grande dans nos pays qu'on ne l'avoit estimé communément, malgré ce qu'on pouvoit en présumer de la température excessivement variable de notre climat. Dès 1760, M. de Parcieux (b)

Lû
à la rentrée
publique
du 14 Avril
1779.

(a) Conformément à ce que j'ai proposé dans mon premier Mémoire de 1771, page 845, je donnerai pour le Volume de 1781, la réca-

pitulation depuis 1771 jusqu'à & compris 1780.

(b) Addition à l'Essai sur les Probabilités de la durée de la vie humaine, in-4° Paris, 1769.

460. MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

avoit bien avancé qu'il n'est pas si rare qu'on le croit ordinairement, de trouver ici, comme ailleurs, des gens très-vieux (c), & toujours plus de femmes que d'hommes (d). Ce que nous avons remarqué dans notre tableau général sur le grand nombre de vieillards, semble ajouter quelque chose & quelque évidence à l'observation de M. de Parcieux, flatteuse sans doute pour tous les hommes en particulier, dont elle autorise un plus grand nombre, quoique toujours infiniment petit, à espérer ces années de grâces & de faveur, qui constituent ce qu'on appelle le dernier âge de la vie (e).

En continuant mes recherches, principalement en les rapprochant de celles qui ont été faites par d'autres que moi; je n'ai pas été peu frappé d'une induction qui intéresse grandement le corps de la Société; & si cette induction se confirme, ou si elle résulte incontestablement de supputations exactes (comme il semble qu'il y a lieu de le penser), elle n'est pas moins importante que la première: l'Académie jugera si elle mérite d'occuper une place dans la rédaction du travail qu'elle m'a confié, & dont je lui donne aujourd'hui la continuation.

Depuis Diodore de Sicile, tous les Historiens de

(c) On sait que la Société royale de Londres a aussi reconnu, après des recherches dont on ne peut guère suspecter l'exactitude, qu'il ne mouroit, par année commune, qu'une personne sur quarante-deux.

(d) Dans l'espace de vingt-deux années, depuis 1745 jusques & compris 1766, le nombre des mortuaires des femmes n'est que de 191753 au lieu de 213487, qui est celui des hommes. M. de Buffon en conclut, qu'à Paris, les femmes vivent plus que les hommes, dans la raison de 213487 à 191753, c'est-à-dire un neuvième de plus, à très-peu-près, ou que sur dix années de vie courante, les femmes ont un an de plus que les hommes.

(e) A ce que j'ai rapporté dans mon premier Mémoire sur la longue vie, page 844, j'ajouterai ici un

nouvel exemple frappant dans une même famille, à Metz en Lorraine; il a été publié dans les Gazettes d'Agriculture & du Commerce, année 1779, n.º 7, fol. 564.

De sept frères & sœurs, dont cinq garçons & deux filles,

- Le 1.º des enfans, garçon, avoit 74 ans;
- 2.º fille, 75.
- 3.º garçon, 78.
- 4.º fille, 79.
- 5.º garçon, 81.
- 6.º garçon, 83.
- 7.º garçon, 91.

Faisant entr'eux sept. 561 ans.

Dans l'intervalle de ces deux années 1777 & 1779, la fille âgée de 75 ans, & le garçon de 83 ans, sont morts; les autres jouissoient alors d'une bonne santé.

l'Antiquité, Strabon & un grand nombre de Savans, ont prétendu que l'espèce humaine a souffert de très-grandes réductions; un des génies du siècle de Louis XV (car il est permis à un Observateur de crayonner sur ses tablettes jusqu'aux rêves des grands hommes), Montesquieu, portoit les choses plus loin; ne tenant point compte des recrutemens de population, ni de leur possibilité, il pensoit que la terre se dépeuploit tous les jours, au point qu'en supposant cette diminution d'habitans sur la surface du globe soutenue pendant dix siècles, la terre finiroit par n'être plus qu'un désert: ces opinions sont connues de toutes les personnes instruites, & rappelées dans plusieurs Ouvrages (f).

Dans ces derniers temps, quelques Écrivains semblent ajouter foi à ces présages singuliers, & les ont étayés de quelque vraisemblance: ils soutiennent, par exemple, pour la France, que depuis le *Projet de la Dixme Royale*, attribué à M. de Vauban, & dont il a paru une édition in-12 & une in-4.^o imprimée en 1707, la population du royaume est diminuée de plus de trois millions d'habitans. Dans une Brochure, publiée en 1760 (g), on a avancé comme démontré, que les pays les plus riches de l'Europe se dépeuplent visiblement. L'Auteur de l'article curieux sur la *Population*, qu'on trouve dans l'*Encyclopédie*, publié en 1765 (h), après avoir remarqué que, depuis le siècle dernier, la Monarchie est augmentée de plusieurs grandes provinces, prétend que ses sujets sont moins nombreux d'un cinquième, qu'ils ne l'étoient avant la réunion de ces provinces à la Couronne. Un état raisonné de la population de Londres & de celle de Paris, inséré dans un de nos Journaux périodiques en 1772 (i), a conduit l'Auteur de cette recherche (k) à opiner, comme ceux qui viennent d'être cités, que la popu-

(f) Lettres Persanes. L'Ami des hommes.

(g) Traités sur divers sujets intéressans de Politique & de Morale, du Commerce & du Luxe, p. 216.

(h) M. Damilaville.

(i) Gazette d'Agriculture, du Commerce & de Finance, 11 Avril, page 229; 14 Avril, page 236; 18 Avril, page 245.

(k) M. Auffray, des Académies de Metz & de Marseille.

lation de toute l'Europe diminue, & qu'elle ne soutient nullement la comparaison avec celle qui existoit il y a seulement un siècle: à la suite d'un tableau composé pour Londres & pour Paris, d'une suite d'années égales pour l'une & pour l'autre de ces deux Capitales, tant en naissances qu'en morts, vient un résultat qui n'est à l'avantage ni de la population de Londres, ni de la population de Paris (1). Cette dernière seule nous intéresse essentiellement; c'est à elle seule que je m'arrête, d'autant plus que pour ce qui est de Paris, les supputations de l'Académicien de Metz, & les conséquences qu'il en a tirées, sont restées consignées dans ce Journal, sans avoir été contredites jusqu'à présent: elles acquièrent dès-lors une certaine force, & sont supposées avouées. Antérieurement M. l'abbé Expilly s'étoit déjà élevé contre cette assertion. M. de Parcieux, dont les supputations n'étoient cependant relatives principalement qu'à deux classes d'hommes, Roturiers & Religieux, avoit soupçonné l'accroissement de la population de la Capitale de la France. Les personnes qui se sont occupées de ce genre de spéculation, & celles chargées de certaines parties d'administration, sont autorisées à penser qu'il n'y a rien de moins vrai que ce dépérissement de population dans Paris. Seroit-il indifférent de défabuser ou de ne point défabuser l'universalité des Citoyens sur un fait de cette nature? Il est sans contredit un sujet d'encouragement si la population se soutient, encore plus si elle augmente: quel sujet de découragement, au contraire, si cette population s'affoiblit sensiblement sans se relever, particulièrement après quelque calamité ou quelque époque, propre à faire soupçonner des émigrations ou un défaut de reproduction, capable de faire renaître l'idée d'une dépopulation soutenue! Et ce dernier

(1) D'après un état depuis 1759 inclusivement, jusqu'en 1772 exclusivement, comparé avec un état de naissances & de morts, en 1682, il compte mille habitans de perdus par an depuis 1682, & prétend que depuis treize ans, la population de Paris perdoit chaque année dix-huit

cents soixante-deux personnes; enfin, il trouvoit alors douze cents naissances de moins, & deux mille deux cents quatre-vingt-cinq morts de plus; & la population, estimée selon lui à sept cents mille habitans, diminuée d'un huitième.

sentiment ne laisse pas que d'avoir des partisans. Commençons donc par jeter les yeux autour de nous; examinons d'abord si cette manière de voir les variations & les altérations de notre population de Paris, se vérifie dans quelque point; portant ensuite nos regards dans les provinces, examinons s'il est bien certain que notre génération, en s'épuisant dans la reproduction, annonce ces approches, entrevues de si loin, de la première vieillesse du monde entier, & particulièrement celle du royaume de France.

En s'attachant uniquement à considérer sous des aspects généraux, les signes auxquels on pourroit reconnoître cette destruction, rien ne paroît les appuyer: quant à la Capitale, par exemple, les limites reculées à deux reprises différentes depuis un siècle, afin d'y ajouter d'abord au quartier Saint-Sulpice & au quartier de Richelieu, deux villes nouvelles; deux autres, de nos jours, à celui de la Ville-l'Évêque & à la Chaussée d'Antin, sont réputées par quelques personnes un signe d'accroissement de population (m). A l'égard des provinces, on pourroit en tirer la même induction de l'épuisement des forêts & de la rareté des bois de chauffage, à la vérité résultats du luxe des particuliers & de l'inattention du Gouvernement à replanter les bois, mais néanmoins suites également évidentes d'une grande population (n).

Ces présomptions générales sont plus que plausibles, plus

(m) Ce n'est pas que nous prétendions que l'on puisse conclure complètement de cette nouvelle étendue de superficie, couverte d'habitations: sans doute la recherche de logemens commodes & spacieux, entre seule pour beaucoup dans ces accroissemens d'étendue de local; mais peut-on disconvenir que ces logemens n'emportent un plus grand état de maison, en augmentation de domestiques, dont la plupart en se mariant, ont nécessairement augmenté la population! Il est en même temps difficile de

croire, que depuis un siècle le nombre des Artisans, des petits Marchands & autres, ne soit pas doublé; l'accroissement des Corps & Communautés, de siècle en siècle, est une chose hors de doute.

(n) M. de Buffon dans son Supplément au tome IV de l'histoire du Cabinet du Roi, fait judicieusement la remarque suivante, qui se rapporte absolument à notre idée; plus, dit ce Savant: plus les hommes se multiplieront, plus les forêts diminueront.

fortes du moins que les conjectures de la dépopulation du royaume; elles sont incontestablement beaucoup moins fautives que les combinaisons sur lesquelles plusieurs Écrivains se sont appuyés; elles ne doivent cependant être ici d'aucune considération; aussi les négligerons-nous entièrement: un point de cette conséquence demande à être porté jusqu'à l'évidence, autant que la chose en est susceptible. La discussion par laquelle je vais essayer de mettre tout le monde indistinctement en état de juger, n'entraînera pas de longs détails; c'est entièrement une affaire de calcul. Pour lever tout soupçon de préoccupation de ma part, je m'abstiendrai d'y faire rien entrer de mon travail particulier; il me suffira de remplir les fonctions d'Historien, c'est-à-dire que je m'en tiendrai à rassembler les premières autorités que j'ai prises au hasard, à mesure qu'elles se sont présentées jusqu'à l'année dernière, & sans en avoir choisi aucune par préférence.

Des différentes manières de juger l'accroissement ou le décroissement de population d'une ville (*o*), celle qui procède par l'augmentation & la diminution du nombre des naissances dans une période de temps fixe, nous semble la plus aisée aujourd'hui, la plus sûre, la meilleure (*p*); & précisément le tableau des naissances & des mortuaires de Paris, depuis le commencement du siècle, présente dès actuellement pour cette Capitale,

(*o*) M. de Parcieux, dans son Addition, a fait connoître une façon très-simple, dont s'y prenoit un Curé de Normandie, pour former une liste de mortalités: le Dictionnaire historique, géographique & politique des Gaules & de la France, par M. l'abbé Expilly, (tome V, imprimé en 1768, au mot *Population*), le projet d'une Dixme royale, in-4.^e 1707, page 187, ont donné différens modèles de dénombremens que l'on peut consulter. Aux états de naissances &

de morts, pour les provinces, il seroit bon d'ajouter un dénombrement, ou du moins le nombre des Paroisses, dont sont composés les cantons qui donnent matière à ces états.

(*p*) Peut-être aussi l'examen suivi & comparé, en différens temps, de la consommation d'une grande ville, telle que Paris, quoique bien sujette à variations, auroit quelque utilité; nous insérerons ici un état de ce genre, pour, dans la suite, servir de terme de comparaison avec d'autres.

État

Capitale, des résultats de nature à intéresser les Citoyens de tous les ordres. On verra tout-à-l'heure qu'ils sont tout-à-fait opposés, soit aux annonces, soit aux supputations sinistres dont nous avons parlé au commencement de ce Mémoire. En donnant une notice chronologique de quelques-uns de ces résultats, nous avons pour but de substituer à ce système de dépopulation, un tableau plus vrai & plus agréable pour les générations qui succéderont à la nôtre : ce tableau, auquel j'ai cru pouvoir m'arrêter après avoir compté les voix, montre que la population du royaume, qui, par des circonstances telles que celles que l'on fait arriver de temps en temps dans les grands États, pourroit avoir été languissante, peut-être

*État de conformation de toute espèce
de Vivres, dans Paris, en 1664.*

| | |
|----------|---|
| 1800000 | setiers de blé. |
| 900 | setiers de sel. |
| 77000 | boeufs. |
| 120000 | veaux. |
| 420000 | moutons. |
| 14400 | cochons. |
| 33977 | morues. |
| 32590 | barils de harengs. |
| 3250 | barils de saumon salé. |
| 1340 | barils de maquereaux salés. |
| 41315 | voies de { charbon de bois. charbon de terre. |
| 42500000 | voies de bois. |
| 3212000 | setiers d'avoine. |
| 10000200 | bottes de foin & de paille. |
| 5004519 | livres de suif. |
| 160000 | rames de papier pour l'impression. |
| 280000 | rames de { papier pour écriture. cartes à jouer. cartes de Géographie. estampes. |

J'ai cru pouvoir adopter cet état, publié par M. l'abbé Expilly, sans

Mém. 1779.

néanmoins garantir en aucune manière son exactitude : d'anciens écrits fugitifs renfermoient une note sur le même objet ; quelque peu d'authenticité que puisse avoir une pareille note, prise dans ces sources, je placerai ici celle que je trouve dans un Almanach : il y est dit, qu'il se consomme à Paris, année commune,

| | |
|----------|---|
| 900 | muids de sel. |
| 12800 | muids de blé. |
| 77000 | boeufs. |
| 120000 | veaux. |
| 240000 | moutons. |
| 32400 | cochons. |
| 37978 | morues. |
| 32560 | barils de harengs. |
| 3250 | barils de saumon salé. |
| 1340 | barils de maquereaux salés. |
| 41315 | muids de { charbon de bois charbon de terre. |
| 500000 | voies de bois. |
| 3212 | muids d'avoine. |
| 10000000 | bottes de foin. |
| 200000 | bottes de paille. |

N n n

même altérée jusqu'au commencement de ce siècle, à peu près (q); ce tableau montre, dis-je, que la population du royaume s'accroît aujourd'hui sensiblement, ou tout au moins qu'elle ne diminue certainement pas dans le moment actuel, comme le prétendent quelques personnes. Par exemple, le dénombrement de Paris, commencé sous Colbert (r), porte la population de cette Capitale à sept cents vingt mille personnes (s): ce même nombre ne se retrouve peut-être pas aujourd'hui; mais la diminution des morts & l'augmentation des naissances, établies par notre tableau depuis environ une quarantaine d'années (t), font disparaître l'idée de continuité de dépopulation.

(q) Comme elle l'est quelquefois passagèrement, selon la rigueur des hivers, selon les mauvaises années ou des constitutions épidémiques, selon l'affluence de la province & des pays étrangers, selon enfin des évènements particuliers: c'est ainsi que par le tableau de 1710, on trouve une différence au moins d'un cinquième de naissances, sur les naissances des années précédentes; non-seulement, la population avoit perdu un cinquième sur la reproduction, mais encore presque le double par la mortalité, & un quart de moins de mariages, dont le nombre, ainsi que celui des naissances, présente toujours, dans Paris, moins de variations d'une année à l'autre, que le nombre des morts. Depuis le commencement de nos dernières expéditions maritimes, qui expatrient nombre de sujets, dont la plus grande partie ne reviendra point, on doit s'attendre à voir une différence marquée dans notre population.

(r) En 1682, & rendu public peu d'années après la mort de ce Ministre, en 1694.

(s) Avant ce dénombrement vrai, & généralement adopté aujourd'hui, le nombre des habitans

de Paris semble avoir été évalué à un million, on ignore sur quel fondement; il est porté à ce taux par le Père Bonssingault, Supérieur & Chanoine régulier, dans un Ouvrage intitulé le *Guide universel des Pays-bas*, in-12, troisième édition, 1672, page 358. L'abbé de Saint-Pierre, & depuis lui plusieurs Écrivains, le font monter à huit cents mille, & ils ajoutent qu'il meurt, année commune, dix-huit à dix-neuf mille personnes, sur vingt environ qui naissent. Le Maire, auteur de l'Ouvrage intitulé *Paris, ancien & nouveau*, tome 1, page 6, état présent de la ville de Paris, en 1685, a aussi adopté ce nombre de morts dans Paris.

(t) En établissant la base de ces recherches sur les états des mortuaires, il est indispensable de ne pas soupçonner que ces Tables, dans leurs commencemens, n'étoient ni si exactes, ni aussi complètes que depuis environ quarante ans, qu'elles ont été augmentées de quelques articles & de quelques développemens; il est plus sûr conséquemment de ne partir que de l'année 1721, & même encore, à l'exemple de M^r de Buffon, pour approcher de plus près de la mortalité moyenne,

L'évaluation de M. l'abbé Expilly, portée à six cents mille habitans de Paris, vers l'année 1760 (*u*), se trouve peu différente des supputations de M. de Buffon, qui fixe ce nombre à six cents cinquante-huit mille ; & attendu que la mortalité moyenne est actuellement reconnue de vingt mille par an (*x*), cet Académicien porte le nombre des personnes vivantes dans la Capitale, à sept cents mille (*y*) : il trouve en même temps que la force de cette Capitale, pour le maintien de la population, a depuis cent ans augmenté d'un quart (*z*).

Un Magistrat, distingué par ses lumières, & non moins recommandable par les fonctions dont il a été chargé successivement pour le Roi, en Auvergne & dans le Lyonnais,

il est plus sûr de ne partir que de 1745, où ces listes ont été détaillées dans des divisions intéressantes.

(*u*) Dictionnaire historique, géographique & politique des Gaules & de la France, tome V, imprimé en 1768, page 400, au mot *Paris*.

(*x*) Sept cents vingt mille si la mortalité moyenne est de vingt mille par an, en comptant trente-cinq vivans pour un mort : quelques Écrivains, en jugeant du nombre des vivans par celui des morts, avancent que ce rapport est de 32 ou 33 à 1 ; selon M. de Buffon, il est de 35 à 1, de manière que, suivant cet Académicien, Paris contient trente-cinq fois dix-huit mille huit cents ou six cents cinquante-huit mille personnes, tandis que, d'après le premier rapport de trente-deux vivans pour un mort, Paris ne contiendrait que six cents un mille six cents personnes.

(*y*) Histoire Naturelle, Supplément, tome IV, Probabilités de la durée de la vie, in-4.^e page 283. Je dois ajouter ici une remarque sur le nombre total des naissances portées dans les états annuels,

publiés jusqu'à ce jour. L'article des Enfans-trouvés renferme un double emploi, que j'ai trouvé moyen de réformer : parmi les enfans reçus dans cet Hôpital, & portés sous ce titre, la plupart ont été baptisés, soit à Paris, soit dans les Campagnes d'où ils ont été envoyés ; ce nombre particulier, dont la distinction commencera sur les états à l'année 1780, doit être diminué sur la totalité des naissances de la ville de Paris, pour les années antérieures, où le nombre des Enfans-trouvés s'est accru sensiblement : on peut évaluer ce nombre à quinze cents, année commune, qu'il faut conséquemment soustraire des résultats relatifs à la population générale de la Capitale, pour les années précédentes.

(*z*) En comparant les vingt premières années, depuis 1721 jusqu'en 1766, avec les dix dernières, il en résulte, selon le même Savant, qu'entre la dernière époque, comparée avec la première, il y a une différence d'un-trente-sixième en augmentation.

où j'ai vu la mémoire en honneur, quoique n'étant plus dans ces provinces, s'étoit occupé de la même recherche bien antérieurement à mon premier Mémoire : le tableau de mortalité, faisant partie de mon travail, a fixé l'attention de l'homme en place, toujours dirigée vers l'utilité. Il a publié, sous le nom de M. Maudre, dans le Mercure de Mai 1777, des réflexions dont le résultat entièrement d'accord avec ce que nous dirons dans un instant relativement aux provinces du royaume, dédommage clairement des tristes impressions données par l'Académicien de Metz & de Marseille. Le savant Magistrat qui n'a pas voulu se nommer, après avoir distrait de son calcul six Paroisses de Paris, comprises dans les états de 1770 & 1771, qui ne l'étoient point dans les états précédens, trouve que dans les autres Paroisses dont la ville de Paris étoit alors composée, la population s'est accrue d'environ un dix-septième dans le courant d'un siècle, & que le nombre des morts est diminué d'environ un vingt-deuxième. L'auteur de nouvelles recherches & considérations sur la population de la France, estime le nombre des personnes vivantes à Paris, évalué par les naissances, à six cents soixante-dix mille, à peu-près (a).

Quel que puisse être cet accroissement de population dans Paris, le premier mouvement qu'inspire naturellement ce genre de prospérité de la Capitale du royaume, est d'abord suspendu par une opinion assez généralement reçue; & on peut dire que cette opinion est raisonnable, si l'on trouve la preuve que cet accroissement de population de la Capitale en particulier, existe en quelque chose aux dépens de nos provinces, où la multiplicité des bras & le nombre des Cultivateurs sont d'une conséquence bien autre que celui des habitans de Paris. En effet pour peu que nos campagnes se ressentissent, dans la plus petite proportion, de l'émigration annuellement répétée qui vient repeupler cette foule d'Employés divers, de Domestiques, d'Ouvriers de l'un & de l'autre sexe, de

(a) Chapitre VI, page 69.

petits Marchands forains (*b*), que nous mettons en action dans la Capitale, il est hors de doute que cette seule colonie de citadins, loin d'être pour nous, comme elle l'est pour l'Étranger qui n'y est pas intéressé, un sujet d'admiration, ne seroit bien véritablement pour la suite des temps qu'un sujet d'alarmes. Quelques Cours souveraines ont éprouvé ce sentiment; peut-être y ont-elles été fondées momentanément : dans leur Jurisdiction, elles se sont occupées des moyens d'obvier aux suites inévitables d'un pareil malheur. Le Parlement de Dijon dans des remontrances du 9 Janvier 1767; le Parlement de Bordeaux, dans le dispositif d'un arrêt du 27 Février 1765, se sont plaints de la dépopulation qui se faisoit sentir dans leur ressort : ce dernier Parlement a ordonné en conséquence de trois en trois ans, un recensement dans toutes les villes de son ressort, de tous les habitans de leurs juridictions, soit hommes, soit femmes, maisons religieuses, pensionnaires, domestiques de ces maisons, hôpitaux & établissemens de charité, manufactures, maisons de forces, domestiques qui y sont employés; en un mot l'opinion répandue de dépopulation, a donné lieu à des ouvrages utiles sur les causes de ce mal trop généralement regardé comme avéré, & (dans le cas où il seroit constaté) sur les moyens d'en arrêter le progrès. Les observations faites de tous côtés, & soigneusement à ce qu'il paroît, rassurent sur le point de fait, en supposant même que la population de la Capitale soit de deux ou trois mille sujets de moins que le taux auquel on l'a porté : ces observations (*c*) prouvent

(*b*) Le nombre seul de sujets en service à Paris, très-difficile à reconnoître en tout temps, ne peut que s'être multiplié considérablement, il se montoit il y a environ vingt ans (d'après les rôles de la Capitation) à trente-sept ou trente-huit mille, & se trouvoit en 1754 (d'après M. l'abbé Expilly, *tome V*) de quarante-trois mille six cents quatre-vingt-dix-neuf : M. Maiffance

porte ce même nombre en 1754, à trente-sept ou trente-huit mille, *chapitre VII, question VII, page 114.*

(*c*) En 1770, feu M. l'abbé Terray, Contrôleur général des Finances, pour avoir une connoissance à peu-près exacte & certaine du nombre des habitans du royaume, demanda, de la part du feu Roi, à M.^{rs} les Intendans, les états des naissances, mariages & morts de

que la population des provinces est augmentée dans une progression marquée; ce qui d'abord tranquillise sur le grand nombre de sujets qui quittent les campagnes pour venir à Paris. Si l'on se rappelle maintenant cette dévastation spontanée des habitans de la terre, supputée par quelques Ecrivains à son dernier période dans dix siècles, & qui doit faire régner de proche en proche sur toute la surface du globe le plus profond silence, il est clair que la France n'en présente point l'annonce: l'aurore du siècle d'Auguste n'en fera point, dans l'histoire à venir, la première époque; au contraire, tandis que pour la ville de Londres & pour une partie de l'Angleterre, la population a éprouvé, d'après les calculs de quelques Observateurs, un déchet sensible (d) depuis un temps assez soutenu, pendant ce même temps, la différence des naissances aux morts, qui va toujours en croissant à Paris & dans les provinces, laisse apercevoir que la population & de la Capitale, & de tout le royaume, est considérablement augmentée.

Quoique mon travail embrasse uniquement le tableau de la population de Paris, il y a un rapport trop direct, une dépendance trop réelle entre cette population de la Capitale & la population du reste du royaume, pour que je puisse me dispenser en passant de les rapprocher l'une de l'autre; cette recherche de comparaison intéresse d'ailleurs évidemment l'humanité entière, & la félicité publique; on ne doit pas être surpris que depuis quelques années, plusieurs Citoyens estimables s'occupent de cette spéculation: je ne ferai encore

toutes les généralités; ils ont été publiés soigneusement dans la Gazette du Commerce, où ils forment un ensemble des plus intéressans pour des recherches, qui, de même que ces différens états, ne peuvent que se perfectionner avec le temps: il n'est point indifférent de faire remarquer, que le nombre des morts des enfans peut être soupçonné supérieur à celui porté dans ces états; il est permis de présumer les Curés de campagnes inexactes à en tenir registre,

l'extrait mortuaire des enfans n'étant d'aucune conséquence dans les actes de la société civile, & étant rarement demandé.

(d) D'après le docteur Price, entr'autres, dans son Essai sur l'état de Londres & sa population, & dans son Traité des payemens réversibles, contredit, à la vérité, par plusieurs Ecrivains. Voyez l'état présent de la population d'Angleterre & du pays de Galles.

usage que de leurs recherches & de leurs travaux; il ne sera aucunement nécessaire que j'y ajoute du mien.

Un Ouvrage, dans lequel l'induction de population augmentée dans les provinces se trouve développée (e), mérite d'autant plus d'entrer en considération, que l'Auteur, à portée de connoître trois riches provinces de France, ne s'est attaché dans son travail qu'aux faits essentiels qui assurent le nombre des habitans dans chacune de ces provinces, & qu'il a soigneusement compensé tout ce qui pouvoit jeter de l'incertitude sur l'inexactitude de ses calculs, pour chaque généralité sur laquelle il a fait ses opérations; généralités d'Auvergne, de Lyon & de Rouen. Du nombre des naissances, mariages & morts en dix ans de temps dans toutes les villes, bourgs & paroisses de ces généralités, M. Maiffance a composé une année commune; il s'est procuré en même temps des dénombremens complets d'habitans, *tête par tête*, d'un grand nombre de villes, de bourgs & de paroisses de ces mêmes généralités (f); en soixante-deux ans, il a trouvé la population augmentée de plus d'un onzième dans le total de cent vingt-huit paroisses (g); de ses supputations, il conclut que jamais

(e) *Recherches sur la population des généralités d'Auvergne, de Lyon & de Rouen, & de quelques provinces & villes du royaume, avec des réflexions sur la valeur du blé, tant en France qu'en Angleterre, depuis 1674, par M. Maiffance, Receveur des Tailles de l'élection de Saint-Étienne; Paris, in-4. 1766.* Cet Ouvrage se trouva cité avec les éloges qu'il mérite dans le Supplément au tome IV de l'Encyclopédie, imprimé en 1776, au mot *Population*.

(f) Cette manière de compter tête par tête, semble plus sûre pour ce qui s'appelle dénombrement, à l'effet de connoître simplement la population, que par feux ou par familles, dont l'énumération est toujours sujette à beaucoup de difficultés, d'infir-

délités, de longueurs, de dépenses, & même d'inconvéniens; d'ailleurs, le nombre des naissances dans une ville, pris sur l'année commune, donne une base certaine pour connoître le nombre de ses habitans, & peut tenir lieu de dénombrement.

(g) Il remarque, d'après M. Malouin, que les mois de Juillet, Mai, Juin & Août, sont les dates les plus fréquentes de grossesses, & que ceux qui le sont moins communément, sont d'abord Novembre; ensuite Mars, Avril & Octobre.

Dans son estimation de la durée moyenne de la vie de vingt-cinq à vingt-six ans, il approche du sentiment de M. l'abbé Expilly; M. de Kerfobom, en Hollande, M. Halley, Anglois, d'après les Tables de Breslau en Silésie, ont

la population n'a été si grande dans le royaume, & que les Écrivains politiques (*h*) qui ont assuré, depuis quelques années, une dépopulation, n'en ont apporté aucune preuve.

Cette conséquence de M. Maïssance, appuyée sur des recherches dans trois généralités seulement; pourra, il faut l'avouer, ne pas être regardée décisive pour tout le reste du royaume, mais elle se trouve confirmée par les relevés de morts & de naissances dans beaucoup d'autres provinces: je me contenterai d'en placer ici quelques-uns.

Le dénombrement, fait en 1759, des habitans d'Avignon, & rapporté par M. l'abbé Expilly (*i*), montre une augmentation considérable, en le comparant avec celui qui avoit été fait en 1739.

D'après un semblable examen dans le Berri, cette seule province, où il n'y a ni industrie ni commerce, & qui est dans l'intérieur du royaume, s'est trouvée, de 1729 à 1762, augmentée en population d'un dixième ou environ.

Des recherches, faites il y a environ dix ans, sur la population du Dauphiné, ont prouvé que dans cette province, qui comprend une étendue d'à peu-près six cents soixante lieues quarrées, il y avoit à la fin du siècle dernier cinq cents soixante-douze mille trois cents dix-huit habitans; & que dans l'année 1764, on en comptoit six cents trente-quatre mille six cents quarante-un (sans y comprendre la principauté d'Orange) ce qui présente une augmentation bien marquée: en 1769, on a trouvé six cents quarante-cinq mille cinq cents soixante & six pour total d'habitans.

La Gazette d'Agriculture du 30 Mars 1773 (*k*), porte,

porté la vie moyenne des hommes à quatre-vingt-quatre ans. Il est indispensable d'observer, avec plusieurs Écrivains, que les principes pour évaluer la durée de la vie moyenne, ne doivent pas être les mêmes pour tous les pays; que cette estimation peut varier, à raison d'un pays que l'on habite, à raison de la fortune aisée ou mal aisée, &c. qu'enfin, il ne faut pas

prendre une moyenne proportionnelle à volonté, & au hasard.

(*h*) M. de Mirabeau, dans l'ouvrage intitulé *l'Ami des hommes*.

(*i*) Au mot *Feu*, *tom III*, page 124; cette ville, enclavée dans la France, peut faire nombre parmi les exemples.

(*k*) Article de Poitiers, du 20 Mars, page 204.

qu'il

qu'il est prouvé, par les registres de plusieurs paroisses de campagne du Poitou, que la population y étoit augmentée assez considérablement depuis environ douze ans: il y est remarqué que cet accroissement supposoit un accroissement de subsistances, & que néanmoins il y avoit eu de mauvaises récoltes; d'où l'on infère ou que la culture s'est bien étendue, ou que l'aisance s'est répandue dans ces cantons.

Un état des baptêmes, mariages & sépultures de plusieurs paroisses de Bourgogne, recueilli par M. de Buffon (1), fait voir dans chacun de ces endroits, plus de naissances que de morts; dans un endroit, près d'un tiers ou près d'un quart de plus; dans un autre, un cinquième, un neuvième à peu-près.

Enfin les relevés de différentes provinces du royaume, qui ont commencé à être publiés successivement depuis l'année 1774 dans la Gazette d'Agriculture, & dont nous ferons quelque usage à la suite de la récapitulation des naissances & mortuaires de Paris, depuis 1771 jusqu'en 1780, (m), achèvent de constater également dans tout le royaume une supériorité marquée du nombre des naissances sur celui des morts; ils fournissent conséquemment la preuve d'une population augmentée, non-seulement dans la capitale, mais encore dans la totalité de ces provinces en général (n); accroissement déjà aperçu en 1768, par M. l'abbé Expilly, auquel on a cru pouvoir reprocher, d'avoir porté, mal-à-propos, cet accroissement à trois ou quatre millions depuis deux siècles.

Dès 1561, sous Charles IX, on comptoit vingt millions d'habitans en France, ils ont été évalués à ce taux jusqu'à la révocation de l'Édit de Nantes; le dénombrement fait à la fin du siècle dernier, & l'Ouvrage intitulé *Projet de la Dixme royale*, ne le portoient plus qu'à dix-neuf millions quatre-vingt-quatorze mille cent quarante-six habitans; cependant, d'autres Écrivains en ont encore réduit le nombre à seize millions;

(1) Supplément. tom. IV, p. 286.

(m) V. Note a p. 459 de ce Mém.

(n) Il n'est pas indifférent d'observer, que cela est également reconnu

Mém. 1779.

par les Savans d'Angleterre, qui ont tourné leurs spéculations sur la France. *Essai sur la Population de l'Angleterre, &c.* par le Doct. Wales.

c'étoit une idée reçue dès 1726, ce qui, sans doute, a fait naître l'idée de dépopulation; M. l'abbé Expilly le suppose de vingt-deux millions quatorze mille trois cents cinquante-sept, & de vingt-un millions au moins (n). Les différens tableaux de notre population, aussi curieux qu'intéressans, dont j'ai parlé, & sur lesquels j'ai fixé mon attention, me paroissent donner une grande vraisemblance à cette supputation de M. l'abbé Expilly, à l'estimation de M. de Buffon, qui trouve en France vingt-un millions six cents soixante-douze mille soixante-dix-sept personnes, & peut-être encore aux résultats des rapports des Intendans des Généralités, d'après lesquels la population du royaume monte à vingt-quatre millions de personnes; ce nombre, en même-temps, s'accorde avec les résultats trouvés par M. Moheau, dont l'avis est que l'on doit compter dans toute la France vingt-trois millions cinq cents mille ou vingt-quatre millions d'habitans en France (o): le docteur Price, estime aussi que la population de la France ne peut pas être au-dessous de vingt-cinq millions, & il observe que les naissances excèdent, tous les ans, les morts d'un septième: tous ces résultats, presque semblables, donnent une certitude raisonnée qu'il existe annuellement dans les provinces du royaume, un accroissement quelconque de population (qui peut être à peu-près d'un neuvième en soixante-quatorze ans) selon l'estime de M. Moheau (p).

Ainsi, à juger pour l'instant, soit par différentes estimations, soit par plusieurs provinces prises séparément, il est tout au moins plus que prouvé, & c'est essentiellement mon objet,

(n) Dictionnaire historique, géographique & politique des Gaules & de la France, au mot *Feu*, page 123, tome III, imprimé en 1764.

(o) Depuis la lecture de ce Mémoire, du 14 Avril 1779, les Papiers publics ont fait mention du Tableau présenté au Roi, par M. l'abbé Expilly, le 4 du mois

d'Août, dans lequel l'état des habitans de la France, est, à son estime, de plus de vingt-quatre millions dans les trente-deux Généralités, & le nombre des habitans de Paris, à six cents mille. *Annales politiques*, tome VI, n.^o XLIV; *Mercur de France*, Septembre, 1779, page 235.

(p) Chapitre XIII, page 273.

que la dépopulation du royaume n'est point une chose de fait, qu'elle n'a été estimée par les personnes qui l'ont annoncée, que d'après quelque province en particulier, où la chose a pu ou dû être ainsi. En un mot, il paroît d'un autre côté, que depuis environ quarante ou cinquante ans, le nombre des personnes vivantes, à Paris, est augmenté.

Voudroit-on dans ce moment ne regarder l'induction d'une population augmentée dans le royaume, à un point qui ne s'étoit pas encore vu, ou qui n'avoit pas été remarqué, que comme une assertion hardie ou forcée, comme un aperçu dénué de toute l'évidence qu'il seroit naturel d'y désirer, pour donner lieu à des recherches certaines, pour servir utilement de base à des spéculations politiques? Voudra-t-on douter de l'exactitude des opérations employées à reconnoître cet accroissement de population? Soit, on conviendra même, comme l'observe judicieusement M. de Buffon, qu'en travaillant, & en raisonnant sur cette matière, on est sujet à se tromper, & même à tirer de fausses inductions des rapports que présentent les tableaux de mortalité (q); mais on ne peut se refuser à une conséquence bien simple, savoir, que de tout l'ensemble, dont nous ne donnons ici que l'esquisse générale, (même en prenant le terme moyen de la plus

(q) Il est difficile d'établir une règle de proportion entre le nombre des vivans & celui des morts; la règle de trente-cinq vivans contre un mort, est trop foible pour les habitans de la campagne, & ne peut être généralement adoptée pour connoître la population réelle & existante de Paris: un écrivain, qui ne s'est point nommé, a donné, dans la Gazette d'Agriculture, année 1777, n.^o 80, comme un moyen sûr, une règle de proportion entre le nombre des naissances & celui des habitans existans; il rapporte plusieurs exemples, par lesquels il se propose de prouver que cette proportion est de 1 à 26, sur la totalité du

royaume & d'une grande province, contre le sentiment de plusieurs Auteurs qui estiment cette proportion à 28.

Le Rédacteur de cette Feuille périodique, observe à ce sujet, que la recherche faite par M. de Buffon, pourroit servir de preuve; que cette proportion de 1 à 28 est effectivement celle qui approche le plus de la vérité; en effet, poursuit le Rédacteur, dans les paroisses dénombrées par M. de Buffon, & citées précédemment s'est trouvé neuf mille trois cents quarante-trois habitans de tout sexe & de tout âge: l'année commune des naissances dans les mêmes paroisses monte à 336; ce

forte & de la plus foible supputation (*r*) il résulte une somme considérable de probabilités (*f*), qui rend plus que problématique l'opinion de dépopulation dans le royaume; en un mot, il est permis d'adopter par préférence des observations nombreuses, & multipliées de tous côtés, qui, par des résultats presque d'accord, établissent uniformément un accroissement de population, dont le dire de plusieurs Écrivains éloignoit toutes les idées.

nombre, multiplié par 28, donne 9408, ce qui approche beaucoup des neuf mille trois cents quarante-trois habitans existans réellement dans lesdites paroisses. Il semble néanmoins qu'il y auroit lieu de croire que la règle de vingt-huit habitans contre une naissance, est en général trop forte, du moins à en juger par les recherches faites par l'Académie de Dijon, en 1770, sur la population de Bourgogne; cette Compagnie s'étant procuré le relevé des naissances, des morts & des mariages, & le dénombrement exact des habitans de cinquante paroisses, prises indifféremment dans neuf bailliages de la province, elle a trouvé que l'année commune des naissances de ces cinquante paroisses, multipliée par $25\frac{1}{4}$, donnoit, à 7 près, le nombre des habitans compris dans les dénombremens.

(*r*) Une population nombreuse qui paroît d'abord devoir être regardée comme la première de toutes les richesses d'un État, seroit-elle effrayante, seroit-elle une charge, car les deux contraires sont mis en question! l'augmentation des habitans d'un royaume, est-elle l'annonce de la prospérité d'un État, comme la diminution semble être une preuve de la pauvreté d'une Nation! ces discussions sont étrangères au Physicien, je les abandonne aux personnes capables de les rappor-

ter fructueusement à des systèmes d'administration. Afin d'aider à juger, par la suite des temps, des différences dignes de remarque, dans la population des provinces, j'ai jugé utile de consigner dans mon nouveau travail, un dénombrement des habitans des provinces du royaume, en 1726; on le trouvera à la suite de la récapitulation des baptêmes, mariages & mortuaires de Paris, depuis 1771 jusques en 1780 inclusivement: ce dénombrement, rapproché de l'état que je ferai suivre (dans le même volume pour l'année 1781) de la population des provinces du royaume, pendant les années 1776 & 1777, & dont on a fait une année commune, donnera, dans tous les temps, un point de comparaison intéressante.

(*f*) Cette population, telle qu'elle est établie par les Intendans, a engagé un Écrivain dans une supputation curieuse, dont le résultat peut mériter d'être mis ici, en opposition avec le sentiment de M. de Montesquieu. En supposant pour l'instant, que la population ainsi augmentée, pût s'accroître dans une même proportion, sans être troublée par une guerre longue, pénible, en pays éloigné de nos foyers, par quelque épidémie universelle, &c. L'Auteur trouve que cette population se trouveroit doublée en moins de deux siècles & demi.

Une découverte aussi intéressante pour la société, je veux dire cette génération multipliée, reconnue par plusieurs personnes à la fois, se rapporte dans son principe & dans sa continuité, à quelques causes générales, dignes d'exciter la curiosité. Il ne peut être qu'utile d'en reconnoître l'enchaînement pour les entretenir & les étendre s'il se peut ; cette recherche est d'autant plus intéressante, qu'en remontant aux sources, desquelles peut dériver sensiblement l'accroissement de population dans un royaume, on trouve pour la France des motifs plus que suffisans, pour conclure, avec fondement, que l'assertion de population augmentée, & celle de diminution de mortalité depuis près de cinquante ans, non-seulement à Paris, mais même dans les provinces, ne sont point de pures chimères. On ne doit pas se dissimuler ici plusieurs chefs d'une seule & même objection, qui infirment la vérité de cette population augmentée, de cette diminution de mortalité, de cette longévité, soit dans les provinces, soit dans la capitale : Comment, diront quelques personnes, comment, sur-tout pour Paris, accorder ces trois faits comme incontestables, avec la dépravation excessive des mœurs, avec le luxe, la débauche, qui règnent dans les capitales ? Pour les provinces est-il plus facile de concilier les faits avec la misère qui y est répandue généralement : Car sans oser convenir de ces maux, parce qu'ils sont trop fâcheux, il n'est cependant pas possible de nier ici les apparences pour les premiers reproches, & de passer sur le bruit public pour le dernier. Comment enfin, se persuader de cette population vivace dans Paris, à laquelle on objecte encore quelquefois la constitution délicate, valétudinaire de la génération actuelle, nullement comparable, selon le dire de quelques personnes, en force & en vigueur, aux habitans de cette même capitale, dans le siècle dernier, ou tout au moins, fort inférieure aux habitans de la campagne.

Ces différens fléaux réunis, suffisent pour faire souffrir un dépérissement notable dans l'espèce, & pour répandre au moins un doute très-fondé sur la réalité de l'espèce de fait

physique relatif à la population, dont nous croyons pouvoir nous féliciter avec des Écrivains estimables; les observations que ces vices fournissent contre les conclusions de ce Mémoire, ne sont point sans valeur, elles méritent, par cette raison, d'être traitées & approfondies sérieusement.

La discussion, dont quelques-unes sont susceptibles, n'est pas de ma compétence; le sujet ne pouvoit manquer de se trouver du goût de quelques personnes en état de s'en acquitter mieux que je ne pourrois le faire; il vient d'être traité, d'une manière intéressante, par M. Moheau (*t*); d'ailleurs, ce qui touche le physique sur ce point, doit seul m'occuper; je ne suis à portée d'assigner que les causes de santé, qui ont pu concourir à tout ce qui en forme les apanages, & que mon état me met à même d'apprécier. L'Auteur de la lettre qui m'a été adressée dans le *Mercur* de France, en 1777, M. Moheau, dans l'Ouvrage qu'il vient de publier, & d'autres Auteurs, en ont déjà aperçu plusieurs; je crois pouvoir y en ajouter quelques-unes, qui ne se sont point encore présentées à l'idée des personnes qui ont fourni leurs vues sur ce sujet; cet article peut former à part la matière d'un Mémoire, j'attendrai, pour le communiquer dans nos Séances particulières, que la publication de celui-ci ait mis l'objet à même d'être encore plus éclairci, infirmé ou constaté de nouveau par quelques observations ultérieures, dont je n'ai pas de connoissance quant à présent.

(*t*) Qui satisfait en grande partie aux questions importantes, politiques, morales & physiques, dépendantes de cette recherche particulière, &

qui peuvent servir de base à une opinion vraisemblable sur les causes générales de la population.



OBSERVATION
SUR UN ACIDE GLACIAL,

*Obtenu par la distillation d'un mélange d'Acide nitreux
fumant & de Charbon embrasé & réduit en poudre.*

Par M. CORNETTE.

M.^{RS} LAVOISIER & BUCQUET, ont présenté à l'Académie, il y a quelques jours, un flacon d'huile de vitriol glacial, retiré à un très-grand feu, de la décomposition du nitre par le colcotar. Comme les expériences que je présente aujourd'hui, quoique faites d'une manière différente, paroissent se rapprocher beaucoup de celle de ces Académiciens, je crois devoir mettre cette note en tête de cette Observation, déclarant ne vouloir point leur enlever l'honneur de leur découverte, mais prenant occasion de-là, de faire part à l'Académie d'un travail fait depuis long-temps sur cet objet, que je ne comptois pas lui communiquer sitôt.

OBSERVATION.

J'AI parlé dans le Mémoire que j'ai lû l'année dernière à l'Académie, sur le Sel ammoniacal nitreux, de la distillation de l'acide nitreux sur le charbon; j'ai démontré que cette substance ne souffroit pas d'altération marquée de la part de cet acide, puisqu'après cette opération elle avoit conservé sa couleur noire, & son inflammabilité : comme je ne m'étois servi pour faire cette expérience que du charbon ordinaire, je résolus quelque temps après de la répéter de nouveau, mais avec du charbon bien sec, c'est-à-dire, avec du charbon embrasé réduit en poudre sur le chanip, & de l'acide nitreux fumant, préparé selon la méthode de Glauber, persuadé que je retirerois de cette seconde expérience, faite de cette manière,

quelques résultats différens de la première : le succès surpassa mes espérances , car je ne m'attendois pas à obtenir d'un pareil mélange , un produit semblable à celui que je vais décrire.

Je mis dans une cornue de verre un gros de charbon ainsi préparé , sur lequel je versai une once d'acide nitreux fumant ; ce mélange s'échauffa beaucoup , & fit monter le thermomètre de 25 degrés au-dessus de la glace , la température étant ce jour-là à 10 ; je plaçai cette cornue sur un bain de sable , au col de laquelle j'ajustai une alonge ou cylindre de verre , dont l'extrémité entroit dans un récipient qui pouvoit contenir environ dix pintes d'eau ; je laissai ce mélange en digestion du soir au matin , pour que le charbon fût mieux pénétré par l'acide ; pendant ce court espace de temps , ce dernier s'étoit un peu coloré , & avoit dissout une petite portion de charbon ; je procédai ensuite à la distillation par une chaleur fort douce , il se dégagea presque aussitôt beaucoup de vapeurs rutilantes , qui obscurcirent les vaisseaux ; je conduisis le feu avec beaucoup de ménagement , afin de mieux examiner ce qui se passeroit pendant cette distillation ; lorsque l'acide fut passé entièrement , ce que je reconnus facilement par l'éclaircissement de l'alonge , j'aperçus qu'il s'élevoit du fond de la cornue , une poudre blanche très-fine & très-subtile , qui , en s'attachant à ses parois , formoit la cristallisation la plus belle & la plus agréable qu'on puisse voir ; une partie étoit disposée en longues aiguilles , & l'autre représentoit des rinceaux , charmans par leur arrangement : je me hâtai de déluter les vaisseaux , parce que je commençois à m'apercevoir , à la vérité un peu trop tard , que cette matière se liquéfioit facilement par la chaleur plus forte que j'avois donnée , & qu'elle se confondoit avec la liqueur contenue dans le récipient ; je recueillis de cette substance , à l'aide d'un tube de verre , le plus qu'il me fut possible , que je renfermai dans un flacon très-sec , car autrement elle se seroit convertie en liqueur ; je passai de l'eau distillée sur l'autre portion qui étoit restée dans l'alonge , & que je n'avois pu détacher ,

détacher, il se fit aussi-tôt un bouillonnement assez considérable avec dégagement de vapeurs d'acide nitreux, & cette dissolution, faite dans de justes proportions, rendit sur le champ l'eau d'une belle couleur bleue, comme celle qui résulte d'un mélange d'acide nitreux & d'eau, ainsi que l'ont démontré plusieurs habiles Chimistes; je fis évaporer dans une capsule de verre, la portion qui avoit été dissoute, elle laissa dégager, dans les premiers momens, une forte odeur d'acide nitreux, mais il me parut que cet acide y adhéroit fort peu, puisqu'à peine la liqueur fut-elle bien échauffée, qu'il ne s'en dégagait plus aucune. Je continuai l'évaporation jusqu'à la consommation presque totale de l'humidité, il me resta au plus cinq ou six gouttes de liqueur très-acide, sans odeur, que je reconnus pour de l'acide vitriolique, par la combinaison que j'en fis avec les cristaux de soude: cet acide glacial, contenu dans le flacon, se liquéfie très-facilement à une douce chaleur, & offre un spectacle assez agréable; le flacon, qui est clair & transparent, se remplit aussi-tôt de vapeurs rouges, & les vapeurs disparoissent presque entièrement lorsque cette substance a repris sa solidité. Il y a plus de deux ans que M. de Laffone a été témoin de cette expérience, & il y a au moins dix-huit mois que M. le Comte de Milly, de cette Académie, se trouvant à Versailles, je la lui répétai avec le même succès: cet acide glacial, exposé sur les charbons ardens, se dissipe en vapeurs blanches, s'échauffe & bouillonne avec l'eau, & si on le combine dans cet état de siccité avec l'alkali fixe, on en retire bien à la vérité du tartre vitriolé, mais il se trouve toujours mêlé avec un peu de nitre; je crus donc, d'après cet examen, pouvoir regarder cet acide comme un acide vitriolique glacial, uni à une portion d'acide nitreux, mais rendu ainsi glacial par le gaz ou l'air fixe qui s'étoit dégagé du charbon. Ce qui étaye ma conjecture, c'est qu'en employant séparément de l'acide nitreux très-pur, ou de l'huile de vitriol, on n'en obtient point; preuve non équivoque que le concours de l'acide nitreux est essentiel à la production de cet acide; il est donc visible que cette huile de vitriol glacial que l'on

obtient dans cette opération, ne doit être attribuée qu'à de l'acide vitriolique qui altéroit préliminairement l'acide nitreux fumant que j'avois employé, & dont il est toujours altéré de quelque manière qu'il soit préparé, à moins qu'il ne fût rectifié: cependant, pour m'assurer davantage de ce fait, je résolus de faire l'expérience suivante; je chauffai sur le charbon resté dans la cornue, & qui étoit encore un peu chaud, l'acide que j'avois obtenu, il étoit assez fumant, & paroissoit très-propre pour l'expérience que j'avois projetée; un instant après le mélange, une portion du charbon, par le contact de cet acide, s'embrasa dans la cornue; j'avoue que je fus un peu effrayé de cet embrasement si subit, & que dans l'incertitude où j'étois de voir arriver une explosion, je balançai si je devois jeter la cornue, mais la curiosité l'emporta, & ma crainte s'évanouit promptement, car peu de temps après l'ignition cessa. Je ferai observer que tout cela se passa sans mouvement, & que la chaleur fut très-peu considérable; je procédai à la distillation avec un appareil semblable à celui de la première expérience, mais il ne s'attacha point aux parois de l'alonge de cet acide glacial, parce que l'acide nitreux que j'avois employé ne contenoit plus d'acide vitriolique, & en avoit été dépouillé entièrement dans cette première distillation; le charbon resté dans la cornue me parut différer un peu du précédent, il étoit divisé par petites masses, & la portion qui avoit été en contact avec les parois de ce vaisseau, en avoit pris le luisant & le poli: il est donc constant que la production de cet acide ne dépend que de l'acide vitriolique contenu dans l'acide nitreux, & que lorsqu'il en est dépouillé il n'en fournit plus. Mais réfléchissant sur ce qui venoit de se passer dans cette expérience, je crus devoir examiner si l'acide nitreux coopéroit essentiellement à la production de cet acide, ou si avec de l'acide vitriolique seul je pourrois obtenir les mêmes résultats; je répétai pour cet effet une expérience déjà connue, indiquée dans la préface du Manuel de Chimie de M. Baumé, c'est-à-dire, je distillai de l'acide vitriolique concentré sur du charbon

en poudre ; les résultats furent les mêmes que ceux indiqués par cet habile Chimiste , mais je ne retirai point de cette expérience l'acide glacial , qui avoit été l'objet de mes recherches. Je fis cette expérience de plusieurs manières , tantôt j'employai moins de charbon , tantôt des matières phlogistiques d'une autre nature , mais je ne retirai rien qui pût répondre à mon but ; quoique cette expérience ne m'ait point réussi , elle me conduisit à en faire une autre , dans la vue de m'assurer si le charbon lui-même contribuoit essentiellement à la formation de cet acide glacial , ou si avec l'acide nitreux seul & l'acide vitriolique , je pourrois également en obtenir.

Je mis dans une cornue de verre quatre gros d'acide nitreux fumant , & autant d'huile de vitriol concentré , les vapeurs rutilantes furent aussi-tôt absorbées par l'acide vitriolique , & l'acide nitreux , qui étoit très-coloré , devint , par le mélange , clair & limpide ; la distillation ne m'offrit rien de particulier , & quoique j'eusse poussé le feu sur la fin avec assez de violence , il ne se fit aucune sublimation aux parois de l'alonge ; il me resta dans la cornue environ les trois quarts de l'acide vitriolique que j'avois employé , n'ayant souffert aucune altération ; l'acide qui étoit dans le récipient ayant été redistillé de nouveau sur du charbon en poudre , me fournit en très-bonne quantité de l'acide glacial , absolument semblable à celui que j'avois obtenu dans les expériences précédentes ; on peut se procurer de cet acide en assez grande quantité , si l'on veut procéder à la distillation dans les proportions de deux gros de charbon , d'un gros d'acide vitriolique concentré , & de trois gros d'acide nitreux fumant ; il me restoit encore pour compléter ce travail , une expérience à faire , c'étoit de m'assurer si d'autres matières inflammables que le charbon pourroient convenir également à la production de cet acide glacial ; le soufre fut la substance que j'employai , parce qu'étant composé lui-même d'acide vitriolique dans l'état de siccité , je crus qu'il pourroit favoriser cette expérience , & me conduire à quelques nouvelles découvertes.

Je mis dans une cornue de verre deux gros de fleurs de soufre avec deux onces d'acide nitreux fumant , je plaçai cette cornue sur un bain de sable que je chauffai par degrés, il s'éleva d'abord beaucoup de vapeurs rutilantes qui obscurcirent bientôt le récipient, je ménageai le feu, & je continuai la distillation fort lentement; lorsque la moitié ou environ de l'acide fut passée, je délutai le balon, je versai la liqueur qu'il contenoit dans un flacon de cristal; cet acide, de jaune qu'il étoit, avoit pris une couleur verte, & avoit entraîné avec lui quelques particules sulfureuses qui nageoient à sa surface; je continuai la distillation jusqu'à siccité, l'acide qui passa ensuite n'avoit pas acquis la même couleur verte que le premier, il étoit légèrement citrin, & paroissoit n'avoir souffert aucune altération; le soufre resté dans la cornue avoit perdu un peu de sa couleur, il étoit encore très-acide, & laissoit dégager une forte odeur d'acide sulfureux volatil: comme cette expérience avoit été faite avec de l'acide nitreux mêlé d'acide vitriolique, je résolus de la répéter de nouveau avec de l'acide nitreux très-pur, afin de m'assurer si l'acide sulfureux que le soufre avoit laissé dégager provenoit ou de l'acide vitriolique contenu dans l'acide nitreux, ou de la décomposition du soufre lui-même; mes doutes furent bientôt éclaircis, car j'obtins du résidu de cette nouvelle opération, la même odeur d'acide sulfureux volatil, comme je l'avois eu à l'expérience précédente, ce qui me prouva que l'acide nitreux agissoit sur lui, & le décomposoit en partie. Je suis parvenu, en répétant à plusieurs reprises cette opération, à décomposer presque totalement le soufre, l'acide nitreux se chargeoit à chaque cohobation d'acide sulfureux volatil, & j'ai toujours obtenu constamment de sa combinaison avec l'alkali végétal, du sel sulfureux de Stalh.

Il résulte de ces expériences, 1.^o que l'acide glacial que l'on obtient de cette opération, n'est autre chose que de l'acide vitriolique qui altéroit préliminairement l'acide nitreux; 2.^o que l'acide nitreux lui-même contribue essentiellement à la formation de cet acide glacial, puisque les deux substances,

employées séparément, ne peuvent point en fournir; 3.^o enfin, que c'est du gaz qui se dégage du charbon, & même de celui contenu dans l'acide nitreux, d'où me paroît dépendre la forme concrète que prend cet acide.

OBSERVATION SUR LE VITRIOL DE MERCURE

Par M. CORNETTE.

LES Chimistes entendent par Vitriol de Mercure, la combinaison de l'acide vitriolique avec cette substance métallique; mais pour que cette combinaison puisse se faire, elle exige l'action de l'acide vitriolique concentré & bouillant sur le mercure; pour le préparer, on met dans une cornue de verre vingt-quatre onces d'acide vitriolique concentré, sur une livre de mercure coulant; j'ai observé que cette quantité d'acide étoit trop forte, puisque je suis parvenu à faire cette opération avec vingt onces seulement; on fait chauffer par degrés ce mélange, il s'élève d'abord quelques vapeurs blanches, qui ont une forte odeur d'acide sulfureux volatil, il se passe ensuite dans la cornue un bouillonnement ou effervescence assez vive, qui continue à se faire jusqu'à l'entière dissolution du mercure: il se dégage, pendant tout le temps de cette opération, beaucoup d'acide sulfureux volatil, sous forme de gaz, dont une grande partie se dissout dans l'eau, & de laquelle j'ai retiré des cristaux de sel sulfureux de Stalh, en la saturant d'alkali fixe; enfin, il reste au fond de la cornue une masse blanche saline, que l'on appelle *Vitriol de mercure*.

Quelques Chimistes ont avancé que ce sel, exposé dans une cornue, à une chaleur très-forte, se décomposoit, que la plus grande partie du mercure se réduisoit en mercure coulant, & qu'une très-petite partie seulement se sublinoit. Quelque déférence que j'aie pour les Auteurs de cette assertion,

Présenté
en 1779.
Lu
le 14 Juin
1781.

je crois ne devoir pas être entièrement de leur avis, l'expérience m'a démontré que les choses se passoient différemment, car j'ai observé que ce sel, exposé à un feu violent, se sublimoit presque en entier, & qu'une très-petite partie seulement étoit décomposée.

J'ai mis dans une cornue de verre une demi-once de vitriol de mercure, je l'ai exposé à un feu violent & capable de faire rougir la cornue, la plus grande partie de ce sel s'est sublimée au pourtour de ce vaisseau, sans avoir souffert aucune altération, il ne s'étoit seulement élevé qu'une petite quantité de poudre grise, qui n'avoit plus besoin que du frottement pour paroître en mercure coulant, mais il n'en étoit point passé dans le récipient que j'avois adapté au col de ce vaisseau: j'ai répété quatre fois cette expérience, mais toujours avec les mêmes résultats, c'est-à-dire, que toujours la quantité de vitriol de mercure sublimé, a excédé en poids celui du mercure revivifié; d'une demi-once de ce sel métallique, j'ai obtenu constamment trois gros de matière saline sublimée, & une poudre grise, qui, comme je l'ai déjà dit, n'avoit plus besoin que du frottement pour paroître en mercure coulant; cette expérience, répétée à l'appareil pneumatochimique, a donné un peu de gaz déphlogistiqué & beaucoup d'air acide sulfureux. Je me suis assuré, par d'autres expériences que j'ai faites sur les précipités de mercure, que si l'on se sert pour faire le vitriol de mercure, des précipités que l'on obtient de la dissolution, par l'acide nitreux, avec l'alkali fixe ou volatil, il ne passe point de mercure coulant, comme à l'expérience précédente, car tout le sel qui est résulté de cette combinaison, s'est sublimé en entier; je crois cependant qu'il est des cas où cette expérience pourroit offrir quelques variétés, mais il me semble aussi que cette différence pourroit bien dépendre de la nature des vaisseaux, des quantités qu'on auroit employées, & même encore des moyens que l'on auroit pratiqués pour la conduite de cette opération.



M É M O I R E

*Sur la décomposition, par l'acide marin, de plusieurs
Sels vitrioliques & nitreux, à base métallique.*

Par M. CORNETTE.

LES Chimistes conviennent assez généralement que l'acide marin a par-dessus les autres acides, la propriété de décomposer certains Sels à base métallique; à cet égard, on a borné son action aux métaux blancs, tels que l'argent, le plomb, le mercure & le régule d'antimoine; mais je crois qu'on n'a point cherché à examiner si l'acide marin étendrait plus loin son pouvoir, & s'il seroit susceptible de produire les mêmes altérations sur les autres sels métalliques: les expériences que j'ai faites sur cette matière, m'ont mis à portée de découvrir, que presque tous les autres sels métalliques étoient soumis à la même loi, & que si ce phénomène n'a point été aperçu par *Kunckel*, ou par les autres Chimistes qui ont suivi la doctrine, c'est que ces sortes de décompositions présentent plus de difficultés, & exigent, pour y parvenir, des moyens différens de ceux qui ont d'abord été employés.

Les Chimistes varient encore beaucoup sur les propriétés de l'acide marin, les uns, considérant la difficulté que cet acide éprouve à se combiner avec le phlogistique, ont pensé qu'il n'avoit point ou presque point d'action sur lui; d'autres, ne calculant la force des acides, que d'après leur pesanteur spécifique, ont avancé, que si l'acide vitriolique avoit une action plus marquée sur les corps que les autres acides, cela ne pouvoit dépendre que de ce qu'il étoit susceptible d'une concentration plus grande: j'ai déjà démontré dans plusieurs Mémoires, que l'acide marin avoit une vraie action sur le phlogistique, & qu'employé dans le plus grand état de concen-

Lu
à l'Académie
à
l'Assemblée
publique
le 14 Avril
1779.
Relû
le 14 Juin
1780.

tration, & tel qu'il est dans la liqueur fumante de Libavius, il ne le cédoit en rien à l'acide vitriolique, même le plus concentré: j'ai aussi prouvé, que quoique l'acide marin soit le plus léger des acides minéraux, il n'est cependant pas le plus foible par son énergie, puisqu'il décompose tous les sels neutres à base d'alkali fixe & volatil; je vais de plus faire connoître que ce même acide, appliqué dans un état de concentration, a pareillement la propriété de décomposer, presque sans exception, tous les sels à base métallique.

PREMIÈRE EXPÉRIENCE.

Sur l'Or.

LES Chimistes connoissent tous le peu d'action que les acides minéraux, employés séparément, ont sur ce métal, lorsqu'il a son éclat métallique, mais on sait que lorsqu'il est dans l'état de chaux, c'est-à-dire, que lorsqu'il a été dissout & précipité par une substance alkaline quelconque, il devient dès-lors soluble indistinctement dans tous les acides; cette dissolution cependant n'est qu'apparente, car il se précipite lorsqu'il est exposé à un léger degré de chaleur: j'ai fait précipiter de l'or dissout dans l'eau régale par de l'alkali volatil, ce précipité, bien édulcoré, s'est très-bien dissout dans l'acide vitriolique affoibli, & dans l'acide nitreux très-pur; ces deux dissolutions étoient d'un jaune clair, je les ai soumises à l'évaporation, dans l'espérance d'obtenir du vitriol & du niure aurifère, mais je n'ai pas tardé à m'apercevoir, ainsi que l'a fort bien remarqué M. Lévis, que l'or n'adhéroît que très-foiblement à ces deux acides, puisqu'il s'est précipité entièrement à la première impression de la chaleur, ce qui nous feroit soupçonner, avec M. Tillet, que l'or même en chaux n'est point dissout dans les acides, mais qu'il y est plutôt dans un état de suspension: cette idée paroît conforme à la remarque qu'a faite M. Schœffer dans son Mémoire sur le Départ, imprimé dans le Recueil de l'Académie de Stockholm, *Tr. fr. p. 299*, que l'eau-forte, dans le départ,

peut

peut dissoudre une portion d'or , mais qu'il faut pour cela qu'elle soit très-concentrée, & contenue dans des vaisseaux bien bouchés, car, dit-il, aussi-tôt que l'on vient à secouer une eau-forte, qui a ainsi dissout de l'or, & lorsqu'elle prend le contact de l'air, l'or se précipite.

Le peu d'adhérence que l'or a avec les acides, ne m'ayant pas permis d'obtenir les sels que je m'étois proposé de faire, on sent bien qu'il ne m'a pas été possible de tenter, avec l'acide marin, les expériences que j'avois projetées.

DEUXIÈME EXPÉRIENCE.

Sur la Platine.

Le précipité de platine, par l'alkali fixe, présente à peu-près le même phénomène que l'or, relativement à l'acide vitriolique, la dissolution s'en fait très-bien dans cet acide, mais le métal n'y reste point, & se précipite entièrement pendant l'évaporation; il n'en est pas de même de l'acide nitreux, la platine y adhère davantage, car la chaleur n'a point altéré cette dissolution, de laquelle j'ai retiré un sel en petits cristaux rougeâtres, à peu-près comme des grains de sable.

J'ai fait diverses expériences pour tâcher de faire tenir la platine à l'acide vitriolique, afin de me procurer du vitriol de platine; le procédé qui m'a le mieux réussi, a été d'employer le précipité de platine obtenu par l'alkali minéral, ce qui m'a mis à portée de faire une expérience; dont M. Margraff nie la possibilité: ce célèbre Chimiste, dans sa Dissertation sur la Platine, deuxième volume de ses Opuscules, *Tr. fr. page 253*, dit que l'alkali minéral ne précipite point la platine dissoute dans l'eau régale; ce phénomène a lieu pourtant jusqu'à un certain point, puisqu'on est maître d'obtenir, à volonté, un précipité abondant, ou une liqueur claire & limpide. Voici en quoi consiste cette manipulation: si l'on verse sur une dissolution de platine affoiblie, de l'alkali minéral en liqueur, il ne se fera point de précipité, parce

qu'à mesure qu'il se forme il est redissout par le gaz ou air fixe qui se dégage de l'effervescence qui résulte de ce mélange, au lieu que si l'on emploie une dissolution de platine saturée & bien rapprochée, il se forme sur le champ un précipité très-abondant, & qui, faute d'eau, ne peut se redissoudre dans la liqueur; on parvient facilement à le dépouiller par le lavage des substances salines qu'il contient, pourvu, toutefois, qu'on ait eu l'attention de l'exposer quelque temps à l'air, afin de faciliter le dégagement du gaz: quoi qu'il en soit, le précipité de platine, obtenu de cette manière, est plus soluble dans les acides, & paroît y adhérer davantage que le précipité ordinaire; je suis parvenu à faire avec ce précipité un vitriol de platine, très-déliquescent à la vérité, mais suffisant cependant pour faire mon expérience.

Sur une partie de vitriol & de nitre de platine, j'ai versé trois parties d'acide marin fumant, cet acide étoit très-pur, il pesoit neuf gros vingt-quatre grains, dans une bouteille qui contenoit juste une once d'eau distillée; la dissolution de ces sels s'est très-bien faite dans cet acide bouillant, & lui a communiqué une couleur jaune, comme celle d'une dissolution d'or. La liqueur où étoit le vitriol de platine, refroidie, a donné un sel un peu déliquescent, & qui avoit l'acide marin pour base, tandis que le nitre de platine a refusé de donner des cristaux, parce qu'il s'étoit formé de l'eau régale qui est le vrai dissolvant de ce métal.

TROISIÈME EXPÉRIENCE.

Sur le Vitriol & le Nitre cuivreux.

Je ne m'arrêterai point ici à décrire les moyens dont je me suis servi pour obtenir ces sels, car il n'est aucun Chimiste qui ne sache que pour dissoudre le cuivre par l'acide vitriolique, il faut employer ce dernier concentré & bouillant; je ferai seulement observer à l'égard du nitre cuivreux, que c'est une erreur de penser que ce sel ne cristallise point: j'en conserve depuis plus de six ans en cristaux bien distincts, la plupart

sont alongés & de forme carrée, & d'autres en lames plates: ce sel attire puissamment l'humidité de l'air, & ne peut se maintenir en bon état que dans une bouteille bien bouchée; le procédé pour le faire cristalliser est simple, il consiste à prendre une dissolution de cuivre par l'acide nitreux, de la mettre dans une cornue de verre, & de distiller jusqu'à la diminution des trois-quarts ou environ de l'humidité, de laisser ensuite refroidir ce vaisseau sans le déluter; pour l'ordinaire, on obtient de cette manière, de très-beaux cristaux bleus, semblables à ceux dont je viens de parler; si au contraire on fait évaporer la dissolution de cuivre à l'air, on aura beaucoup de peine à la faire cristalliser, par la raison qu'ayant besoin d'être très-rapprochée pour fournir des cristaux, elle en attire l'humidité, & dès-lors la liqueur étant trop étendue, la cristallisation ne peut plus avoir lieu, à moins qu'on opère dans un temps où l'air soit sec & froid.

Le vitriol & le nitre cuivreux se dissolvent très-promptement & à froid dans l'acide marin; si sur deux gros de chacun de ces sels on ajoute six gros d'acide, cette quantité sera suffisante pour que la dissolution soit complète; il se passe dans l'instant assez de froid pour faire descendre le thermomètre de plusieurs degrés; pour le vitriol de cuivre il n'a été que de cinq, tandis que le nitre cuivreux l'a fait descendre de huit degrés, la température étant ce jour-là à 10 au-dessus de la glace. Si l'on fait bouillir ces dissolutions, l'acide marin prend sur le champ une couleur verte, & l'on obtient du refroidissement des liqueurs des cristaux d'un vert clair, & figurés en aiguilles absolument semblables à ceux qui résultent de la combinaison du cuivre par l'acide marin; ce sel se conserve très-bien dans les vaisseaux fermés, j'en ai même tenu pendant assez long-temps exposé à l'air sans qu'il se soit humecté sensiblement, & que les cristaux eussent perdu leur consistance: ces deux expériences prouvent donc que l'acide marin a plus de disposition à se combiner avec le cuivre que n'en ont les autres acides, quoique quelques Chimistes aient avancé le contraire, & il a encore à cet égard la supériorité

492 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
sur l'acide nitreux, qui, de quelque manière que je l'aie traité
avec le vitriol de cuivre, n'a jamais pu le décomposer.

QUATRIÈME EXPÉRIENCE.

Sur le Vitriol de Mars & le Nitre martial.

LA même expérience répétée sur le vitriol de mars, a eu le même succès, l'acide marin s'est emparé du fer, & en a chassé l'acide vitriolique; cette dissolution évaporée m'a donné de beaux cristaux cubiques, semblables à ceux que je me suis procuré de la combinaison immédiate du fer avec l'acide marin. Le plus grand nombre des Chimistes avancent que ce sel n'est point susceptible de cristallisation, mais c'est encore une erreur que l'expérience peut détruire, & je puis assurer qu'il cristallise très-bien & avec assez de facilité. Ce sel est d'une couleur verte, mais il se ternit bientôt à la surface, & se convertit en liqueur s'il est quelque temps exposé à l'air. La dissolution du fer par l'acide marin, n'a pas l'inconvénient de la dissolution du fer par les autres acides, elle a cela de particulier qu'elle se conserve en bon état & sans donner aucun dépôt.

Le nitre martial a présenté plus d'obstacle pour sa décomposition, je suis cependant porté à croire qu'elle auroit également lieu comme le vitriol de mars, s'il étoit possible de l'avoir sous forme concrète & cristalline. Je fonde mon opinion sur ce qu'en distillant la dissolution de fer, rapprochée avec l'acide marin, il s'est dégagé beaucoup d'air nitreux, & il est toujours passé dans le récipient de l'eau régale, & sur ce qu'ayant fait une fois dessécher la matière, sans cependant la décomposer, j'ai obtenu de son mélange, avec l'acide marin, un magma rempli de petits cristaux cubiques que j'ai reconnu pour du sel marin martial.

L'acide nitreux paroît également avoir plus de prise sur le fer que l'acide vitriolique, car le vitriol de mars est décomposé par cet acide; il agit sur lui avec effervescence, & la

liqueur prend sur le champ une couleur rouge. Cette dissolution évaporée ne donne plus de cristaux, mais une matière déliquescence analogue à la dissolution du fer par l'acide nitreux, car j'ai fait beaucoup de tentatives pour obtenir du nitre martial cristallisé, mais je n'ai jamais pu y parvenir.

CINQUIÈME EXPÉRIENCE.

Sur le Vitriol & le Nitre de Zinc.

TROIS gros d'acide marin dissolvent à froid un gros de vitriol de zinc, la dissolution est d'un jaune clair, soumise à l'évaporation elle ne donne plus de cristaux, mais elle se convertit en un magma comme celui qui résulte de la combinaison de l'acide marin avec ce demi-métal, car ce sel ne cristallise point. Il est visible, d'après cette expérience, que si le vitriol de zinc n'avoit souffert aucune altération par l'acide marin, ce sel auroit conservé la propriété de cristalliser; mais cette difficulté que j'ai éprouvée, & l'examen du résidu de l'évaporation, m'autorise à penser que le vitriol de zinc a été décomposé par cet acide. Je suis d'autant plus fondé à le croire, que le nitre de zinc traité de même avec l'acide marin, a donné des résultats en tout semblables à ceux de l'expérience précédente. Le nitre de zinc est déliquescence, il cristallise en longues aiguilles, & on peut le conserver pendant quelque temps si on le renferme dans une bouteille bien bouchée.

Je ferai observer que l'acide marin l'emporte encore, à cet égard, sur l'acide nitreux, car ce dernier n'a point décomposé le vitriol de zinc, & ne lui a point ôté la propriété de cristalliser.

Toutes ces expériences se trouvent opposées au sentiment de M. Pott qui a avancé dans sa Dissertation sur le Zinc, que la dissolution de ce demi-métal n'a aucune prédilection pour les acides vitrioliques & marins.

SIXIÈME EXPÉRIENCE.

Sur le Vitriol & le Nitre cobaltique.

L'ACIDE vitriolique affoibli, n'agit pas sur le régule de Cobalt, il faut qu'il soit concentré & bouillant; & même il est nécessaire que cette dissolution soit faite dans une cornue. On retire de la combinaison de cet acide, avec le cobalt, deux espèces de cristaux, (ainsi que l'a remarqué M. Baumé) dont les uns sont blancs, petits & cubiques, & d'autres plus gros & de couleur fauve.

Si l'on verse sur le vitriol cobaltique de l'acide marin, cet acide se colore aussitôt en vert, & l'intensité de cette couleur augmente par la chaleur. Ce sel se dissout très-bien dans cet acide, on retire de l'évaporation de la liqueur de petits cristaux verdâtres disposés en aiguilles, & qui attirent puissamment l'humidité de l'air. Ces cristaux sont les mêmes que ceux qui sont formés par la combinaison immédiate de l'acide marin & du régule de cobalt.

L'acide nitreux dissout le régule de cobalt avec effervescence & sans le secours de la chaleur, j'ai même été obligé d'affaiblir mon acide avec l'eau distillée pour qu'elle fût moins forte. La dissolution étoit de couleur cramoisi-sale, elle m'a donné par l'évaporation des cristaux roux & formant des prismes carrés longs, mais aucuns n'étoient disposés en aiguilles. Ce sel se dissout très-bien dans l'acide marin, & lui communique sur le champ une couleur verte. Je ferai remarquer que dans toutes les dissolutions de cobalt, faites par l'un ou l'autre acide, l'acide marin prend toujours cette couleur; on peut la faire disparaître & reparoître à volonté: si l'on fait chauffer le mélange, la couleur disparaît, & si l'on ajoute un peu d'acide marin elle reparoît sur le champ. Comme le régule de cobalt est soluble également dans l'eau régale que dans l'acide nitreux, on sent bien qu'on a plus de peine à obtenir des cristaux de sel marin cobaltique.

Cependant ayant fait bouillir le nitre cobaltique avec l'acide marin, & ayant fait rapprocher la liqueur, j'ai vu avec plaisir qu'une portion du nitre cobaltique avoit été décomposée, car j'ai reconnu les mêmes cristaux que ceux qui me servoient d'objet de comparaison, c'est-à-dire que ceux que j'avois obtenus de la dissolution du régule de cobalt par l'acide marin.

J'ai fait aussi une nombreuse suite d'expériences sur l'étain & le bismuth. La difficulté que l'on éprouve à dissoudre l'étain par les acides vitrioliques & nitreux, & l'impossibilité de former des sels d'étain avec ces deux acides, ne m'ont pas permis d'essayer l'acide marin. Je pense cependant qu'ils auroient été décomposés comme les autres par cet acide, si l'on considère que l'acide marin est le seul vrai dissolvant de l'étain, & celui qui fournit, avec ce métal, un sel cristallisable.

Le bismuth ne se dissout point dans l'acide vitriolique, quelque concentré qu'il soit, il le calcine si on l'expose à une chaleur violente, & la masse qui reste dans la cornue n'est point ou presque point soluble dans l'eau. On parvient cependant à en faire une combinaison plus intime lorsqu'on l'emploie très-divisé, & tel qu'il a été précipité de sa dissolution dans l'acide nitreux par l'alkali fixe, je pris une certaine quantité de bismuth ainsi précipité & non lavé, que je versai sur de l'esprit de vitriol bouillant, il se fit une effervescence, mais qui ne fut occasionnée que par une portion d'alkali qui étoit restée avec la poudre. La chaux de bismuth fut par ce moyen totalement dissoute, & la liqueur en refroidissant laissa déposer des cristaux que je nommerai *vitriol de bismuth*.

J'ai fait bouillir de l'acide marin sur du vitriol, & du nitre de bismuth, mais quelque tentative que j'aie pu faire, je n'ai pu parvenir à le décomposer; le nitre de bismuth s'est bien dissout à froid dans l'acide marin, il a formé une dissolution claire qui a eu de la peine ensuite à cristalliser. Mais

ayant rapproché un peu la liqueur , une grande partie de l'acide marin s'est dissipé , & j'ai retiré des cristaux de nitre de bismuth , comme ceux que j'avois eu auparavant. Cette expérience paroît confirmer l'opinion de M. Monet , lorsqu'il avance, dans son Traité sur la Dissolution des métaux , que le bismuth est indifférent aux acides , qu'il ne marque pas plus de prédilection pour l'un que pour l'autre , & que s'il y avoit un acide qu'il dût préférer, ce seroit l'acide du nitre , comme étant celui qui le dissout le mieux.

Il résulte de ces expériences , que l'acide marin conserve sur les sels à base métallique , la même propriété que sur ceux à base d'alkali fixe & volatil , & qu'à tous égards, il doit avoir la prééminence sur les autres acides , puisqu'il agit avec plus d'énergie qu'eux sur tous les sels.



OBSERVATION

OBSERVATION
SUR LES DIFFÉRENS SELS
Que l'on retire par la lixiviation des cendres du Tamaris,
pris & coupé en différens lieux.

Par M. CORNETTE.

C'ÉTOIT autrefois un axiome en Chimie, que toutes les Plantes incinérées fournissent de l'alkali fixe par leurs lixiviations dans l'eau. Ce sentiment a été long-temps adopté par les modernes, lorsqu'enfin M. Montet, de la Société Royale des Sciences de Montpellier, découvrit que cette loi n'étoit pas générale, & que plusieurs Plantes faisoient exception à cette règle. Ce fut le tamaris qui lui fit faire cette remarque; il prouva par des expériences bien faites, que cette plante brûlée, au-lieu de donner, par l'incinération, de l'alkali fixe, comme on avoit toujours cru jusqu'alors, ne fournissoit au contraire que du sel de Glauber, ainsi qu'on peut s'en assurer par la lecture du Mémoire de ce Chimiste, inséré parmi ceux de l'Académie, pour l'année 1757.

Présenté
 en 1779.
 Lu
 le 14 Avril
 1780.

Favorisé par la circonstance, je crus devoir profiter de mon séjour à Montpellier, pour répéter les expériences de M. Montet; ce n'étoit point que je doutasse de leur réalité, puisque d'autres Chimistes que moi les avoient faites; mais soit qu'ils n'aient pu préparer eux-mêmes leurs cendres, soit qu'ils n'aient pu varier leurs expériences sur différens tamaris, il paroît qu'ils se sont bornés à suivre en tout point l'observation de M. Montet, en avançant, comme lui, que les cendres de cette plante lessivée, ne sont point alkales, & qu'elles ne donnent que du sel de Glauber, sans s'étendre davantage sur la nature des différens sels que l'on en retire.

Mon principal but, en entreprenant ce travail, n'a donc pas tant été de m'assurer si cette plante incinérée fourniroit

Mém. 1779.

Rrr

par la lixiviation de l'alkali , que d'examiner si le sel de Glauber étoit le seul & unique sel contenu dans ces cendres , & de déterminer si cette plante prise à des distances éloignées de la mer , donneroit toujours le même sel , ou si elle n'offriroit pas des variétés dépendantes du sol où elle auroit été cultivée.

Sur la fin du mois d'Août 1778 , je fis couper en différens endroits une assez bonne quantité de tamaris , une partie avoit été prise dans les environs d'Aiguemortes & de Maguelonne , pays situé sur les bords de la mer ; l'autre partie avoit été cueillie à quelque distance d'un village appelé *Grabelz* , éloigné à trois lieues au moins de la mer. Je fis brûler avec soin , & séparément ces plantes que j'avois fait dessécher auparavant , & lorsqu'elles furent totalement converties en cendres , je fis sur chacune les expériences suivantes :

Je soumis à l'ébullition , dans une suffisante quantité d'eau distillée bouillante , ces cendres ainsi préparées , je les lessivai à plusieurs reprises , afin d'extraire tout le sel qu'elles contenoient. Les liqueurs filtrées passèrent claires & limpides , elles avoient toutes une saveur salée amère , mais elles n'avoient rien de caustique , car elles ne laissoient sur la langue aucune impression d'alkalicité : soumises à l'évaporation , je retirai de celles d'Aiguemortes & de Maguelonne , plusieurs espèces de sels ; 1.^o beaucoup de sélénite ; 2.^o une bonne quantité de sel de Glauber ; 3.^o du sel marin ; 4.^o enfin , du sel marin à base terreuse. Cependant ayant eu occasion depuis peu de répéter cette expérience sur des cendres de tamaris qui avoit été coupé aux environs de Maguelonne , j'ai retiré de celles-ci , outre les sels dont je viens de parler , une petite quantité de tartre vitriolé , ce que je n'avois point aperçu dans ma première expérience. Cette différence pourroit peut-être bien provenir aussi de l'âge ou de la saison dans laquelle on aura cueilli cette plante , car Boulduc a assez bien fait connoître que la bourache qui ne donne que du tartre vitriolé , prise dans un âge tendre , fournit du nitre dans un âge plus avancé.

La lessive des cendres de *Grabelz*, évaporée, me donna également beaucoup de sélénite; mais autant les autres cendres m'avoient donné de sel de Glauber, autant celles-ci me fournirent de tartre vitriolé, de sorte que je retirai presque tout de ce dernier sel, à l'exception cependant d'une bien petite quantité de sel de Glauber, qui cristallisa sur la fin, & qui se trouvoit mêlé de sel marin, & de sel marin à base terreuse. On peut déduire, ce me semble, de cette expérience, que le sel de Glauber n'est point un sel particulier au tamaris, & même je crois pouvoir être en droit d'avancer que si cette plante étoit ramassée à des distances très-éloignées de la mer, elle ne donneroit plus aucun indice de ce sel; c'est ce que je vais faire connoître par l'expérience suivante.

Aussi-tôt mon arrivée à Paris, je cherchai à me procurer du tamaris; M. Chalard, Apothicaire de M. le Duc d'Orléans, & amateur zélé de la Chimie, voulut bien seconder mes vues, & me fit remettre la quantité de tamaris qu'il me falloit pour faire mon expérience. Cette plante avoit été cueillie sous ses yeux au jardin des Apothicaires; je la brûlai avec soin, & après avoir fait calciner la cendre pendant quelque temps, je la lessivai dans l'eau distillée bouillante. La liqueur filtrée soumise à l'évaporation, me donna comme aux autres expériences beaucoup de sélénite, mais je ne retirai plus de celle qui me restoit que du tartre vitriolé, & sans aucun indice de sel de Glauber; ce qui prouve, comme je l'ai déjà remarqué, que les sels des plantes peuvent varier beaucoup, selon le terrain où elles auront été cultivées*.

Les expériences que je viens d'exposer sur les cendres de tamaris, m'autorisent à penser, que M. Montet, & après

* Quoique cette expérience soit, pour le fond, différente de celle de M.^{rs} du Hamel & Cadet, sur l'alkali végétal que fournit le kali ou varech, lorsqu'il est cultivé dans des endroits éloignés de la mer, néanmoins j'ai cru devoir en faire mention, afin de rendre à ces habiles Chimistes ce qui

leur appartient, me réservant d'entrer sur cet objet dans un plus long détail, dans un Mémoire que je lirai dans son temps à l'Académie, sur cette question, *Si les sels neutres des plantes entrent dans la végétation sans se décomposer?*

lui le Chevalier du Coudray, ont été induits en erreur, lorsqu'ils ont avancé que ces cendres qui de tout temps ont été employées avec succès en Languedoc & en Provence pour le lavage des eaux mères du salpêtre, ne contribuoient en rien à la régénération de ce sel; ils pensoient qu'elles ne produisoient d'autre avantage que celui de dégraisser les eaux mères, & à faciliter l'extraction du nitre qu'ils prétendoient exister tout formé dans ces eaux. Plusieurs Chimistes avoient déjà adopté cette opinion, mais il me semble qu'ils n'ont été trompés que parce qu'ils n'ont pas bien connu les différens sels que l'on en retire, & les effets qu'ils sont capables de produire. En effet, de ce que l'on n'obtient point par la lixiviation des cendres du tamaris aucun indice d'alkalicité, doit-on en conclure qu'elles ne contribuent point à la régénération du salpêtre? c'est ce que l'expérience ne confirme point.

Je pris deux onces de cendres de *Grabelz*, sur lesquelles je versai une demi-once d'eau-mère du nitre, je délayai ce mélange avec suffisante quantité d'eau tiède, & après quelque temps de digestion, je filtrai la liqueur, soumise à l'évaporation dans une capsule de verre, jusqu'à la diminution des trois quarts ou environ; elle me donna par le refroidissement de beaux cristaux de nitre prismatique. On m'objectera peut-être que l'eau-mère que j'avois employée, provenant des travaux des salpêtriers, contenoit encore du nitre, & que cette expérience n'est point suffisante pour établir mon assertion. Pour détruire cette objection, j'ai fait l'expérience suivante.

Je fis artificiellement du nitre à base terreuse, c'est-à-dire, je saturai une quantité donnée d'acide nitreux, avec de la craie en poudre; je mêlai de cette liqueur, ainsi préparée & filtrée, avec la même quantité de cendres de tamaris de *Grabelz*, & j'obtins, comme à l'expérience précédente, une bonne quantité de nitre prismatique.

J'ai répété la même expérience avec les cendres de tamaris coupé aux environs d'Aiguemortes & de Maguelonne,

le succès n'a pas été le même, car je n'ai pu retirer de ces mélanges aucun indice de nitre prismatique.

Il résulte des expériences que je viens de rapporter, qu'il n'est point indifférent de se servir, pour le lavage des eaux-mères du salpêtre, des cendres de tamaris, de l'une ou de l'autre espèce; il est aisé de sentir, pour les raisons que nous avons déjà données précédemment, que celles qui contiennent du tartre vitriolé, sont infiniment plus avantageuses, & qu'elles produisent, à l'égard des eaux-mères, le même effet que si elles étoient alcalines. En 1775, j'avois déjà avancé dans un Mémoire qui a concouru au Prix que l'Académie a proposé sur le salpêtre, & que j'ai publié depuis, que c'étoit relativement aux doubles décompositions qui se passent pendant la lixiviation & l'ébullition des eaux salpêtrées, que l'on ne trouvoit jamais dans les eaux-mères ce sel, ni tartre vitriolé, ni sel de Glauber; la circonstance exigeoit que je ne m'étendisse pas davantage sur cet objet, mais ce que j'en ai dit étoit bien suffisant; ce me semble, pour prouver que je connoissois déjà l'action des doubles affinités, & la décomposition que le nitre à base terreuse & le sel marin à base terreuse, exerce sur le tartre vitriolé & le sel de Glauber. J'avois annoncé en 1774; un Mémoire plus étendu sur cette matière que j'ai relû, il y a quelque temps, à l'Académie, & dans lequel j'ai démontré que non-seulement le sel marin à base terreuse décompose le tartre vitriolé, mais qu'il a aussi la faculté de décomposer le nitre lui-même, circonstance qui explique pourquoi on retire toujours du sel marin jusqu'au dernier moment de l'évaporation de la liqueur qui tient le salpêtre en dissolution.



D E S C R I P T I O N
D'UN ASTÉROMÈTRE
OU INSTRUMENT

Destiné à trouver graphiquement l'heure du lever & du coucher d'un Astre, dont on connoît la déclinaison & l'instant du passage par le Méridien.

Par M. J E A U R A T.

Là
à l'Académie
le 17 Fév.
1776.

LA nécessité de faire promptement les Calculs astronomiques de l'état du ciel, nommés *Connoissance des Temps* ou *Connoissance des mouvemens célestes*, m'a fait naître l'idée d'abrégér la durée des calculs, & sur-tout de ceux qui n'exigent pas une grande précision; or, la détermination de l'heure du lever & du coucher des Astres est presque toujours dans ce cas, & alors l'Astéroètre que je propose, suffit pour cet effet; & quand il est orienté par rapport à l'heure du passage au Méridien, & par rapport à la déclinaison de l'Astre, il présente à la fois & à vue les instans du lever & du coucher demandés, sans avoir besoin d'additionner & de soustraire l'arc semi-diurne de l'heure du passage de l'Astre par le Méridien; l'occasion que j'ai eu de m'entretenir de ce nouvel instrument, avec M. le Marquis de Courtanvaux, à Montmirail, m'a procuré l'agréable surprise de recevoir de cet Honoraire de l'Académie Royale des Sciences, l'instrument construit de sa propre main, & l'inspection de la figure suffit presque pour indiquer la construction de mon Astéroètre, ainsi je vais me borner à l'explication succincte que voici.

L'Astéroètre consiste en trois pièces, qui toutes trois peuvent être de carton, ou de bois, ou de cuivre, selon le plus ou le moins de solidité qu'on veut lui donner, mais

étant construit partie en bois & partie en cuivre, il a toute l'exactitude qu'on peut désirer.

La première pièce *Aadd*, est rectangulaire & parallélogramique; elle contient deux rainures parallèles *EF, HG*, destinées à recevoir une coulisse *IKLM*, que je nomme seconde pièce; de plus, cette première pièce a un enfoncement circulaire *MNOP*, destiné à servir d'emplacement à la troisième & dernière pièce.

Selon feu M. le Marquis de Courtanvaux, les deux premières pièces doivent être d'un vieux bois entièrement à l'abri du déversement; quant à la troisième & dernière pièce dont il va être parlé, il paroît indispensable qu'elle soit en cuivre si on veut qu'elle soit bonne & durable.

La troisième & dernière pièce *MNOP* est un plateau circulaire & mobile sur son centre *C*, qui se place dans l'enfoncement *MNOP* qui a été, comme on l'a dit, pratiqué dans la première pièce *Aadd*, ce plateau circulaire & mobile sur son centre a sa superficie supérieure, d'arrasement au niveau *EFG.h*, sur lequel glisse à volonté la coulisse ou seconde pièce *IKLM*; de plus la circonférence du cercle tracé sur la superficie de la troisième pièce mobile *MNOP* est divisée en vingt-quatre parties égales, qui représentent les vingt-quatre heures de la journée, & chacune des heures est sous-divisée en minutes ou de deux en deux ou de cinq en cinq minutes, selon qu'on le juge à propos; ces divisions sont naturellement les arcs semi-diurnes des Astres.

Au point *N*, milieu de *FG* sur la première pièce *Aadd*, est un index fixe qui sert à orienter convenablement le cercle mobile *MNOP*, c'est-à-dire, qu'on doit faire cadrer l'heure du cercle mobile qui répond au passage donné de l'Astre par le méridien avec l'index fixe *N*.

D'une autre part, on marque sur les plates-bandes supérieures *Aa, Hd* de la première pièce, la gradation des déclinaisons qui servent à placer la coulisse, eu égard à la déclinaison donnée de l'Astre.

Ayant donc orienté le cercle mobile, ou la troisième pièce

PMNO, de manière que l'heure du passage de l'Astre réponde à l'index fixe *N*, & ayant fait glisser la seconde pièce *IKLM* dans les coulisses *EF*, *hG*, de manière à ce que les extrémités *K* & *L* du biseau *KL*, répondent à droite & à gauche aux divisions de la déclinaison donnée. Alors le biseau *KL* traverse les divisions des heures marquées sur la troisième pièce précisément en *M* à l'heure du lever, & en *O* à l'heure du coucher demandé. D'où l'on voit que la manière de mouvoir cet instrument se réduit à orienter le cercle mobile, par rapport à l'heure du passage de l'Astre par le méridien, & la seconde pièce *IKLM*, par rapport à la déclinaison donnée de ce même Astre.

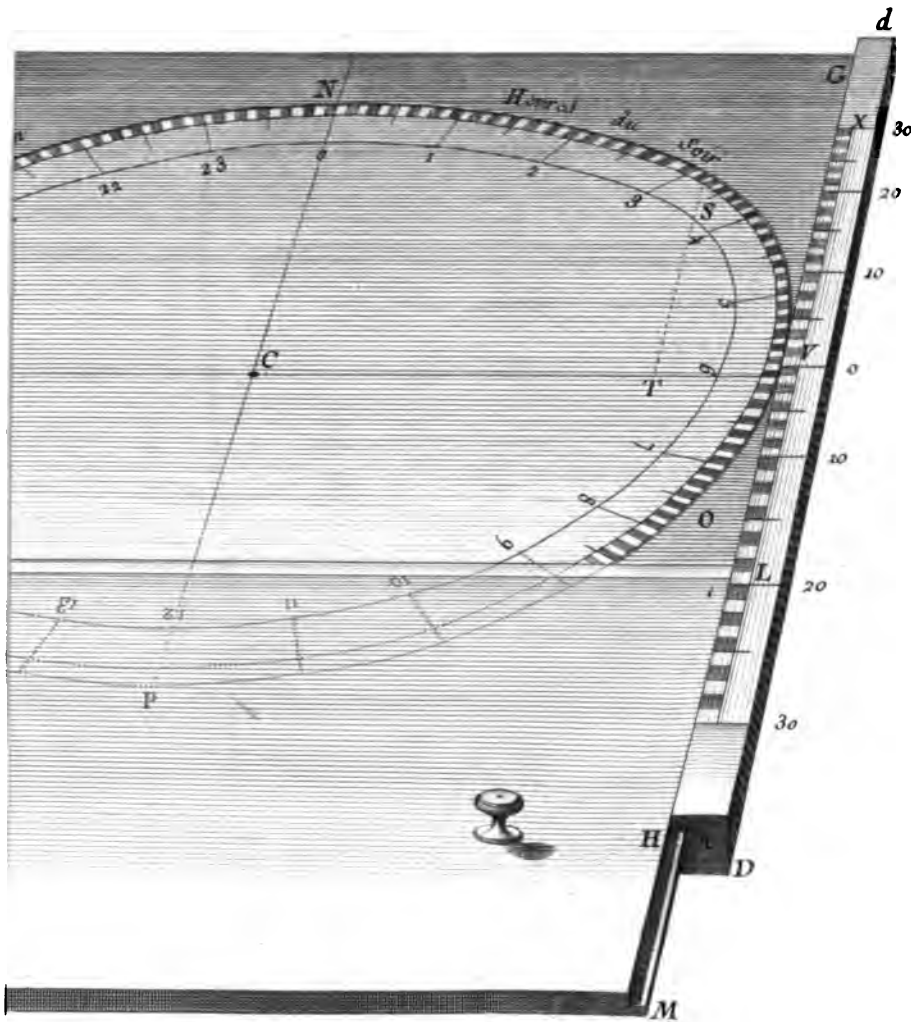
Pour ce qui concerne la manière de graduer l'échelle des déclinaisons, tant australes que boréales, le mécanisme en est tout simple, & la table des arcs semi-diurnes qu'on suppose toute calculée, présente naturellement le tableau de la graduation demandée (*Connaissance des Temps, année 1782, p. 306*). Par exemple, supposons qu'à 30 degrés de déclinaison australe, on ait sous la latitude de Paris un arc semi-diurne *NS* de 3^h 20', ou de 50 degrés, dont le complément *SV* est de 40 degrés; alors on marquera 30 degrés de déclinaison australe en faisant *VX* égale au sinus de 40 degrés du cercle; donc *cN*, ou *cP* est le rayon, & c'est ainsi qu'on graduera l'échelle des déclinaisons, requise sur ledit instrument.



DÉTERMINATION

ASTÉREOMETRE

Calculer le Lever et le Coucher des Astres
l'inclinaison et l'heure du passage au Méridien.



DÉTERMINATION

*De la position de soixante-quatre Étoiles des Pléiades,
& Observation de l'Opposition de Jupiter,
du 12 Mars 1779.*

Par M. JEAURAT.

LES Étoiles du cou du Taureau, qui forment un amas qu'on nomme *constellation des Pléiades*, sont pour la plupart si petites, qu'on n'en peut distinguer que neuf avec la foible lunette du quart-de-cercle mural que j'ai chez moi; encore les six plus fortes, savoir Électra, Taïgeta, Maïa, Alcione, Atlas & Pleïone, ne sont-elles que de la troisième & même de la quatrième grandeur : aussi n'a-t-on, d'ancienne date, la position exacte & précise que de huit de ces Étoiles; on réduit même communément la constellation entière à six Étoiles principales, parmi lesquelles on distingue Alcione, qu'on regarde comme la principale de toutes, & à laquelle on rapporte ordinairement toutes les autres.

Là
à la rentrée
du 17 Avril
1779.

Dans ce Mémoire, je détermine, avec la précision la plus scrupuleuse, les neuf Étoiles des Pléiades que j'ai pu voir avec la lunette de mon instrument mural : & de ces neuf positions dépendent celles de cinquante-cinq autres Étoiles, pour lesquelles j'ai été forcé d'avoir recours à un télescope de trente-deux pouces de foyer. Ainsi, moyennant ce bon télescope, j'ai pu augmenter mon catalogue des Étoiles des Pléiades, jusqu'à la concurrence de soixante-quatre Étoiles déterminées pour le 1.^{er} Janvier 1779 : & ce que je puis dire en faveur de la peine que j'ai prise à cet égard, c'est que ce sera au plus si on peut reprocher une minute d'erreur à la position des plus petites Étoiles que je n'ai pu comparer exactement avec les plus belles & les plus remarquables.

Mém. 1779.

SS

Le quart-de-cercle mural où ont été faites mes principales observations, est celui que feu M. de la Hire a placé en 1682 à l'Observatoire dans le plan du méridien : il fut aidé alors des soins de M. Picard, qui mourut l'année suivante ; & ce fut M. de la Hire qui prit lui-même les hauteurs correspondantes, nécessaires pour bien placer cet instrument dans le plan du Méridien.

C'est à ce mural de M. de la Hire que j'ai comparé, comme on le verra par mes observations qui suivent, neuf Étoiles des Pléiades avec deux autres du Taureau : & mes comparaisons, faites constamment & un grand nombre de fois avec un bon instrument, ont d'ailleurs été heureusement confirmées par des hauteurs absolues, par des hauteurs correspondantes, & par l'observation des différences d'ascensions droites observées & prises en particulier par M. Cassini fils, le 3 Janvier 1779. Ces observations décisives de M. Cassini seront publiées dans l'*Histoire céleste*, à laquelle il travaille avec tant d'activité, d'assiduité & de capacité : & les miennes vont être détaillées ici, avec les conséquences que j'en déduirai.

Pour juger du changement de position qui pourroit être arrivé dans quelques-unes des Étoiles des Pléiades, ainsi que du mouvement propre des Étoiles fixes en longitude, on pourra comparer mon catalogue & ma carte avec le catalogue & la carte des Pléiades, publiés par M. le Monnier, pages 34 & 35 de son catalogue des Étoiles zodiacales, réduites à l'année 1755.

Remontant plus haut, on pourra recourir à la carte des Pléiades, dressée par le premier des Cassini ; cette carte, publiée dans les Mémoires de l'Académie, année 1708, page 302, a été dressée pour l'époque du 10 Août 1708, époque où la Lune éclipsa plusieurs des Étoiles des Pléiades. Quant aux anciennes positions fixées dans ce Mémoire de M. Cassini, page 299, elles sont pour l'année 1697, ainsi il y a un intervalle d'environ quatre-vingt-deux ans entre l'époque des longitudes de M. Cassini & la mienne du 1.^{er} Janvier 1779.

Rétrogradant encore & remontant au célèbre Képler. Ce fameux Astronome a donné quatre Cartes célestes particulières, gravées en manière noire, dont une est la carte des Étoiles des Pléiades; ces cartes sont à la suite de son Traité d'Optique, imprimé à Londres en 1653; ce livre que j'ai est rare, mais on le trouve dans beaucoup de Bibliothèques choisies. On voit par la carte des Pléiades, que Képler comptoit dans cette constellation six Étoiles principales, & vingt-six autres beaucoup plus petites; le tout formant un ensemble général, qui, autant qu'on peut juger à vue, ne diffère pas sensiblement de celui qui existe actuellement; mais cette carte est trop petite, pour qu'on puisse juger exactement d'un petit déplacement ou d'un mouvement qui seroit lent.

En récapitulant les connoissances successivement acquises, quant à la constellation des Pléiades, on voit que les comparaisons les plus certaines sont celles de mes longitudes avec celles qui précédemment ont été déterminées avec précision: or, huit de celles de M. Cassini pour 1697, & trois de M. l'Abbé de la Caille pour 1750, sont dans ce cas; mais j'ai du doute sur l'époque de M. Cassini, & je n'en ai point pour celle de M. de la Caille. L'époque de M. Cassini est-elle le commencement, le milieu ou la fin de l'année 1697? car dans ce doute, l'intervalle des temps entre l'époque des longitudes de M. Cassini & les miennes, est de quatre-vingt-un ou de quatre-vingt-un & demi, ou de quatre-vingt-deux années; au lieu que l'intervalle entre l'époque de M. de la Caille & la mienne est décidément & certainement de vingt-neuf années.

Ainsi, selon la comparaison faite des longitudes de M. l'Abbé de la Caille avec les miennes, & pour une révolution certaine de vingt-neuf années, j'ai trouvé que:

Le mouvement en longitude pour les Étoiles

fixes, est de + 24' 25"

Tandis qu'on fait depuis long-temps ce mouve-

ment pour vingt-neuf années, de + 24. 20. 14

SS ij

D'autre part, la comparaison des longitudes de M. Cassini avec les miennes, dans le cas où l'intervalle des temps seroit

| | | |
|---|--------------|-----|
| De quatre-vingt-un ans | donnera pour | |
| vingt-neuf années | + 24' | 23" |
| De quatre-vingt-un ans & demi | donnera pour | |
| vingt-neuf années | + 24. | 14. |
| De quatre-vingt-deux ans | donnera pour | |
| vingt-neuf années | + 24. | 5. |

On peut donc conclure de ces résultats, que le mouvement des Étoiles fixes en longitude, adopté depuis long-temps, ne peut différer du vrai de plus de dix secondes de degrés, en trente ans : ce qui est une précision aussi grande qu'on puisse l'espérer quant à présent, puisque quinze secondes de degrés ne répondent qu'à une seconde de temps, & si je faisois une conjecture à cet égard, c'est que ce mouvement est plus grand qu'on ne le croit, d'environ cinq secondes en trente ans.

Dans les comparaisons que j'ai faites, j'ai rejeté comme on le verra, celles que m'auroient données *Pleione*, parce qu'il y a, pour cette Étoile, ou une erreur, ou un mouvement particulier : & dans le cas où le mouvement particulier que je soupçonne auroit lieu, il se feroit, circulairement, à ce que je présume, d'orient en occident, autour de la principale Étoile nommée *Alcione*, & d'environ un degré dans l'espace à peu-près de cent ans ; c'est-à-dire, que ce mouvement autour d'*Alcione*, approche de celui des Étoiles fixes, mais qu'il se fait dans un sens contraire.

Quant à l'opposition de Jupiter, du 12 Mars 1779, dont mes observations terminent ce Mémoire, le temps a été des plus favorables : Jupiter & β de la Vierge qui étoient fort près l'une de l'autre, ont été comparées ensemble au méridien quatorze jours de suite, & entr'autres le 12 Mars, environ sept minutes avant l'instant même de l'opposition. Mes observations sont donc complètes, & toutes confirmées les unes par les autres. De plus β de la Vierge a été direc-

tement comparée avec le Soleil, le 28 Mars, jour où l'Étoile étoit seulement moins haute que le centre du Soleil de $2' 13'' ,5$. Enfin, de mes calculs il résulte que les tables qui, cette fois-ci, ont le plus approché de l'observation, sont celles de M. Cassini, & que celles qui s'en sont le plus éloignées, sont celles de M. Halley; d'ailleurs celles de M. Wargentin, & les miennes, n'ont différé entr'elles que de 27 secondes, quoique très-différentes quant à la forme & quant au fond; nos erreurs en longitude, sont :

| | |
|---|---|
| Pour les tables de M. Cassini, de $- 1' 3''$, l'anomalie moyenne étant de..... | 11 ^f 9 ^d 46' 35". |
| Pour mes tables, de..... + 4. 5, l'anomalie moyenne étant de..... | 11. 9. 59. 56. |
| Pour les tables de M. Wargentin, <i>Astronomie de</i> <i>M. de la Lande</i> , de..... + 4. 32, l'anomalie moyenne étant de..... | 11. 9. 40. 26. |
| Pour les tables de M. Halley, de + 7. 4, l'anomalie moyenne étant de..... | 11. 9. 26. 32. |

Car l'opposition de Jupiter avec le Soleil est arrivée le 12 Mars 1779,

à 12^h 9' 28" temps vrai... } du méridien de l'Observ. royal de Paris.
à 12. 19. 20. temps moyen }

La longitude géocentrique de Jupiter étant alors de
15^f 22^d 18' 26".

Voici présentement les observations mêmes, telles qu'elles ont été faites, ainsi que les calculs qu'elles ont procurés, & dont il a été déduit les résultats qui viennent d'être cités.

*OBSERVATIONS des neuf plus belles Étoiles des
Pléiades, comparées au Méridien avec deux Étoiles
du Bélier, & à l'Observatoire avec le quart-de-cercle
mural de M. de la Hire.*

30 Novembre 1778.

| N O M S des ÉTOILES. | T E M P S des passages à la PENDULE. | | | T E M P S vrai des passages au SOLEIL. | | | H A U T E U R S de L'INSTRUMENT. | | |
|----------------------------|--|-----|------------------|---|-----|------------------|--|-----|-----|
| | H. | M. | S. | H. | M. | S. | D. | M. | S. |
| Petite Étoile. | 8. | 57. | 27 | 9. | 17. | 6 $\frac{1}{2}$ | 63. | 47. | 0. |
| α du Bélier.. | 9. | 6. | 32 | 9. | 26. | 11 $\frac{1}{8}$ | 63. | 39. | 40. |
| Celeno | 10. | 43. | 11 | 11. | 2. | 50 $\frac{1}{2}$ | 64. | 48. | 50. |
| Électra..... | 10. | 43. | 16 | 11. | 2. | 55 $\frac{1}{2}$ | 64. | 39. | 30. |
| N..... | 10. | 43. | 31 | 11. | 3. | 10 $\frac{1}{2}$ | 65. | 21. | 20. |
| Taïgeta..... | 10. | 43. | 35 | 11. | 3. | 14 $\frac{1}{2}$ | 65. | 0. | 42. |
| Maïa..... | 10. | 44. | 11 $\frac{1}{2}$ | 11. | 3. | 51 | 64. | 55. | 13. |
| Mérope..... | 10. | 44. | 44 | 11. | 4. | 23 $\frac{1}{2}$ | 64. | 25. | 0. |
| Alcïone..... | 10. | 45. | 52 $\frac{1}{2}$ | 11. | 5. | 32 | 64. | 39. | 52. |
| Atlas..... | 10. | 47. | 32 $\frac{1}{2}$ | 11. | 7. | 12 | 64. | 37. | 17. |
| Pleïone..... | 10. | 47. | 33 $\frac{1}{2}$ | 11. | 7. | 13 | 64. | 42. | 0. |

DES SCIENCES.

511

*Suite des Observations faites au Quart-de-cercle mural
de M. de la Hire, dont la division de l'Instrument
hausse les Hauteurs de 5' 22".*

4 Décembre 1778.

| N O M S des ÉTOILES. | T E M P S des passages à la PENDULE. | T E M P S vrai des passages au SOLEIL. | H A U T E U R S apparentes " & non corrigées de la R É F R A C T I O N . |
|----------------------------|--|---|--|
| | H. M. S. | H. M. S. | D. M. S. |
| Petite Étoile. | 8. 41. 54 | 8. 59. 48 | 63. 41. 38. |
| α du Bélier.. | 8. 50. 59 | 9. 8. 53 | 63. 34. 18. |
| Celeno..... | 10. 27. 38 | 10. 45. 32 | 64. 43. 28. |
| Electra..... | 10. 27. 43 | 10. 45. 37 | 64. 34. 8. |
| N..... | 10. 27. 58 | 10. 45. 52 | 65. 15. 58. |
| Taïgeta..... | 10. 28. 2 | 10. 45. 56 | 64. 55. 20. |
| Maïa..... | 10. 28. 38 $\frac{1}{2}$ | 10. 46. 33 | 64. 49. 51. |
| Mérope.... | 10. 29. 11 | 10. 47. 5 | 64. 19. 38. |
| Alcïone.... | 10. 30. 19 $\frac{1}{2}$ | 10. 48. 14 | 64. 34. 30. |
| Atlas..... | 10. 31. 59 $\frac{1}{2}$ | 10. 49. 54 | 64. 31. 55. |
| Pléïone..... | 10. 32. 0 $\frac{1}{2}$ | 10. 49. 55 | 64. 36. 38. |

512 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
*Suite des Observations faites au Quart-de-cercle mural
de M. de la Hire.*

9 Décembre 1778.

| N O M S des ÉTOILES. | T E M P S des passages à la PENDULE. | T E M P S vrai des passages au S O L E I L. | HAUTEURS VRAIES corrigées de la RÉFRACTION, suivant celle de M. Cassini. |
|----------------------------|--|--|--|
| | H. M. S. | H. M. S. | D. M. S. |
| Petite Étoile. | 8. 22. 31 $\frac{1}{2}$ | 8. 37. 57 $\frac{1}{2}$ | 63. 41. 9. |
| α du Bélier.. | 8. 31. 36 $\frac{1}{2}$ | 8. 47. 2 $\frac{1}{2}$ | 63. 33. 49. |
| Celēno..... | 10. 8. 15 $\frac{1}{2}$ | 10. 23. 41 $\frac{1}{2}$ | 64. 43. 1. |
| Electra..... | 10. 8. 20 $\frac{1}{2}$ | 10. 23. 46 $\frac{1}{2}$ | 64. 33. 41. |
| N..... | 10. 8. 35 $\frac{1}{2}$ | 10. 24. 1 $\frac{1}{2}$ | 65. 15. 31. |
| Taigeta..... | 10. 8. 39 $\frac{1}{2}$ | 10. 24. 5 $\frac{1}{2}$ | 64. 54. 53. |
| Maia..... | 10. 9. 16 | 10. 24. 42 | 64. 49. 25. |
| Mérope.... | 10. 9. 48 $\frac{1}{2}$ | 10. 25. 14 $\frac{1}{2}$ | 64. 19. 18. |
| Alcīone.... | 10. 10. 57 | 10. 26. 23 | 64. 34. 4. |
| Atlas..... | 10. 12. 37 | 10. 28. 3 | 64. 41. 29. |
| Pleīone.... | 10. 12. 38 | 10. 28. 4 | 64. 36. 12. |

Suite

Suite des Observations faites au Mural de M. de la Hire.

On a supposé la hauteur de l'Équateur de $41^{\text{d}} 9' 46''$.

| 3 Janvier 1779. | | | |
|----------------------------------|--|--|-----------------------------|
| N O M S des É T O I L E S. | T E M P S des passages à la PENDULE. | T E M P S vrai des PASSAGES, &c. | DÉCLINAISONS APPARENTES. |
| | H. M. S. | H. M. S. | D. M. S. |
| Petite Étoile. | 6. 45. 31 | 6. 47. 34 | 22. 31. 23. B. |
| α du Bélier. | 6. 54. 36 | 6. 56. 39 | 22. 24. 3. |
| Celena..... | 8. 31. 15 | 8. 33. 18 | 23. 33. 15. |
| Electra..... | 8. 31. 20 $\frac{1}{2}$ | 8. 33. 23 | 23. 23. 55. |
| N..... | 8. 31. 35 | 8. 33. 38 | 24. 5. 45. |
| Taïgeta..... | 8. 31. 39 | 8. 33. 42 | 23. 45. 7. |
| Maïa..... | 8. 32. 15 $\frac{1}{2}$ | 8. 34. 18 | 23. 39. 39. |
| Mérope..... | 8. 32. 48 | 8. 34. 51 | 23. 14. 34. |
| Alcïone.... | 8. 33. 56 $\frac{1}{2}$ | 8. 35. 59 | 23. 24. 18. |
| Atlas..... | 8. 35. 36 $\frac{1}{2}$ | 8. 37. 39 | 23. 31. 43. |
| Pléïone.... | 8. 35. 37 $\frac{1}{2}$ | 8. 37. 40 | 23. 26. 26. |

514 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
Suite des Observations faites au Mural de M. de la Hire.
La correction d'Aberration & de Nutation en déclinaison
est de — 2 secondes.

| 15 Janvier 1779. | | | |
|----------------------------------|--|--|---|
| N O M S des É T O I L E S. | T E M P S des passages à la P E N D U L E. | T E M P S vrai des PASSAGES, &c. | D É C L I N A I S O N S V R A I E S. |
| | H. M. S. | H. M. S. | D. M. S. |
| Petite Étoile. | 5. 59. 13 | 5. 55. 30 | 22. 31. 21.B |
| α du Bélier.. | 6. 8. 18 | 6. 4. 35 | 22. 24. 1. |
| Celeno..... | 7. 44. 57 | 7. 41. 14 | 23. 33. 13. |
| Electra..... | 7. 45. 2 | 7. 41. 19 | 23. 23. 53. |
| N..... | 7. 45. 17 | 7. 41. 34 | 24. 5. 43. |
| Taïgeta..... | 7. 45. 21 | 7. 41. 38 | 23. 45. 5. |
| Maïa..... | 7. 45. 57 $\frac{1}{2}$ | 7. 42. 14 $\frac{1}{2}$ | 23. 39. 37. |
| Mérope..... | 7. 46. 30 | 7. 42. 47 | 23. 14. 32. |
| Alcïone..... | 7. 47. 38 $\frac{1}{2}$ | 7. 43. 55 $\frac{1}{2}$ | 23. 24. 16. |
| Atlas..... | 7. 49. 18 $\frac{1}{2}$ | 7. 45. 35 $\frac{1}{2}$ | 23. 21. 41. |
| Pléïone..... | 7. 49. 19 $\frac{1}{2}$ | 7. 45. 36 $\frac{1}{2}$ | 23. 26. 24. |

Ascensions droites déduites des Observations précédentes.

| N O M S des ÉTOILES. | ASCENSIONS DROITES pour le 1. ^{er} Janvier 1779. | | | | | | | | | |
|----------------------------|--|-----|-----|----|--------------------------------|-----|----|--|-----|-----|
| | EN T E M P S. | | | | EN DEGRÉS, non corrigée. | | | EN DEGRÉS, mais corrigée de l'aberration & de la nutation. | | |
| | H. | M. | S. | T. | D. | M. | S. | D. | M. | S. |
| Petite Étoile.. | 1. | 45. | 38. | 30 | 26. | 24. | 30 | 26. | 24. | 38. |
| α du Bélier... | 1. | 54. | 45. | 0 | 28. | 41. | 17 | 28. | 41. | 25. |
| Celeno..... | 3. | 3. | 41. | 44 | 52. | 55. | 26 | 52. | 55. | 27. |
| Electra..... | 3. | 31. | 46. | 48 | 52. | 56. | 50 | 52. | 56. | 51. |
| N..... | 3. | 32. | 1. | 50 | 53. | 0. | 27 | 53. | 0. | 28. |
| Taïgeta..... | 3. | 32. | 5. | 50 | 53. | 1. | 27 | 53. | 1. | 28. |
| Maïa..... | 3. | 32. | 42. | 25 | 53. | 10. | 36 | 53. | 10. | 37. |
| Mérope..... | 3. | 33. | 15. | 6 | 53. | 18. | 41 | 53. | 18. | 42. |
| Alcïone..... | 3. | 34. | 23. | 47 | 53. | 35. | 57 | 53. | 35. | 58. |
| Atlas..... | 3. | 36. | 4. | 0 | 54. | 1. | 0 | 54. | 1. | 1. |
| Pléïone..... | 3. | 36. | 5. | 9 | 54. | 1. | 17 | 54. | 1. | 18. |

516 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
Longitudes & Latitudes déduites des Observations précédentes,
pour le 1.^{er} Janvier 1779, & comparaison de ses résultats
avec ceux qu'a donnés M. Cassini, pour l'année 1697.
 Mémoires de l'Académie, année 1708, page 299.

| NOMS des ÉTOILES. | LONGITUDES | | | | | | | | LATITUDES | | | | | | | |
|-------------------------|------------|-----|-----|----|----------|-----|-----|----|-----------|-----|-------|----|----------|------|--|--|
| | EN 1697. | | | | EN 1779. | | | | EN 1697. | | | | EN 1779. | | | |
| | S. | D. | M. | S. | S. | D. | M. | S. | D. | M. | S. | D. | M. | S. | | |
| Pleïone..... | 1. | 26. | 10. | 50 | 1. | 27. | 17. | 47 | 3. | 57. | 30 B. | 3. | 58. | 1 B. | | |
| Maïa..... | 1. | 25. | 27. | 50 | 1. | 26. | 35. | 42 | 4. | 21. | 40 | 4. | 21. | 52. | | |
| Atlas..... | 1. | 26. | 8. | 30 | 1. | 27. | 16. | 26 | 3. | 53. | 30 | 4. | 53. | 29. | | |
| Celèno..... | 1. | 25. | 12. | 35 | 1. | 26. | 20. | 36 | 4. | 19. | 54 | 4. | 19. | 0. | | |
| Taïgeta..... | 1. | 25. | 20. | 40 | 1. | 26. | 28. | 50 | 4. | 29. | 10 | 4. | 29. | 11. | | |
| Alcïone..... | 1. | 25. | 46. | 27 | 1. | 26. | 54. | 38 | 4. | 1. | 3 | 4. | 1. | 25. | | |
| Electra..... | 1. | 25. | 11. | 10 | 1. | 26. | 19. | 36 | 4. | 9. | 34 | 4. | 9. | 39. | | |

De la Table précédente, il résulte naturellement la détermination du mouvement des Étoiles, depuis l'année 1697 jusqu'à celle de 1779 : or, si les positions données par M. Cassini, *Mémoires de l'Académie, année 1708, page 299*, sont, comme on doit le croire, pour le 1.^{er} Janvier 1697, alors les mouvemens indiqués dans la Table qui suit, répondent exactement à un intervalle de quatre-vingt-deux années. Voici donc la Table de ces mouvemens pour quatre-vingt-deux années, ou peut-être pour quatre-vingt-un ans & demi.

| NOMS des ÉTOILES. | MOUVEMENS DES ÉTOILES DES PLÉIADES pour quatre-vingt-deux ans, ou peut-être pour quatre-vingt-un ans & demi. | | | |
|-------------------------|--|----------------------------|--------------|---------------|
| | EN LONGITUDE. | EN ASCENSION droite. | EN LATIT. | EN DÉCLIN. |
| Pléïone... | + 1 ^d 6' 57" | + 1 ^d 11' 9" | + 0' 31" | + 15' 42" |
| Maïa..... | + 1. 7. 52 | + 1. 11. 37 | + 0. 12 | + 15. 53. |
| Atlas..... | + 1. 7. 56 | + 1. 11. 40 | - 0. 1 | + 15. 59. |
| Celano.... | + 1. 8. 1 | + 1. 12. 2 | - 0. 54 | + 15. 1. |
| Taïgeta... | + 1. 8. 10 | + 1. 12. 17 | + 0. 1 | + 15. 53. |
| Alcïone... | + 1. 8. 11 | + 1. 11. 55 | + 0. 22 | + 16. 4. |
| Électra.... | + 1. 8. 26 | + 1. 12. 10 | + 0. 5 | + 16. 11. |

Pour conclure, d'après cette Table, le mouvement des Étoiles en longitude, je laisse de côté le mouvement de Pléïone, parce que ce mouvement s'écarte un peu de celui des six autres Étoiles, soit par erreur dans cette Étoile, soit parce qu'elle a peut-être un mouvement qui lui est particulier. Voici donc le moyen mouvement que je conclus des observations de Maïa, d'Atlas, de Celano, de Taïgeta, d'Alcïone & d'Électra.

Mouvement en longitude + 1^d 8' 6".

Or, si ce mouvement est

Pour quatre-vingt-un ans on aura pour vingt-neuf ans + 24' 23".

Pour quatre-vingt-un ans & demi, on aura pour vingt-neuf ans + 24. 14.

Pour quatre-vingt-deux ans on aura pour vingt-neuf ans + 24. 5.

D'une autre part, si on compare mes longitudes d'Électra, d'Atlas & d'Alcïone, avec celle de feu M. l'abbé de la

518 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Caille, pour 1750, on trouvera que le mouvement en vingt-neuf ans, est pour

Electra de $+ 24' 10''$

Atlas . . de $+ 24. 30.$

Alcïone de $+ 24. 35.$

& alors le moyen mouvement en longitude & pour une révolution certaine de vingt-neuf ans, est de $+ 24' 25''$.

Ce qui s'accorde aussi-bien que faire se puisse avec ce que m'ont donné les observations de M. Cassini, & aussi avec le mouvement adopté jusqu'à présent; savoir, $+ 24' 20'', 1$ pour une révolution de vingt-neuf années.

Quant à Pléïone à qui je soupçonne un petit mouvement particulier, autour d'Alcïone, voici la quantité dont paroît être ce mouvement en quatre-vingt-un ans de temps.

Mouvement particulier & douteux en quatre-vingt-un ans.

Pour Pléïone, $\left\{ \begin{array}{l} - 1' 9'' \text{ en longitude.} \\ + 0. 31. \text{ en latitude.} \end{array} \right.$



Au reste, d'après les observations que je viens de donner, & d'après celles que j'ai faites d'ailleurs avec un bon télescope de trente-deux pouces de foyer, j'ai dressé le catalogue qui suit; & si les plus petites Étoiles ne sont placées ici qu'à une minute près du vrai, au moins on pourra les reconnoître toutes & les trouver facilement avec une lunette, pourvu qu'elle soit plus forte que celle qu'on adapte ordinairement aux instrumens muraux placés dans le plan du Méridien. Voici donc ce catalogue de soixante-quatre Étoiles des Pléïades, & j'ai réduit ce catalogue au 1.^{er} Janvier 1786, afin de le rapprocher de l'époque des volumes de la Connoissance des Temps, déjà publiés en faveur des Marins qui ont besoin de ces volumes environ trois ans avant l'époque des phénomènes annoncés.

*Catalogue des soixante-quatre Étoiles des Pléiades, pour
le 1.^{er} Janvier 1786.*

*1.^o Étoiles qui sont à l'occident d'Alcione, ou qui passent
avant Alcione par le Méridien.*

| NOMS des ÉTOILES. | GRANDEUR. | ASCENSION DROITE | | DÉCLIN. boréale. | Différence avec η ou d'Alcione. | | |
|-------------------------|-----------|------------------|------------|---------------------|---------------------------------|------------|------------------|
| | | | | | EN ASCENSION DROITE | | En DÉCLINAIS. |
| | | En temps. | En degrés. | | En temps. | En degrés. | |
| | | H. M. S. | D. M. S. | M. S. | M. S. | M. S. | |
| 1. | 5. | 3. 30. 58 | 52. 44. 14 | 23. 40. 58 | Occ. — 3. 52 | — 57. 58 | + 15' 24". N. |
| 2. | 5. | 3. 31. 13 | 52. 48. 4 | 23. 48. 18 | — 3. 37 | — 54. 8 | + 22. 44 N. |
| 3. | 7. | 3. 31. 42 | 52. 55. 14 | 23. 25. 48 | — 3. 8 | — 46. 58 | + 4. 14 N. |
| 4. | 6. | 3. 31. 45 | 52. 56. 4 | 23. 37. 48 | — 3. 5 | — 46. 8 | + 12. 14 N. |
| 5. | 7. | 3. 31. 46 | 52. 56. 14 | 23. 41. 48 | — 3. 4 | — 45. 58 | + 16. 14 N. |
| 6. g. Celeno. | 3. | 3. 32. 8 | 53. 1. 41 | 23. 34. 31 | — 2. 42 | — 40. 31 | + 8. 57 N. |
| 7. b. Electra. | 3. | 3. 32. 13 | 53. 3. 5 | 33. 25. 11 | — 2. 37 | — 39. 7 | — 0. 23 S. |
| 8. | 6. | 3. 32. 27 | 53. 5. 24 | 23. 33. 8 | — 2. 23 | — 36. 48 | + 7. 34 N. |
| 9. n. | 8. | 3. 32. 28 | 53. 6. 42 | 23. 7. 1 | — 2. 22 | — 35. 30 | + 41. 27 N. |
| 10. r. Taigeta. | 3. | 3. 32. 32 | 53. 7. 42 | 23. 46. 23 | — 2. 18 | — 34. 30 | + 20. 49 N. |
| 11. | 5. | 3. 32. 48 | 53. 12. 0 | 23. 21. 0 | — 2. 2 | — 31. 12 | — 4. 34 S. |
| 12. | 6. | 3. 32. 48 | 53. 11. 44 | 23. 46. 18 | — 2. 2 | — 30. 28 | + 20. 44 N. |
| 13. | 5. | 3. 32. 57 | 53. 13. 54 | 23. 39. 18 | — 1. 53 | — 28. 18 | + 13. 44 N. |
| 14. c. Maia. | 3. | 3. 33. 9 | 53. 16. 51 | 23. 40. 55 | — 1. 41 | — 25. 21 | + 15. 21 N. |
| 15. | 5. | 3. 33. 12 | 53. 17. 44 | 23. 21. 0 | — 1. 38 | — 24. 28 | — 4. 34 S. |
| 16. o. Asterope. | 4. | 3. 33. 13 | 53. 17. 54 | 23. 52. 18 | — 1. 37 | — 24. 18 | + 26. 44 N. |
| 17. o. | 4. | 3. 33. 21 | 53. 19. 54 | 23. 51. 18 | — 1. 29 | — 22. 18 | + 25. 44 N. |
| 18. | 7. | 3. 33. 31 | 53. 22. 24 | 23. 30. 38 | — 1. 19 | — 19. 48 | + 5. 4 N. |
| 19. | 7. | 3. 33. 34 | 53. 23. 14 | 23. 30. 18 | — 1. 16 | — 18. 58 | + 4. 44 N. |
| 20. d. Mérope. | 3. | 3. 33. 41 | 53. 24. 56 | 23. 15. 50 | — 1. 9 | — 17. 16 | — 9. 44 S. |
| 21. | 9. | 3. 33. 42 | 53. 25. 14 | 23. 25. 18 | — 1. 8 | — 16. 58 | — 0. 16 S. |
| 22. | 5. | 3. 33. 48 | 53. 26. 44 | 23. 34. 18 | — 1. 2 | — 15. 28 | + 8. 44 N. |
| 23. | 5. | 3. 34. 2 | 53. 30. 14 | 22. 52. 18 | — 0. 48 | — 11. 58 | — 33. 16 S. |
| 24. | 6. | 3. 34. 2 | 53. 30. 30 | 23. 23. 20 | — 0. 48 | — 11. 42 | — 2. 14 S. |
| 25. | 4. | 3. 34. 20 | 53. 35. 4 | 23. 50. 18 | — 0. 28 | — 7. 8 | + 24. 44 N. |
| 26. | 5. | 3. 34. 22 | 53. 35. 14 | 24. 7. 48 | — 0. 28 | — 6. 58 | + 42. 14 N. |
| 27. | 5. | 3. 34. 28 | 53. 36. 44 | 23. 34. 48 | — 0. 22 | — 5. 28 | + 9. 14 N. |
| 28. | 5. | 3. 34. 24 | 53. 36. 0 | 23. 17. 28 | — 0. 26 | — 6. 12 | — 8. 6 S. |
| 29. | 8. | 3. 34. 38 | 53. 39. 14 | 23. 27. 18 | — 0. 12 | — 2. 58 | + 1. 44 N. |
| 30. | 4. | 3. 34. 39 | 53. 39. 24 | 23. 26. 18 | — 0. 11 | — 2. 48 | + 0. 44 N. |
| 31. | 8. | 3. 34. 39 | 53. 39. 24 | 23. 2. 0 | — 0. 11 | — 2. 48 | — 23. 34 S. |
| 32. | 5. | 3. 34. 46 | 53. 41. 14 | 23. 58. 18 | — 0. 4 | — 0. 58 | + 32. 44 N. |
| 33. | 5. | 3. 34. 47 | 53. 41. 24 | 23. 54. 0 | — 0. 3 | — 0. 48 | + 28. 26 N. |
| 34. | 4. | 3. 34. 47 | 53. 41. 24 | 23. 5. 0 | — 0. 3 | — 0. 48 | — 20. 34 S. |
| 35. | 4. | 3. 34. 47 | 53. 41. 24 | 23. 0. 0 | — 0. 3 | — 0. 48 | — 25. 34 S. |
| 36. | 4. | 3. 34. 49 | 53. 42. 4 | 23. 12. 0 | — 0. 1 | — 0. 8 | — 13. 34 S. |
| 37. n. Alcione. | 3. | 3. 34. 50 | 53. 42. 12 | 23. 25. 34 | — 0. 0 | — 0. 0 | — 0. 0 |

520 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
Suite du Catalogue des soixante-quatre Étoiles des Pléiades,
pour le 1.^{er} Janvier 1786.
2.^e. Étoiles qui sont à l'orient d'Alcione, ou qui passent après
Alcione par le Méridien.

| N O M S des ÉTOILES. | GRANDEUR. | ASCENSION DROITE | | DÉCLIN. boréale. | Différence avec η ou Alcione. | | |
|----------------------------|-----------|---|------------|---------------------|---|------------|------------------|
| | |  | | | EN ASCENSION DROITE | | En DÉCLINAIS. |
| | | En temps. | En degrés. | |  | | |
| | | | | | En temps. | En degrés. | |
| | | H. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | M. S. | M. S. | M. S. |
| 37. η. Alcione. | 3. | 3. 34. 50 | 53. 42. 12 | 23. 25. 34 | Or. + 0. 0 | + 0. 0 | — 0. 0 |
| 38. | 4. | 3. 34. 54 | 53. 43. 12 | 23. 37. 4 | + 0. 4 | + 1. 0 | + 11. 30 N. |
| 39. | 5. | 3. 34. 54 | 53. 43. 14 | 22. 58. 0 | + 0. 4 | + 1. 2 | — 27. 34 S. |
| 40. | 5. | 3. 35. 6 | 53. 46. 14 | 22. 55. 30 | + 0. 16 | + 4. 2 | — 30. 4 S. |
| 41. | 6. | 3. 35. 18 | 53. 49. 4 | 22. 52. 30 | + 0. 28 | + 6. 52 | — 33. 4 S. |
| 42. | 5. | 3. 35. 23 | 53. 50. 29 | 23. 48. 18 | + 0. 33 | + 8. 17 | + 22. 44 N. |
| 43. | 6. | 3. 35. 29 | 53. 51. 59 | 23. 39. 18 | + 0. 39 | + 9. 47 | + 13. 44 N. |
| 44. | 4. | 3. 35. 42 | 53. 55. 30 | 23. 41. 18 | + 0. 52 | + 13. 18 | + 15. 44 N. |
| 45. | 4. | 3. 35. 58 | 53. 59. 14 | 22. 42. 18 | + 1. 8 | + 17. 2 | — 43. 16 S. |
| 46. p. | 7. | 3. 36. 18 | 54. 4. 14 | 23. 44. 18 | + 1. 28 | + 22. 2 | + 18. 44 N. |
| 47. | 5. | 3. 36. 20 | 54. 4. 44 | 22. 33. 48 | + 1. 30 | + 22. 32 | — 51. 46 S. |
| 48. p. | 4. | 3. 36. 23 | 54. 5. 29 | 23. 44. 18 | + 1. 33 | + 23. 17 | + 18. 44 N. |
| 49. | 5. | 3. 36. 26 | 54. 6. 14 | 23. 9. 8 | + 1. 36 | + 24. 2 | — 16. 26 S. |
| 50. f. Atlas. | 3. | 3. 36. 30 | 54. 7. 15 | 23. 22. 59 | + 1. 40 | + 25. 3 | — 2. 35 S. |
| 51. h. Pléione. | 4. | 3. 36. 31 | 54. 7. 32 | 23. 27. 42 | + 1. 41 | + 25. 20 | + 2. 8 N. |
| 52. | 6. | 3. 36. 36 | 54. 8. 44 | 23. 36. 18 | + 1. 46 | + 26. 32 | + 10. 44 N. |
| 53. | 4. | 3. 36. 42 | 54. 10. 14 | 23. 12. 8 | + 1. 52 | + 28. 2 | — 13. 26 S. |
| 54. | 6. | 3. 36. 42 | 54. 10. 14 | 23. 35. 28 | + 1. 52 | + 28. 2 | — 50. 6 S. |
| 55. | 5. | 3. 36. 45 | 54. 10. 59 | 23. 54. 8 | + 1. 55 | + 28. 47 | + 28. 34 N. |
| 56. | 5. | 3. 36. 57 | 54. 13. 59 | 23. 40. 18 | + 2. 7 | + 31. 47 | + 14. 44 N. |
| 57. | 5. | 3. 36. 58 | 54. 14. 14 | 23. 31. 18 | + 2. 8 | + 32. 2 | + 5. 44 N. |
| 58. | 5. | 3. 36. 58 | 54. 14. 14 | 22. 45. 8 | + 2. 8 | + 32. 2 | — 40. 26 S. |
| 59. | 5. | 3. 37. 6 | 54. 16. 14 | 23. 45. 18 | + 2. 16 | + 34. 2 | + 19. 44 N. |
| 60. | 4. | 3. 37. 7 | 54. 16. 29 | 23. 1. 48 | + 2. 17 | + 34. 17 | — 23. 46 S. |
| 61. | 4. | 3. 37. 26 | 54. 21. 14 | 23. 10. 18 | + 2. 36 | + 39. 2 | — 15. 16 S. |
| 62. | 4. | 3. 37. 30 | 54. 22. 14 | 23. 54. 18 | + 2. 40 | + 40. 2 | + 28. 44 N. |
| 63. | 5. | 3. 37. 46 | 54. 26. 14 | 23. 52. 18 | + 2. 56 | + 44. 2 | + 26. 44 N. |
| 64. | 4. | 3. 38. 14 | 54. 33. 14 | 23. 17. 18 | + 3. 24 | + 51. 2 | — 8. 16 S. |

Le 9 Février 1783, la Lune éclipsa vingt-sept de ces Étoiles, (*Connoissance des Temps, page 24*) ; & le 13 Décembre de l'année 1785, elle en éclipsa aussi trente-sept, (*Connoissance des Temps, page 164*).

Présentement

Présentement je passe aux observations de Jupiter, qui forment la seconde & dernière partie de ce Mémoire.

*Observations de Jupiter pour son opposition avec le Soleil,
du 12 Mars 1779, faites à l'Observatoire royal
au Quart-de-cercle mural de M. de la Hire.*

| JOURS des OBSERV. année 1779. | PASSAGES PAR LE MÉRIDIEEN. Temps de la Pendule. | | PASSAGES PAR LE MÉRIDIEEN. Temps vrai. | | HAUTEUR du centre de JUPITER, • selon l'Instrument. |
|---|--|----------------|---|----------------|---|
| | | | | | |
| | β de la VIERGE. | J U P I T E R. | β de la VIERGE. | J U P I T E R. | |
| | H. M. S. | H. M. S. | H. M. S. | H. M. S. | D. M. S. |
| Fév. 28 | 13. 2. 14 | 13. 2. 55 | 12. 51. 26 | 12. 52. 7 | 45. 7. 5. |
| Mars 1. | 12. 58. 21 | 12. 58. 33 | 12. 47. 46 | 12. 47. 58 | 45. 10. 1. |
| 2. | 12. 54. 28 | 12. 54. 11 | 12. 44. 6 | 12. 43. 49 | 45. 12. 57. |
| 3. | 12. 50. 36 | 12. 49. 50 | 12. 40. 26 | 12. 39. 41 | 45. 15. 53. |
| 4. | 12. 46. 42 | 12. 45. 29 | 12. 36. 46 | 12. 35. 33 | 45. 18. 53. |
| 5. | 12. 42. 48 | 12. 41. 7 | 12. 33. 6 | 12. 31. 24 | 45. 22. 0. |
| 6. | 12. 38. 53 | 12. 36. 44 | 12. 29. 25 | 12. 27. 15 | 45. 25. 10. |
| 7. | 12. 34. 59 | 12. 32. 21 | 12. 25. 44 | 12. 23. 6 | 45. 28. 20. |
| 8. | 12. 31. 4 | 12. 27. 58 | 12. 22. 3 | 12. 18. 57 | 45. 31. 30. |
| 9. | 12. 27. 8 | 12. 23. 34 | 12. 18. 22 | 12. 14. 48 | 45. 34. 40. |
| 10. | 12. 23. 12 | 12. 19. 10 | 12. 14. 41 | 12. 10. 39 | 45. 37. 50. |
| 11. | 12. 19. 17 | 12. 14. 46 | 12. 11. 1 | 12. 6. 30 | 45. 40. 55. |
| 12. | 12. 15. 22 | 12. 10. 23 | 12. 7. 22 | 12. 2. 22 | 45. 44. 5. |
| 13. | 12. 11. 28 | 12. 6. 0 | 12. 3. 43 | 11. 58. 15 | 45. 47. 15. |
| 21. | 11. 40. 22 $\frac{1}{2}$ | 11. 31. 8 | 11. 34. 43 $\frac{1}{2}$ | 11. 25. 29 | 46. 11. 30. |
| 22. | 11. 36. 29 | 11. 26. 47 | 11. 31. 6 | 1. 21. 24 | 46. 14. 15. |
| 28 | 11. 13. 1 | | 11. 9. 22 | | |

Selon ces observations, Jupiter a été comparé seize jours avec l'Étoile β de la Vierge, puis cette Étoile elle-même a aussi été comparée au méridien avec le Soleil, le 28 Mars, jour
Mém. 1779. U u u

522 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

où elle n'étoit éloignée du parallèle du centre du Soleil que de $2' 13'',5$, ainsi avant que de rapporter la position de Jupiter à celle de β de la Vierge, je vais rapporter la position de β de la Vierge à celle du Soleil même, & avec d'autant plus de sûreté que dans ce cas les meilleures Tables du Soleil, savoir celles de M. l'Abbé de la Caille & celles de M. Mayer, ne diffèrent entr'elles que de deux secondes.

La marche de ma pendule a été assez constante & assez uniforme pendant le mois entier de Mars : or, selon cette pendule, la différence des ascensions droites étoit de $11^h 9' 14''$, à raison de $23^h 56' 5''$ pour 360 degrés, ainsi la différence en temps vrai, $11^h 9' 14''$ réduite en degrés, donne $167^d 45' 51''$

Tandis que l'ascension droite du Soleil étoit de 7. 2. 7.

Donc pour ascension droite cherchée de β de la Vierge, on aura $174. 47. 58.$

D'une autre part, selon la position déjà connue, & les réductions convenables, cette même ascension droite, doit être de $174. 47. 38.$

Alors j'ai cru devoir adopter pour vraie position celle qui tient le milieu entre les deux résultats, savoir celle-ci $174. 47. 48.$

De la position de β de la Vierge, déduite comme je viens de le faire de celle du Soleil même, il suit que pour vingt-neuf années, le mouvement des Étoiles en longitude, est de $+ 24. 30.$

Tandis que selon mes observations & calculs des Étoiles des Pléiades, ce mouvement est de $+ 24. 25.$

Et tandis que le mouvement adopté depuis long-temps, est de..... + 24' 20".

Si donc j'avois une conjecture à faire quant à la quantité, dont est réellement le mouvement des Étoiles en longitude, c'est qu'on fait ce mouvement trop petit d'environ 5 secondes en vingt-neuf ans. Présentement voici mes calculs & résultats pour l'opposition de Jupiter, dont je viens de donner les observations : ces calculs & résultats termineront ce Mémoire.

Calculs des Observations de Jupiter.

| JOURS des OBSERVAT. année 1779. | DIFFÉR. des ASCENSIONS droites en degrés. | ASCENS. droites vraies du centre de JUPITER. | HAUTEURS du centre de JUPITER. | | | | | | DÉCLINAIS. vraie du centre de JUPITER, boréale. |
|---|---|--|-----------------------------------|------------|--------------|---------|----|----|---|
| | | | APPARENTES. | | | VRAIES. | | | |
| | | | D. | M. | S. | D. | M. | S. | |
| Mars. 1 | + 3. 1 | 174. 50. 49 | 45. 5. 6 | 45. 4. 8 | 3. 54. 20 B. | | | | |
| 2. | — 4. 5 | 174. 43. 43 | 45. 8. 2 | 45. 7. 4 | 3. 57. 16. | | | | |
| 3. | — 11. 12 | 174. 36. 36 | 45. 10. 58 | 45. 10. 0 | 4. 0. 12. | | | | |
| 4. | — 18. 18 | 174. 29. 30 | 45. 13. 58 | 45. 13. 0 | 4. 3. 12. | | | | |
| 5. | — 25. 24 | 174. 22. 24 | 45. 17. 5 | 45. 16. 7 | 4. 6. 19. | | | | |
| 6. | — 32. 31 | 174. 15. 17 | 45. 20. 15 | 45. 19. 17 | 4. 9. 29. | | | | |
| 7. | — 39. 37 | 174. 8. 11 | 45. 23. 25 | 45. 22. 27 | 4. 12. 39. | | | | |
| 8. | — 46. 43 | 174. 1. 5 | 45. 26. 35 | 45. 25. 37 | 4. 15. 49. | | | | |
| 9. | — 53. 49 | 173. 53. 59 | 45. 29. 45 | 45. 28. 47 | 4. 18. 59. | | | | |
| 10. | 1. 0. 55 | 173. 46. 53 | 45. 32. 55 | 45. 31. 57 | 4. 22. 9. | | | | |
| 11. | 1. 8. 1 | 173. 39. 47 | 45. 36. 0 | 45. 35. 2 | 4. 25. 14. | | | | |
| 12. | 1. 15. 7 | 173. 32. 41 | 45. 39. 10 | 45. 38. 12 | 4. 28. 24. | | | | |
| 13. | 1. 22. 13 | 173. 25. 35 | 45. 42. 20 | 45. 41. 22 | 4. 31. 34. | | | | |

324 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
Suite du calcul des Observations de Jupiter pour son opposition
avec le Soleil.

| J O U R S des O B S E R V A T I O N S , année 1779. | | ASCENSION droite vraie du centre de JUPITER. | DÉCLINAIS. vraie du centre de JUPITER. | LONGITUDE géocentrique observée de JUPITER. | LONGITUDE de la TERRE. |
|--|--------------------|--|--|---|------------------------------|
| | H. M. S. | D. M. S. | D. M. S. | S. D. M. S. | S. D. M. S. |
| | <i>Temps vrai.</i> | | | | |
| Mars. 11 | 12. 6. 30 | 173. 39. 47 | 4. 25. 14 B. | 5. 22. 25. 58 | 5. 21. 18. 18. |
| 12. | 12. 2. 22 | 173. 32. 41 | 4. 28. 24 | 5. 22. 18. 13 | 5. 22. 17. 52. |
| 13. | 11. 58. 15 | 173. 25. 35 | 4. 31. 34 | 5. 22. 10. 27 | 5. 23. 17. 28. |

De ces calculs il suit les résultats que voici :

Opposition de Jupiter observée avec le Soleil.

12 Mars 1779.

à 12^h 9' 28" temps vrai }
à 12. 19. 20. temps moyen } du méridien de l'Observ. royal de Paris.

Alors la longitude héliocentrique de Jupiter étoit observée

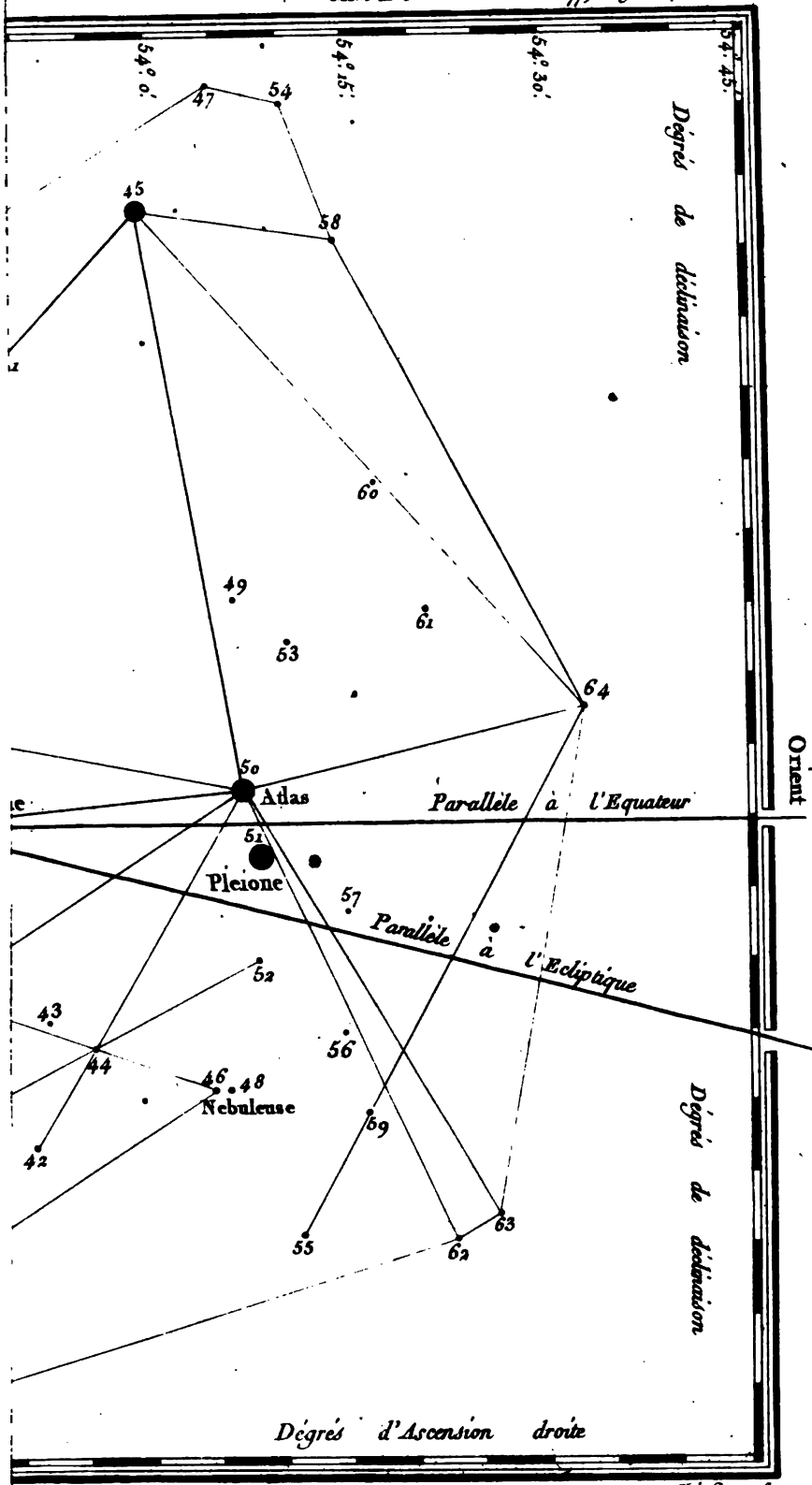
Dans l'Écliptique de 5^f 22^d 18' 11".

Dans l'Orbite de 5. 22. 18. 26.

Tandis qu'elle étoit

Selon les Tables de M. Caffini. . . de 5^f 22^d 17' 23" }
Selon mes Tables de 5. 22. 22. 31. } dans l'orbite.
Selon les Tables de M. Wargentin, de 5. 22. 22. 58. }
Selon les Tables d'Halley de 5. 22. 25. 30. }

Ainsi dans cette opposition, les Tables de M. Caffini sont celles qui approchent le plus de l'observation, & celles de



M. Halley sont celles qui s'en éloignent davantage ; d'ailleurs les erreurs de chacune de ces Tables sont fort éloignées d'être constamment les mêmes , car

Pour l'opposition du 23 Mars 1590.

L'erreur des Tables de M. Cassini étoit de $+ 10' 21''$

L'erreur de mes Tables étoit seulement de $+ 1. 21.$

Pour l'opposition du 1.^{er} Février 1754.

L'erreur des Tables de M. Cassini étoit de $- 6. 40.$

L'erreur de mes Tables étoit seulement de $- 2. 31.$

Pour l'opposition du 24 Avril 1733.

L'erreur des Tables de M. Wargentin étoit de $+ 1. 1.$

L'erreur de mes Tables étoit seulement de $+ 0. 29.$



M É M O I R E

S U R L A

P L A N È T E D E H E R S C H E L .

Par M. DE LA LANDE. (a)

Lû le
22 Décemb.
1781.
Remis
le 1.^{er} Oct.
1782.

LA nouvelle Planète qui occupe les Astronomes depuis le mois d'Avril 1781, est une des choses les plus singulières qu'on ait découvertes dans le Ciel, & l'on étoit bien loin de l'espérer. Depuis le temps que l'on cherche des Comètes, on n'en avoit jamais vu qui ressemblât à une petite Étoile; on ne soupçonnoit jamais ce qui paroïssoit une petite Étoile d'avoir un mouvement; d'ailleurs on y donnoit peu d'attention, le nombre des Étoiles de septième grandeur est si prodigieux, qu'on auroit regardé comme impossible & inutile de les observer toutes & à plusieurs reprises, & cela eût été nécessaire pour savoir s'il n'y en avoit pas quelqu'une qui eût un mouvement.

Lorsqu'on avoit déterminé plusieurs petites Etoiles dans une région du Ciel, on croyoit superflu d'observer les autres, puisqu'il suffit d'avoir quelques points fixes dans chaque partie. Aussi voit-on en comparant les catalogues de Flamstéed, de Mayer, de Bradley, de la Caille, que plusieurs Étoiles qui se trouvent dans les uns, sont négligées dans les autres. Nous pouvions donc être encore bien des années sans connoître la Planète que M. Herschel vient de nous annoncer, si son habileté n'eût été secondée par un heureux hasard.

J'appelle le nouvel Astre *Planète* plutôt que *Comète*: il est

(a) Quoique ce Mémoire n'ait été lû qu'en 1781, l'Académie a cru pouvoir le publier dans ce volume, à cause de la nouveauté de l'objet, & de l'impatience que doivent avoir les Astronomes de savoir ce que l'on a fait à ce sujet.

vrai que les limites de ces dénominations ne sont plus les mêmes qu'autrefois, puisque les Comètes sont de véritables Planètes, & ces limites sont encore plus confondues par l'observation dont il s'agit; mais il me semble naturel de réserver le nom de *Comètes* aux Astres dont les apparitions sont courtes, rares, qui sont long-temps hors de la portée de notre vue, & qui se font remarquer par les queues, les chevelures & les nébulosités qu'on a vues jusqu'à présent dans toutes les Comètes. J'appelle aussi le nouvel astre *Planète de Herschel*; à l'honneur de celui à qui nous devons cette curieuse découverte; il lui a donné le nom de *Georgium Sidus*; M. Bode propose de l'appeler *Uranus*; M. de Sivry, *Cybèle*; M. Prosperin, *Neptune*; mais quelle raison pourroit l'emporter sur la reconnaissance que nous devons à l'Auteur, & sur l'intérêt des Sciences qui demande qu'on excite l'émulation?

M. Herschel (*b*), Membre de la Société Royale de Londres, Musicien, né à Hanovre en 1738, mais établi à Bath en Angleterre, s'occupe depuis dix ans, à faire des Télescopes, par goût & par curiosité, il y a réussi supérieurement; car M. Maskelyne, au mois de Juin 1782, ayant comparé un de ces télescopes de M. Herschel avec le meilleur télescope de 6 pieds que l'on ait du célèbre Short, a trouvé celui de M. Herschel fort supérieur. Dans une lettre que j'ai vue de M. Herschel, il assure en avoir fait un qui grossit quinze cents fois, & cela en donnant une grande ouverture au miroir par le moyen d'une courbure parabolique. Il parle d'un télescope de 20 pieds qui grossit trois cents fois, dans ses Observations sur les taches de Jupiter & de Mars (*Philos. Transactions*, 1781, pages 121 & 127). Il y parle d'un grossissement de deux mille dix fois, &c. dont il a fait usage à cette occasion. (*Phil. Transf.* 1781, page 492). Enfin, M. Magellan écrivoit au mois de Juin 1782, qu'il avoit vu un télescope

(*b*) On a écrit ce nom de dix façons différentes dans les Journaux, mais c'est d'après une lettre de M. Herschel lui-même, que je l'écris ainsi, & d'après les Transactions philosophiques de 1781: *Account of a Comet*, by M. Herschel, F. R. S.

Newtonien de 7 pieds, fait par M. Herschel, & qui grossit six mille fois, il ajoute que l'Auteur est un prodige d'adresse & de patience, & qu'il vient d'obtenir du Roi une pension de trois cents livres sterling, & un logement à Windsor en considération du succès étonnant auquel il est parvenu, & pour le mettre à portée de continuer à s'occuper de l'Astronomie. C'est à ce talent extraordinaire de M. Herschel, pour la construction des télescopes, que nous devons la découverte de la Planète qui fait l'objet de ce Mémoire.

Ce fut le 13 Mars 1781, que M. Herschel, regardant avec un télescope de 7 pieds, les Étoiles qui sont vers les pieds des Gemeaux, vit un petit Astre différent des Étoiles de même lumière, qui paroissoit plus large, & qu'il soupçonna être une Comète (*Philosophical Transactions*, 1781, p. 492); il regarda cet Astre avec un équipage qui grossissoit neuf cents trente-deux fois, & il trouva que son diamètre étoit encore plus grand, tandis que celui des Étoiles ne changeoit pas; il le compara avec beaucoup de petites Étoiles, & il en donne la configuration dans son Mémoire (*Philos. Transf.* 1781), avec la description d'un micromètre de son invention: il fut assuré deux jours après, que ce n'étoit pas une Étoile, en voyant que cet Astre avoit changé de place; mais il avoit présumé, dès la première vue, que ce n'étoit pas une Étoile, & cela me paroît surprenant, parce que dans ma lunette, qui grossit cent vingt fois, cette Planète ne me paroît pas différente d'une Étoile de septième grandeur; mais il seroit encore plus difficile de croire que M. Herschel se fût aperçu de son mouvement, si quelque raison n'avoit fixé son attention sur un aussi petit Astre, confondu avec tant d'autres; il me paroît donc certain que M. Herschel dut cette découverte à la grande force de son télescope.

Il en donna bientôt avis à M. Maskelyne, Astronome royal d'Angleterre; celui-ci ayant examiné les petites Étoiles auxquelles M. Herschel avoit comparé la Planète, dès le 17 Mars, trouva que ce jour-là, à 10^h 40' temps moyen, elle étoit à 83^d 59' 44" d'ascension droite, & à 23^d 33' 8" de

de déclinaison boréale; il s'assura du mouvement les jours suivans; je rapporterai les observations ci-après, *page 538*.

M. Maskelyne écrivit, dès les premiers jours d'Avril, cette nouvelle à Paris; M. Messier commença à observer la Planète le 16 Avril, & continua jusqu'à la fin d'Octobre; je rapporterai de même, ci-après, les observations de M. Messier.

M.^{rs} le Monnier, Méchain, d'Agelet, Lévelque & moi, avons continué ces observations à Paris (*c*), de même que M.^{rs} Reggio & de Césaris à Milan, M. Slope à Pise, M. Darquier à Toulouse, M. Bode à Berlin, M. Wargentín à Stockolm, &c.

Aussitôt qu'on eut à Paris quelques jours d'observations, on entreprit de calculer cet Astre, comme les Comètes ordinaires, dans une parabole; M.^{rs} Méchain, l'abbé Boscovich, le Président de Saron, de la Place, Lexell, firent diverses tentatives, mais comme on ne pensoit pas à supposer cette Planète dix-huit fois plus loin que le Soleil, on représentoit fort bien quelques observations, & peu de jours après, l'écart étoit considérable.

M. le Président de Saron fut le premier qui, le 8 Mai, s'aperçut que cette Planète devoit être fort éloignée de nous; il l'estimoit au moins douze fois plus loin que le Soleil, & les calculs commencèrent à s'accorder beaucoup mieux.

M. l'abbé Boscovich composa au commencement de Juin, un savant Mémoire, ou par une théorie ingénieuse & simple; il montra qu'il y avoit quatre paraboles qui pouvoient satisfaire au petit mouvement qu'on avoit observé jusqu'alors. M. de la Place publia des *Éléments*, dans la *Connoissance des Temps* de 1784.

M. Lexell qui étoit alors en Angleterre, écrivoit vers le même temps qu'on représentoit fort bien son mouvement par un cercle qui avoit un rayon égal à dix-huit fois la distance

(*c*) Voyez le *Journal de Paris*, des 27 Avril, 29 Mai, 24 Juillet, 26 Décembre 1781, 22 Juillet 1782; le *Journal des Savans*, Juin 1781 & Février 1782; le *Mercure* des 4 Août 1781 & 6 Avril 1782.

Mém. 1779.

Xxx

du Soleil; dès-lors il me parut qu'on devoit lui donner le nom de *nouvelle Planète*; le 24 Juillet, M. Lexell qui avoit calculé son mouvement dans différentes hypothèses paraboliques, vit que dans toutes les paraboles qui avoient depuis 14 jusqu'à 18 de distance périhélie, on trouvoit à peu-près le même accord entre le calcul & l'observation. On comprit alors qu'il falloit attendre que la Planète eût parcouru un arc plus étendu pour entreprendre de calculer son orbite.

Mais lorsque j'ai eu huit mois d'observations, la Planète ayant été en conjonction & en opposition, & la situation de la Terre nous l'ayant fait voir dans toutes les positions, avec un mouvement de plus de six degrés, j'ai cru que l'on pouvoit former des hypothèses au moins pour calculer la route dans le cours de l'année 1782, voici le résultat de mes calculs qui ont assez bien réussi.

J'ai pris trois observations exactes, confirmées chacune par les précédentes & les suivantes, & dans lesquelles la Planète avoit été comparée à la même étoile *Propus* ou *H* des Gemeaux; la première & la dernière sont de M. Méchain, la seconde de M. Messier; je les ai calculées, & j'ai trouvé les résultats suivans. J'appelle *longitude héliocentrique moyenne de la Planète*, celle qui est corrigée de l'aberration & de la nutation, c'est à-dire qui est comptée de l'Équinoxe moyen, & telle qu'on la verroit s'il n'y avoit point d'aberration. Les lieux du Soleil sont calculés par les Tables de la Caille, mais sans y employer la nutation, afin qu'ils soient, ainsi que ceux de la Planète, comptés de l'Équinoxe moyen.

| <i>Temps moyen des Observations.</i> | <i>25 Avril 1781, à 9^h 47['].</i> | <i>31 Juillet 1781, à 15^h 33['].</i> | <i>12 Décemb. 1781, à 10^h 10['].</i> |
|---|---|--|--|
| Ascension droite observée.... | 85 ^d 15' 27" | 91 ^d 7' 49" | 91 ^d 23' 31" |
| Déclinaison boréale observée... | 23. 35. 34 | 23. 40. 25 | 23. 42. 47. |
| Longitude..... | 2 ^f 25. 39. 17 | 3 ^f 1. 2. 7 | 3 ^f 1. 16. 28. |
| Latitude boréale..... | 0. 11. 36 | 0. 12. 24 | 0. 14. 54. |
| Nutation à ajouter à la longitude observée..... | + 10 | + 8 | + 7. |
| Aberration en longitude..... | + 19 | + 21 | — 18. |

| <i>Temps moyen des Observations.</i> | <i>25 Avril 1781. à 9^h 47'.</i> | <i>31 Juillet 1781. à 15^h 33'.</i> | <i>12 Décemb. 1781. à 10^h 10'.</i> |
|--|--|---|---|
| Longitude du Soleil comptée de l'Équinoxe moyen | 1 ^r 5 ^d 58' 53" | 4 ^r 9 ^d 7' 13" | 8 ^r 21 ^d 21' 50" |
| Logarithme de la dist. du Soleil.. | 0,003196 | 0,006272 | 9,992993. |
| Longit. héliocentrique moyenne calculée | 2. 27. 58. 56 | 2. 29. 9. 3 | 3. 0. 45. 31. |
| Latitude héliocentrique | 0. 11. 59 | 0. 12. 55 | 0. 14. 8. |

Ayant calculé la première & la dernière observation, je les ai réduites au Soleil, en supposant connue la distance de la Planète au Soleil, & calculant la parallaxe du grand orbe; cela m'a donné un mouvement vu du Soleil, dans l'espace de deux cents trente-un jours.

La même distance avec laquelle j'avois calculé la parallaxe du grand orbe, m'a donné la durée de la révolution par rapport aux Étoiles fixes, par la règle de Képler; j'en ai déduit le mouvement de la Planète en deux cents trente-un jours, par rapport aux Équinoxes moyens; le mouvement devoit être le même que celui qui étoit tiré des observations réduites au Soleil, si la distance supposée de la Planète au Soleil étoit bonne: tant que ma distance a été mal supposée, elle m'a donné une erreur sur les parallaxes annuelles, sur les longitudes héliocentriques & sur le mouvement que j'en avois déduit; d'un autre côté, la révolution de la Planète autour du Soleil, déduite de la même distance, étant défectueuse, me donnoit une erreur sur le mouvement dans l'espace de deux cents trente-un jours, & cette erreur étant différente de la première, je trouvois pour le mouvement deux quantités différentes.

J'ai donc fait varier la distance de la Planète, jusqu'à ce que le mouvement héliocentrique, calculé avec cette distance, fût le même que celui qui résulloit de l'intervalle des temps & de la durée de la révolution tirée de la distance; j'ai trouvé par-là qu'il falloit supposer la distance 18,931, & la révolution sidérale, 82 années $\frac{37}{100}$. Par-là le mouvement de la Planète, corrigé de l'aberration, de la précession & de

la nutation, c'est-à-dire réduit au mouvement moyen, par rapport aux Étoiles fixes, étoit de $2^d 46' 3''$ ou de $2^d 46' 35''$ par rapport aux Équinoxes, le même que par le calcul des parallaxes annuelles, en employant la distance 18,931.

Ensuite j'ai pris l'observation intermédiaire du 31 Juillet éloignée de la première de quatre-vingt-dix-sept jours $\frac{24}{100}$, j'ai calculé avec les mêmes élémens la longitude géocentrique moyenne, & je l'ai trouvée de $3^f 1^d 2' 41''$, plus grande de 5 secondes seulement que celle qui étoit déduite de l'observation, & qui est de $3^f 1^d 2' 36''$, par rapport au lieu moyen de l'Équinoxe: cet accord est plus grand que celui que comportent les observations, dans lesquelles on a même négligé la différence de réfraction entre la Planète & l'Étoile. Ainsi il est inutile, quant à présent, de chercher une autre courbe que le cercle pour représenter le mouvement de cette Planète. Le cercle suffira pour pouvoir prédire le cours du nouvel Astre d'ici à une année ou deux avec une exactitude suffisante.

Pour cet effet il suffira de supposer la longitude héliocentrique pour le 1.^{er} Janvier 1782 à midi, $3^f 0^d 59' 22''$, & le mouvement diurne par rapport aux Équinoxes de $43'',13$ ou de $4^d 22' 22''$ par an. Ensuite avec la longitude héliocentrique de la Planète & celle du Soleil, on cherchera la longitude géocentrique de la Planète par les méthodes ordinaires. J'ai négligé dans ces calculs la latitude qui n'est que de quelques minutes.

Ayant vu que cette hypothèse s'accordoit si bien avec un intervalle de près de huit mois, j'ai calculé d'autres observations, antérieures, intermédiaires ou postérieures, & j'ai trouvé un accord assez satisfaisant, de même que dans la conjonction & l'opposition déterminées par M. Méchain au 19 Juin & au 21 Décembre, & dans la station qui est arrivée le 7, Octobre.

Voici trente-deux longitudes apparentes observées par M.^{rs} Maskelyne, le Monnier, Messier, Méchain, d'Agelet, Lévêque & moi; elles sont sans corrections, excepté celles

de la conjonction & de l'opposition qui sont des longitudes moyennes corrigées de l'aberration & de la nutation; j'y ai joint l'erreur du calcul de mon hypothèse, ou ce qu'il faut appliquer à mon calcul pour l'accorder avec les observations.

| ANNÉES, MOIS & JOURS. | TEMPS MOYEN. | LONGITUDE OBSERVÉE. | | | | ERREUR. |
|-----------------------------|-----------------|------------------------|-----|-----|----------|----------|
| | | H. | M. | S. | D. M. S. | |
| 1781. Avril. 1. | 10. 8 | 2. | 24. | 49. | 30 | + 1. 28. |
| 6. | 7. 45 | 2. | 24. | 57. | 33 | + 1. 2. |
| 16. | 9. 8 | 2. | 25. | 17. | 20 | + 0. 18. |
| 25. | 9. 47 | 2. | 15. | 39. | 17 | 0. 0. |
| Conj. Mai. 26. | 8. 42 | 2. | 27. | 13. | 4 | - 0. 22. |
| Juin. 19. | 5. 31 | 2. | 28. | 38. | 14 | - 0. 9. |
| Juillet. 20. | 15. 11 | 3. | 0. | 27. | 36 | + 0. 22. |
| 31. | 15. 33 | 3. | 1. | 2. | 7 | - 0. 5. |
| Octob. 5. | 17. 12 | 3. | 2. | 54. | 46 | - 0. 12. |
| Déc. 12. | 10. 10 | 3. | 1. | 16. | 28 | 0. 0. |
| Oppos. 21. | 18. 3 | 3. | 0. | 52. | 13 | + 0. 8. |
| 1782. Janv. 3. | 7. 40 | 3. | 0. | 20. | 15 | + 0. 9. |
| 18. | 8. 16 | 2. | 29. | 44. | 52 | - 0. 9. |
| 26. | 6. 10 | 2. | 29. | 29. | 5 | + 0. 27. |
| Févr. 12. | 8. 27 | 2. | 29. | 2. | 40 | + 0. 25. |
| 15. | 6. 47 | 2. | 28. | 59. | 40 | + 0. 27. |
| Mars. 4. | 7. 50 | 2. | 28. | 49. | 38 | + 0. 3. |
| 11. | 8. 57 | 2. | 28. | 50. | 9 | + 0. 3. |
| 26. | 10. 9 | 2. | 29. | 0. | 29 | + 0. 26. |
| Avril. 8. | 7. 55 | 2. | 29. | 18. | 13 | + 0. 22. |
| 19. | 8. 17 | 2. | 29. | 39. | 35 | + 0. 19. |
| 27. | 8. 39 | 2. | 29. | 58. | 23 | + 0. 20. |
| Mai. 7. | 8. 13 | 3. | 0. | 25. | 8 | + 0. 45. |
| 24. | 8. 44 | 3. | 1. | 17. | 50 | + 0. 55. |
| 29. | 9. 18 | 3. | 1. | 34. | 0 | + 0. 35. |
| Juillet. 18. | 15. 22 | 3. | 4. | 32. | 54 | + 2. 17. |
| 20. | 15. 3 | 3. | 4. | 39. | 18 | + 1. 57. |
| 21. | 15. 0 | 3. | 4. | 42. | 39 | + 1. 56. |
| Augût. 16. | 16. 16 | 3. | 6. | 1. | 54 | + 1. 36. |
| 23. | 16. 30 | 3. | 6. | 19. | 40 | + 2. 5. |
| 31. | 15. 53 | 3. | 6. | 37. | 41 | + 2. 11. |
| Sept. 23. | 19. 48 | 3. | 7. | 13. | 39 | + 2. 26. |

J'ai employé dans mon calcul l'aberration, qui est $+ 24$ secondes vers la conjonction, & $- 17$ secondes vers l'opposition. Dans la plupart de ces observations, la Planète a été comparée avec l'étoile *Propus* ou *H* des Gemeaux, de cinquième grandeur; on trouve cependant des inégalités de 15 à 20 secondes dans la marche des observations, mais il est assez difficile de faire parcourir exactement à une étoile le fil d'un micromètre, & de s'assurer que les deux fils sont rigoureusement perpendiculaires l'un à l'autre.

Voyant que l'erreur de ma première hypothèse s'étoit accrue au mois de Juillet 1782 jusqu'à 2 minutes, j'ai voulu voir quel changement il faudroit y faire pour accorder l'observation du 21 Juillet 1782, avec celle du 25 Avril 1781, j'ai trouvé la distance 18,893, la révolution 82 ans $\frac{12}{100}$, le mouvement diurne par rapport aux Équinoxes $43''{,}22$, & la longitude héliocentrique moyenne le 1.^{er} Janvier 1782, $3^{\circ} 1^{\circ} 0''$. Mais cette nouvelle hypothèse donne $1^{\circ} 27''$ de trop pour la longitude en opposition observée au mois de Décembre; cela annonce une inégalité réelle dans le mouvement de la Planète, puisque le même cercle ne peut représenter les observations extrêmes & les intermédiaires dans l'espace de quinze mois. Mais cette inégalité est si petite, qu'on ne peut espérer de la déterminer avec quelque exactitude, si ce n'est au bout de quelques années d'observations.

Cette distance que j'ai trouvée 18,931 & 18,893, seroit, suivant M. Lexell, 18,886; suivant M. Prospérin, 18,878; suivant M. Klinkenberg 18,809: M. Oriani dans les *Ephémérides de Milan*, fait cette distance de 20,873; mais on voit qu'il s'y est glissé une erreur considérable, relativement à la conjonction de la Planète.

J'ai fait aussi quelques essais pour déterminer l'inclinaison & le nœud de cette orbite, quoique la petitesse du mouvement en latitude rende cette détermination très-imparfaite.

Les latitudes observées le 25 Avril & le 12 Décembre 1781, $11^{\circ} 36''$ & $14^{\circ} 54''$, étant réduites au Soleil,

sont de $11^{\circ} 59''$ & $14^{\circ} 8''$, avec ces deux latitudes & le mouvement en longitude ou l'arc de l'Écliptique, compris entre les deux cercles de latitude $2^{\circ} 46' 3''$, on trouve la distance au nœud le 25 Avril $15^{\circ} 4'$, le lieu du nœud $2^{\circ} 12' 54'$, & l'inclinaison 46 minutes.

Les latitudes du 16 Avril 1781 & du 26 Mars 1782, qui sont de $11^{\circ} 48''$ & $15^{\circ} 5''$, & vues du Soleil $12^{\circ} 7''$ & $15^{\circ} 10''$, avec un arc parcouru de $4^{\circ} 7' 44''$, donnent pour le lieu du nœud $2^{\circ} 12' 2''$, avec une inclinaison de 44 minutes. Cette détermination est un peu plus exacte que la précédente, & peut suffire pour donner une idée de la situation de cette orbite, & du changement que la Planète éprouve quant à sa latitude. On voit qu'elle a passé par son nœud il y a quatre ans, elle sera dans la plus grande latitude boréale vers 1798.

Quant à la grandeur de cette Planète, elle paroît comme une Étoile de sixième à septième grandeur, & ce n'est que quand il fait très-beau temps, qu'on peut la voir à la vue simple. Elle est un peu moins brillante que l'étoile 132° du Taureau dans le Catalogue de Flamsteed; elle n'a l'air que d'une Étoile, même dans une lunette qui grossit cent cinquante fois. Son diamètre apparent a été trouvé de 4 à 5 secondes par M. Herschel (*Philos. Transf.* 1781, p. 494). M. Maskelyne l'estimoit de 3 secondes. Mais dans les diamètres mesurés, il y a toujours une partie à ôter pour l'effet de l'irradiation ou de l'aberration des lunettes: si l'on suppose que le diamètre apparent du disque réel de la planète, soit de 3 secondes, on trouve qu'elle doit avoir neuf mille quatre cents soixante lieues de diamètre réel, c'est-à-dire trois fois & un tiers celui de la Terre.

Le mouvement moyen de la nouvelle Planète, est, suivant mon calcul, de 43 secondes par jour, mais en conjonction elle fait $3^{\circ} 36''$ par jour, & en opposition elle rétrograde de $2^{\circ} 48''$ par jour. Sa rétrogradation est d'environ quatre degrés & dure cent cinquante jours chaque année.

En comparant avec mon calcul l'observation du 4 Mars 1781, il me fut aisé de voir que la Planète devoit être stationnaire le surlendemain. Car pour calculer le lieu de la Planète vue de la Terre, j'étois obligé d'ajouter la tangente de 42 degrés, avec celle du supplément de la demi-commutation $53^{\text{d}} 40'$, pour avoir la tangente d'un arc $50^{\text{d}} 45'$, qui ajouté avec $53^{\text{d}} 40'$ devoit faire l'élongation. Le supplément de la demi-commutation diminueoit de $29' 37''$ par jour, & le lieu du Soleil augmentoit de $59' 57''$, il falloit donc que l'arc $50^{\text{d}} 45'$ diminuât de $30' 20''$, afin que la diminution de l'élongation compensât exactement l'augmentation de la longitude du Soleil. En considérant la différence des logarithmes des tangentes, d'une minute à l'autre, vers $53^{\text{d}} 40'$, je voyois qu'elle étoit de 2647; or, $30' 20''$ sont à $29' 37''$, comme 2647 à 2584. Ainsi la différence devoit être plus petite de 63 pour l'arc cherché; mais elle étoit dans le calcul du 4 Mars plus petite de 68, & je voyois qu'elle diminueoit de trois ou quatre parties chaque jour, ainsi je vis qu'elle seroit réduite à 63 le 6 au matin. En effet, je trouve que le 6 au soir à 7 heures 40 minutes, la Planète devoit être à $88^{\text{d}} 49' 33''$ de longitude, plus avancée d'une seconde que la veille à pareille heure; elle étoit alors à $3^{\text{h}} 12^{\text{d}} 25' 25''$ d'élongation. Elle a rétrogradé de $4^{\text{d}} 4'$ depuis le 7 Octobre 1781 qu'elle avoit été stationnaire, jusqu'au 6 Mars 1742. Au reste, l'élongation du point de la station peut se trouver aisément par une formule très-simple que M. Lexell m'a envoyée à cette occasion; car la distance 18,9 divisée par la racine de 19,9, c'est-à-dire par la somme des deux distances de la Planète & de la Terre au Soleil, donne la tangente de l'angle $76^{\text{d}} 46'$, élongation au moment de la station, en supposant les deux orbites circulaires & concentriques.

De-là il suit qu'en 1781, ayant quatre degrés de moins en longitude, cette Planète fut stationnaire le 2 Mars, à $83^{\text{d}} 57'$ d'ascension droite, c'est-à-dire treize jours avant la première observation de M. Herschel, en sorte que si le hasard eût

eût dirigé son télescope vers cette Étoile onze jours plus tôt, il ne se seroit point aperçu de son mouvement, & peut-être cette découverte curieuse eût été perdue pour nous.

Pour calculer dès-à-présent la véritable orbite de cette Planète, il ne faudroit que retrouver quelque vestige de son apparition au temps où l'on a fait les catalogues d'Étoiles que nous avons & dans lesquels elle devoit se trouver.

M. Bode, Astronome de Berlin, qui a suivi la Planète depuis le mois d'Août 1780, a donné un Mémoire à ce sujet dans le premier volume de ses Éphémérides Allemandes pour 1784, imprimé au mois de Septembre 1781; il y rapporte d'abord une hypothèse circulaire, dans laquelle il suppose la distance 18,928. Il dit ensuite dans ce Mémoire, que l'Étoile 964 du Catalogue de Mayer, indiquée pour 1756, a 348^d 0' 2" d'ascension droite, & 6^d 2' 3" de déclinaison, pourroit bien être la Planète de Herschel; M. Bode n'a trouvé aucune Étoile dans ce point-là, quelque recherche qu'il ait faite avec sa lunette; mais il faudroit savoir dans quelle année & dans quel mois Mayer avoit fait l'observation de cet Astre, pour avoir une position exacte & dont on put faire usage.

Au mois d'Avril 1782, M. Bode a fait sur cette Planète un second Mémoire destiné au troisième volume des Mémoires de la Société des Physiciens de Berlin, & qui sera aussi dans ses Éphémérides pour 1785; il observe que Tycho dans son Catalogue, place une Étoile de la sixième grandeur au-dessus de l'Étoile μ de la queue du Capricorne, n.^o 27 de son Catalogue. Hévélius ne put la retrouver, & c'est-là en effet que notre Planète devoit être en 1587, suivant le calcul de M. Bode; mais notre Planète est bien petite pour avoir été observée par Tycho-Brahé.

On pouvoit sur-tout examiner les étoiles du Zodiaque de la Caille, vers le point équinoxial où la Planète devoit être à la fin de 1761 & au commencement de 1762, temps où cet habile Observateur travailloit à son Catalogue d'Étoiles zodiacales, imprimé dans les Éphémérides de 1765 à 1784.

Mém. 1779,

Y y y.

| MOIS & JOURS. | | TEMPS VRAI. | ASCENSION DROITE. | DÉCLINAISON. |
|---------------------|----|----------------|----------------------|--------------|
| | | H. M. S. | D. M. S. | D. M. S. |
| Mai. | 28 | 8. 49. 30 | 87. 5. 3 | 23. 37. 57. |
| Juillet. | 17 | 15. 11. 25 | 90. 19. 17 | 23. 40. 11. |
| | 18 | 15. 4. 20 | 90. 22. 54 | 23. 40. 17. |
| | 19 | 15. 14. 8 | 90. 26. 30 | 23. 40. 18. |
| | 20 | 15. 5. 7 | 90. 30. 5 | 23. 40. 21. |
| | 21 | 14. 45. 0 | 90. 33. 28 | 23. 40. 22. |
| | 24 | 15. 8. 14 | 90. 44. 3 | 23. 40. 26. |
| | 26 | 15. 6. 11 | 90. 51. 3 | 23. 40. 27. |
| | 29 | 15. 21. 49 | 91. 1. 6 | 23. 40. 27. |
| | 30 | 15. 19. 46 | 91. 4. 24 | 23. 40. 25. |
| | 31 | 15. 32. 31 | 91. 7. 38 | 23. 40. 25. |
| Août. | 2 | 15. 30. 52 | 91. 14. 12 | 23. 40. 24. |
| | 3 | 15. 18. 25 | 91. 17. 22 | 23. 40. 25. |
| | 4 | 15. 9. 30 | 91. 20. 29 | 23. 40. 26. |
| | 8 | 15. 36. 24 | 91. 32. 56 | 23. 40. 23. |
| | 12 | 15. 36. 6 | 91. 44. 41 | 23. 40. 22. |
| | 15 | 15. 52. 28 | 91. 53. 12 | 23. 40. 22. |
| | 16 | 15. 55. 28 | 91. 55. 51 | 23. 40. 17. |
| | 21 | 15. 16. 45 | 92. 8. 49 | 23. 40. 14. |
| | 26 | 16. 32. 6 | 92. 21. 7 | 23. 40. 8. |
| Septembre. | 5 | 15. 33. 28 | 92. 41. 15 | 23. 40. 0. |
| | 10 | 16. 20. 18 | 92. 49. 58 | 23. 39. 59. |
| | 14 | 15. 53. 42 | 92. 55. 36 | 23. 39. 57. |
| | 15 | 15. 33. 57 | 92. 56. 59 | 23. 39. 57. |
| | 28 | 15. 30. 44 | 93. 8. 39 | 23. 39. 57. |
| Octobre. | 5 | 17. 24. 32 | 93. 10. 50 | 23. 40. 0. |
| | 7 | 17. 17. 55 | 93. 11. 2 | 23. 40. 5. |
| | 10 | 17. 34. 22 | 93. 10. 41 | 23. 40. 11. |
| | 17 | 10. 1. 35 | 93. 8. 26 | 23. 40. 15. |
| | 22 | 15. 50. 12 | 93. 4. 29 | 23. 40. 25. |

Une chute effroyable a interrompu le cours des Observations de M. Messier, le 6 Novembre 1781.

Observations de M. Méchain, à Paris.

On a marqué d'un *d* les observations que l'on croit un peu moins exactes que les autres.

| M O I S & J O U R S. | T E M P S M O Y E N. | | | A S C E N S I O N D R O I T E apparente. | | | D É C L I N A I S O N. | | |
|----------------------------|-------------------------|-----|----|--|-----|--------------|------------------------|-----|---------------------------------|
| | H. | M. | S. | D. | M. | S. | D. | M. | S. |
| 1781. Avril. 25 | 9. | 47. | 0 | 85. | 15. | 27 | 23. | 35. | 34. |
| Mai. 5 | 9. | 2. | 0 | 85. | 45. | 34 | 23. | 36. | 36. |
| 7 | 9. | 6. | 0 | 85. | 52. | 1 | 23. | 36. | 46. |
| Décembre. 8 | 10. | 5. | 0 | 91. | 34. | 30 | 23. | 42. | 37. <i>d.</i> |
| 9 | 8. | 54. | 50 | 91. | 32. | 14 <i>d.</i> | 23. | 42. | 42. |
| 10 | 10. | 13. | 14 | 91. | 29. | 10 | 23. | 42. | 40. |
| 12 | 10. | 10. | 9 | 91. | 23. | 31 | 23. | 42. | 47. |
| 14 | 9. | 38. | 38 | 91. | 18. | 19 <i>d.</i> | 23. | 43. | 0. |
| 20 | 8. | 58. | 30 | 91. | 1. | 10 | 23. | 43. | 5. |
| 22 | 9. | 14. | 40 | 90. | 55. | 47 | 23. | 43. | 5. |
| 23 | 9. | 13. | 12 | 90. | 52. | 35 <i>d.</i> | 23. | 43. | 6. |
| 29 | 8. | 12. | 30 | 90. | 36. | 0 | 23. | 43. | 12. |
| 1782. Janv. 3 | 7. | 40. | 0 | 90. | 22. | 2 | 23. | 43. | 17. |
| 6 | 8. | 6. | 10 | 90. | 14. | 8 | 23. | 43. | 21. |
| 18 | 8. | 16. | 30 | 89. | 43. | 25 | 23. | 43. | 25. |
| 26 | 6. | 10. | 0 | 89. | 26. | 14 | 23. | 43. | 27. |
| Février. 1 | 7. | 20. | 46 | 89. | 14. | 20 | 23. | 43. | 25. |
| 15 | 6. | 47. | 30 | 88. | 54. | 1 | 23. | 43. | 12. |
| 16 | 6. | 29. | 0 | 88. | 53. | 0 | 23. | 43. | 12. |
| 17 | 6. | 29. | 46 | 88. | 52. | 6 | 23. | 43. | 12. |
| 18 | 6. | 27. | 0 | 88. | 51. | 3 | 23. | 43. | 16. |
| 20 | 6. | 32. | 0 | 88. | 49. | 13 | 23. | 43. | 13. ¹ / ₂ |
| 21 | 6. | 29. | 0 | 88. | 48. | 23 | 23. | 43. | 12. |
| Mars. 4 | 6. | 52. | 0 | 88. | 43. | 10 | 23. | 43. | 12. |
| 11 | 8. | 47. | 0 | 88. | 43. | 42 | 23. | 43. | 12. |
| 16 | 9. | 0. | 0 | 88. | 46. | 0 | 23. | 43. | 6. |
| Avril. 4 | 9. | 37. | 0 | 89. | 7. | 37 | 23. | 43. | 11. |
| Mai. 7 | 9. | 26. | 0 | 90. | 27. | 38 | 23. | 43. | 11. |
| 13 | 9. | 1. | 0 | 90. | 46. | 43 | 23. | 43. | 8. |
| Août. 16 | 16. | 16. | 0 | 96. | 35. | 4 | 23. | 36. | 4. |
| 21 | 16. | 19. | 0 | 96. | 49. | 5 | 23. | 35. | 32. |
| 23 | 16. | 30. | 0 | 96. | 54. | 27 | 23. | 35. | 27. <i>d.</i> |

542 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

*Observations de M. d'Agelet , faites à Paris , à l'École
Royale militaire , avec le Mural de 7 pieds $\frac{1}{2}$ de rayon,
qui appartient à M. Bergeret.*

| M O I S & J O U R S. | T E M P S V R A I. | A S C E N S I O N D R O I T E apparente. | D É C L I N A I S O N A P P A R E N T E. |
|----------------------------|-----------------------|--|---|
| | H. M. S. | D. M. S. | D. M. S. |
| 1782. Janv. 26 | 9. 43. 38 | 89. 25. 29 | 23. 43. 31. |
| Février. 6 | 8. 33. 31 | 89. 5. 56 | 23. 43. 28. |
| 8 | 8. 25. 23 | 89. 2. 39 | 23. 43. 22. |
| 13 | 8. 5. 17 | 88. 56. 0 | 23. 43. 21. |
| 16 | 7. 53. 30 | 88. 52. 52 | 23. 43. 16. |
| 17 | 7. 49. 34 | 88. 51. 48 | 23. 43. 16. |
| 27 | 7. 11. 5 | 88. 44. 41 | 23. 43. 12. |
| Mars. 4 | 6. 42. 30 | 88. 43. 24 | 23. 43. 8. |
| 8 | 6. 37. 44 | 88. 43. 14 | 23. 43. 9. |
| 11 | 6. 26. 46 | 88. 43. 57 | 23. 43. 10. |
| 12 | 6. 23. 9 | 88. 44. 16 | 23. 43. 6. |
| 13 | 6. 19. 30 | 88. 44. 25 | 23. 43. 7. |
| 15 | 6. 12. 19 | 88. 45. 28 | 23. 43. 9. |

Observations de M. Wargentia , faites à Stockholm.

Les trois dernières ont été faites à Upsal.

| M O I S & J O U R S. | T E M P S V R A I. | L O N G I T U D E. | | | | L A T I T U D E. | | |
|----------------------------|-----------------------|--------------------|-----|-----|----|------------------|-------|----|
| | | M. | M. | S. | D. | M. | S. | D. |
| 1781. Sept. 14 | 11. 50 | 3. | 2. | 41. | 46 | | | |
| 30 | 9. 53 | 3. | 2. | 53. | 41 | 0. 14. | 5,9. | |
| Octobre. 16 | 8. 56 | 3. | 2. | 53. | 15 | 0. 14. | 9. | |
| Novembre. 3 | 8. 38 | 3. | 2. | 36. | 24 | 0. 14. | 45. | |
| 23 | 7. 29 | 3. | 2. | 1. | 5 | 0. 15. | 2,6. | |
| Décembre. 9 | 6. 27 | 3. | 1. | 23. | 55 | 0. 15. | 24,7. | |
| 1782. Janv. 1 | 7. 46 | 3. | 0. | 25. | 34 | 0. 15. | 29. | |
| 23 | 5. 49 | 2. | 29. | 34. | 29 | 0. 15. | 37. | |
| Février. 11 | 5. 38 | 2. | 29. | 3. | 34 | 0. 17. | 34. | |
| 27 | 6. 21 | 2. | 28. | 51. | 13 | 0. 17. | 15. | |
| Mars. 6 | 5. 53 | 2. | 28. | 49. | 43 | 0. 15. | 10. | |
| 17 | 8. 31 | 2. | 28. | 52. | 39 | 0. 15. | 16. | |
| 25 | 8. 12 | 2. | 28. | 59. | 20 | 0. 15. | 9. | |
| Avril. 2 | 9. 12 | 2. | 29. | 9. | 1 | 0. 15. | 17. | |
| 6 | 7. 47 | 2. | 29. | 14. | 59 | 0. 15. | 15. | |
| 16 | 8. 38 | 2. | 29. | 23. | 15 | 0. 17. | 3. | |
| 28 | 10. — | 3. | 0. | 0. | 57 | | | |
| Mai. 6 | 10. 37 | 3. | 0. | 22. | 34 | 0. 15. | 5. | |
| 7 | 10. 31 | 3. | 0. | 25. | 19 | 0. 14. | 54. | |

Il y a une suite d'Observations dans les Éphémérides de Milan, pour 1783, qui vont du 12 Mai au 23 Octobre 1781.

544 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE
*Observations de M. Jean-René Lévêque, faites au Collège
royal, à Paris.*

| M O - I S & J O U R S . | TEMPS MOYEN. | ASCENSION D R O I T E apparente. | DÉCLINAIS. APPARENTE. | ERREUR demonhypot. sur la LONGITUD. |
|-------------------------------|-----------------------|--|--------------------------|--|
| 1782. Sept. | 2 14 ^h 50' | 97 ^d 18' 44" | 23 ^d 34' 35" | + 2' 24" |
| | 4 13. 57 | 97. 22. 48 | | + 2. 21. |
| | 5 15. 38 | 97. 24. 59 | 23. 33. 55 | + 2. 23. |
| | 6 15. 12 | 97. 26. 57 | 23. 33. 48 | + 2. 18. |
| | 8 16. 9 | 97. 30. 31 | 23. 33. 47 | + 2. 2. |
| | 9 16. 3 | 97. 32. 50 | 23. 33. 47 | + 2. 29. |
| | 10 16. 12 | 97. 34. 38 | 23. 33. 47 | + 2. 27. |
| | 13 16. 6 | 97. 39. 44 | 23. 33. 33 | + 2. 29. |
| | 16 15. 48 | 97. 44. 22 | 23. 33. 11 | + 2. 26. |
| | 23 15. 48 | 97. 53. 18 | 23. 33. 11 | + 2. 26. |
| | 25 14. 0 | 97. 55. 32 | 23. 33. 8 | + 2. 38. |

Ces observations ont été faites avec la lunette achromatique de 3 pieds $\frac{1}{2}$, dont j'ai donné les dimensions dans le quatrième volume de mon *Astronomie*, page 664, garnie d'un nouveau micromètre de M. Mégnié.

M. Lévêque, dont j'ai publié plusieurs fois les calculs, s'occupe actuellement des observations, avec autant de succès que de courage, dans mon observatoire du Collège royal. Je viens d'y placer, au mois de Septembre 1782, un mural de trois pieds de rayon, dont M. Godin a donné la description dans nos Mémoires de 1731, & qui a long-temps été dans une maison où M. Godin, M. de Fouchy & M. Bouguer ont habité successivement, rue des Postes, près l'Estrapade.

Voilà tout ce que j'ai pu faire jusqu'à présent sur un Astre qui occupera long-temps les Astronomes, & dont il sera souvent parlé dans nos Mémoires, jusqu'à ce qu'on ait déterminé tous ses élémens, & qu'on connoisse bien l'orbite de la *Planète de Herschel*.



OBSERVATION

OBSERVATION

*Relative au second Mémoire contenu dans ce volume,
page 385, sur le moyen de dissoudre la Platine
par l'Acide nitreux.*

Par M. TILLET.

IL a été dit vers la fin de ce Mémoire, pag. 435 & 436, que l'acide marin déphlogistiqué, par la distillation de cet acide sur la manganèse, attaque vivement, à l'aide de la chaleur, les précipités de platine & parvient en assez peu de temps à les dissoudre, &c. ce fait qui est bien constant, demande une explication : lorsqu'on distille au bain de sable de l'acide marin sur la manganèse, la plus grande partie de cet acide qui passe dans le ballon, est plus foible que celle qui reste encore dans la cornue, & dont la manganèse est pénétrée. Si, pour obtenir cette dernière portion de l'acide marin, on verse dans la cornue une certaine quantité d'acide vitriolique, alors l'acide marin le plus concentré se dégage de la manganèse ; & c'est cette portion plus concentrée de ce dernier acide, dont j'ai fait usage pour dissoudre des précipités de platine & même des lames d'or fin, quoique ce métal soit plus capable, en cet état, de résister à l'action de l'acide que la platine précipitée de la dissolution par l'acide nitreux, & réduite à un état pulvérulent.

Mais j'ai reconnu que cette dernière portion d'acide marin, distillée sur la manganèse & plus concentrée que la première, n'étoit pas pure ; qu'elle contenoit une petite quantité d'acide vitriolique, & que ce n'étoit qu'à la faveur de ce mélange qu'elle attaquoit vivement l'or & la platine, en acquérant ainsi la grande propriété de l'eau régale. Je n'ai pas pu douter que l'énergie de cet acide marin déphlogistiqué ne fut dûe à son mélange avec un peu d'acide vitriolique.

Mém. 1779.

Z z z

quelque concentré que fût le premier de ces acides, lorsque par des expériences répétées, j'ai vu que la première portion d'acide marin déphlogistiqué qui passe d'abord dans le ballon, sans l'intermède de l'acide vitriolique, n'a presque point d'action sur l'or ni sur la platine, & en acquiert au contraire une très-considérable sur ces deux métaux dès qu'on y joint un peu d'acide vitriolique concentré.

En versant une certaine quantité de ce dernier acide sur la portion d'acide marin retenue dans la manganèse, on n'est pas sûr exactement de la quantité d'acide vitriolique qui passe dans la distillation; & alors le mélange des deux acides peut produire plus ou moins d'effet, suivant les proportions dans lesquelles ce mélange se trouve fait après la distillation.

Il est plus simple, lorsqu'on a une fois distillé l'acide marin seul sur la manganèse, d'y mêler une quantité déterminée d'acide vitriolique concentré, & par ce moyen de varier avec précision les mélanges dans toutes les proportions qu'on juge à propos: c'est celui que j'ai employé dans un grand nombre d'expériences où j'ai eu pour but la dissolution de l'or & de la platine. La combinaison des deux acides a été à-peu-près telle que je l'aurois obtenue par la distillation; & d'ailleurs ces acides étant destinés à supporter ensemble, dans un matras, une forte ébullition, ils devoient s'y combiner aussi parfaitement qu'ils l'auroient fait dans une cornue & à la chaleur modérée d'un bain de sable.

Une trop grande quantité d'acide vitriolique, telle qu'une partie égale en volume à celle de l'acide marin déphlogistiqué, met obstacle à la dissolution; un tiers même du premier de ces acides sur deux tiers du second, ne la permet que jusqu'à un certain point: mais un sixième seulement d'acide vitriolique concentré sur cinq sixièmes d'acide marin déphlogistiqué, m'a paru une proportion assez convenable pour que le mélange dissolve entièrement les précipités de platine, enlève à l'or fin réduit en lames minces plus de la moitié de son poids, & puisse bientôt le dissoudre en total, si on

expose de nouveau la portion d'or qui reste à l'action du même dissolvant.

S'il y a un inconvénient, pour la dissolution qu'on veut obtenir, à faire entrer trop d'acide vitriolique dans le mélange des deux acides, on ne court aucun risque de n'en employer qu'un neuvième, en volume comme je l'ai dit, ou même un douzième pour composer le dissolvant, parce que l'acide marin s'évapore beaucoup plus vite pendant l'ébullition que l'autre acide, & se réduit peu-à-peu à la quantité où il doit être pour attaquer fortement l'or & la platine, en acquérant simplement de l'énergie par l'acide vitriolique, & sans que ce dernier acide y domine.

Pendant qu'un mélange d'acide marin déphlogistiqué & d'acide vitriolique concentré, fait dans des proportions convenables, a la plus grande action sur l'or fin réduit en lames, & sur les précipités de platine, il n'en a qu'une très-foible & à peine sensible sur la platine ductile & réduite en lames fort minces : ici ce dernier métal, dans un certain état, résiste à un dissolvant très-actif ; & l'or fin, dans ce même état, n'y résiste pas : là, comme je l'ai prouvé dans mon Mémoire, l'acide nitreux pur dissout parfaitement la platine ductile, à la faveur du mélange de l'or & de l'argent avec cette même platine, & laisse absolument intact l'or qui faisoit partie des trois métaux.

J'ai tenté inutilement de faire attaquer l'or fin par un mélange d'un sixième d'acide vitriolique concentré, & de cinq sixièmes d'acide marin dans son état ordinaire, pourvu de son phlogistique & tiré du même flacon duquel étoit sorti celui que j'avois distillé sur la manganèse : l'or fin en lame que j'ai employé pour cette expérience, n'a pas souffert le moindre déchet ; la liqueur, quoique réduite à moitié ou environ, n'a pas acquis la couleur jaune & foncée qui annonce la dissolution du métal, & la lame d'or avoit conservé tout son brillant métallique.

J'ai répété cette même expérience en employant un autre acide fumant, très-concentré & qui, au moment de son

mélange avec un sixième d'acide vitriolique, est entré dans une si grande effervescence que, par l'effet d'un bouillonnement subit, une partie de la liqueur a jailli avec impétuosité & s'est dispersée, en forme de pluie, autour du vase qui la contenoit. De ce mélange, si violent en apparence, il n'est résulté aucun indice sensible de dissolution; tandis qu'elle a lieu constamment, comme je l'ai dit, quand l'acide marin, déphlogistiqué parfaitement, entre dans le mélange dont l'effervescence est assez modérée dans l'instant où il se fait. Je n'ai perdu en effet, dans l'expérience dont il s'agit ici, qu'un cent vingt-huitième de grain sur l'or fin que j'ai employé, quoique la liqueur ait bouilli long-temps dans un matras, à feu nu & se soit trouvée réduite à moitié, à la fin de l'opération: on pourroit même attribuer avec vraisemblance la cause d'une perte si légère, sur le poids de l'or, à toute autre chose que l'action des deux acides combinés.

Je dois faire observer ici qu'il faut être attentif à la qualité de l'acide marin qu'on se propose de distiller sur la manganèse, afin qu'étant uni à l'acide vitriolique, il opère sûrement la dissolution. J'ai reconnu, par ma propre expérience, qu'un acide marin bon en lui-même, très-concentré & propre à différens usages, étant ainsi préparé, par l'intermède de la manganèse, & joint à un sixième d'acide vitriolique, n'a guère plus d'action quelquefois sur l'or & la platine, que s'il eût été employé dans son état ordinaire & sans avoir reçu cette préparation. Il paroît nécessaire que cet acide soit très-pur & dépouillé de toute substance capable de passer avec lui dans la distillation, & par sa nature, de rendre absolument inutile l'effet que produit sur lui la manganèse.

L'acide marin qui, au sortir de cette distillation, a une odeur vive & piquante, qui prend ensuite une légère teinte de couleur brune, n'a pas acquis, ou n'a que très-faiblement la propriété de dissoudre l'or & la platine, à l'aide de l'acide vitriolique; au lieu qu'il m'a paru l'avoir acquise certainement, lorsqu'après la distillation, il est blanc comme l'eau distillée, & exhale une odeur douce & assez agréable.

Je me borne à ces faits dans l'explication qu'exigeoit l'endroit de mon Mémoire que j'ai cité : ils donneront lieu sans doute à d'autres expériences sur ce même sujet, & conduiront à des recherches plus délicates que celles dont il s'agit ici. En considérant la nouvelle eau régale dont je viens de parler, & dans la composition de laquelle l'esprit de nitre n'entre point, on se trouve porté à croire que l'acide marin est l'agent principal dans les dissolutions opérées par sa combinaison, soit avec l'acide vitriolique, soit avec l'acide nitreux, puisque ceux-ci ne peuvent, ni réunis, ni séparés, produire ce grand effet sur certains métaux, tandis que l'acide marin uni à l'un ou à l'autre détermine bientôt la dissolution, & semble n'avoir besoin que d'être aidé dans son action, dont le principe dissolvant réside en lui, & se manifeste sur le champ à la faveur d'une petite quantité d'un autre acide, tel que l'acide vitriolique, qui anime, en quelque sorte ce principe & sert à le développer.

Comme l'action plus ou moins vive qu'exerce sur l'or & la platine, l'acide marin combiné avec une certaine quantité d'acide vitriolique, paroît dépendre beaucoup de l'intermède par lequel on a obtenu le premier de ces acides, du degré de concentration auquel on l'a porté, de la pureté dont il est, & de la qualité, peut-être, de la manganèse sur laquelle on l'a distillé, je me propose de continuer les expériences que j'ai commencées à ce sujet, de chercher le point précis où l'acide marin jouit de la plus grande énergie, pour concourir, avec l'acide vitriolique, à la dissolution des deux métaux, & de mettre sous les yeux de l'Académie les détails de cette opération, si je peux parvenir à la rendre aussi simple en elle-même, que constante dans toute l'étendue de l'effet que j'en ai vu résulter plusieurs fois.



O B S E R V A T I O N S
BOTANICO - MÉTÉOROLOGIQUES;
Faites au château de Denainvilliers, proche Pithiviers
en Gâtinois, pendant l'année 1778.

Par M. DU HAMEL.

A V E R T I S S E M E N T.

Les Observations météorologiques sont divisées en sept colonnes, de même que les années précédentes. On s'est toujours servi du thermomètre de M. de Reaumur, & on part du point zéro, ou du terme de la glace: la barre à côté du chiffre indique que le degré du thermomètre étoit au-dessous de zéro; quand les degrés sont au-dessus, il n'y a point de barre; o désigne que la température de l'air étoit précisément au terme de la congélation.

Il est bon d'être prévenu que dans l'Automne, quand il a fait chaud plusieurs jours de suite, il gèle, quoique le thermomètre, placé en dehors & à l'air libre, marque 3 & quelquefois 4 degrés au-dessus de zéro; ce qui vient de ce que le mur & la boîte du thermomètre ont conservé une certaine chaleur; c'est pourquoi on a mis dans la septième colonne, *Gelée*.

Les Observations ont été faites à huit heures du matin, à deux heures après midi, & à onze heures du soir.

Nota. Les Observations du baromètre, à commencer du 1.^{er} du mois de Janvier, ont été faites sur un baromètre callé sur celui de l'Observatoire, qui est 3 lignes plus haut que celui dont nous nous servions les années précédentes.

| Jours du Mois. | VENTS. | THERMOMÈTRE. | | | BAROM. | ÉTAT DU CIEL. |
|----------------------|--------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|--|
| | | Matin. | Midi. | Soir. | | |
| | | Degrés. | Degrés. | Degrés. | pouces lignes | |
| 1. | N. | — 1 $\frac{1}{2}$. | 0 $\frac{1}{2}$. | — 2. | 27. 8 | couvert & neigeux. |
| 2. | O. | 1. | 1. | 1. | 27. 10 | couvert & neige. |
| 3. | S. O. | 1. | $\frac{1}{2}$. | 3. | 27. 9 | beau avec nuages. |
| 4. | S. E. | 3. | 0. | $\frac{1}{2}$. | 27. 7 | couvert & bruine. |
| 5. | N. | 1. | 0. | 3. | 27. 9 | neigeux. |
| 6. | S. | 4 $\frac{1}{2}$. | — 2. | 2. | 28. 0 | couvert. |
| 7. | N. | 2. | 0. | 2. | 28. 0 | idem. |
| 8. | N. | 5 $\frac{1}{2}$. | 4. | 5 $\frac{1}{2}$. | 28. 0 | mat. brouil. l'ap. m. beau avec nuag. |
| 9. | N. | 2 $\frac{1}{2}$. | 0. | 1 $\frac{1}{2}$. | 27. 11 | couvert. |
| 10. | S. E. | 2. | 0. | 1 $\frac{1}{2}$. | 27. 9 | couvert & bruine. |
| 11. | O. | 1 $\frac{1}{2}$. | — $\frac{1}{4}$. | 2. | 27. 10 | couvert; le soir neige. |
| 12. | E. | 2. | 1 $\frac{1}{2}$. | 5 $\frac{1}{4}$. | 27. 6 | couv. mat. l'ap. m. beau avec nuag. |
| 13. | S. | 3 $\frac{1}{2}$. | 2. | 0. | 27. 3 | brouillard. |
| 14. | E. | 4. | 5. | 5. | 26. 9 | pluvieux & vent. |
| 15. | S. O. | 4. | 7. | 6. | 27. 0 | pl. grand vent; ton. très-fort à 4 ^h f. |
| 16. | S. | 5. | 8 $\frac{1}{2}$. | 4 $\frac{1}{2}$. | 27. 5 | venteux & nuageux. |
| 17. | S. | 3 $\frac{1}{2}$. | 4 $\frac{1}{2}$. | 4. | 27. 7 | brouillard. |
| 18. | S. | 3. | 5. | 5. | 27. 5 | couvert & bruine. |
| 19. | S. | 5. | 8. | 5. | 27. 6 | couvert. |
| 20. | S. | 1 $\frac{1}{2}$. | 5. | 5. | 27. 7 | couvert & venteux. |
| 21. | S. O. | 4 $\frac{1}{2}$. | 7. | — | — | grand vent & pluie. |
| 22. | S. O. | 3 $\frac{1}{2}$. | 6. | 4. | 27. 4 | pluvieux & grand vent. |
| 23. | S. O. | 4. | 7. | 5. | 27. 4 | venteux & nuageux. |
| 24. | S. | 5. | 9. | 7. | 27. 3 | couvert. |
| 25. | S. | 5. | 8. | 6. | 27. 4 | idem. |
| 26. | N. | 0. | 1. | — 1 $\frac{1}{2}$. | 27. 9 $\frac{1}{2}$ | couvert & grand vent. |
| 27. | N. | — 3 $\frac{1}{2}$. | 0. | 2 $\frac{1}{2}$. | 27. 8 | beau avec nuages. |
| 28. | N. | 1 $\frac{1}{2}$. | $\frac{1}{2}$. | 2 $\frac{1}{2}$. | 27. 10 | beau. |
| 29. | N. | 3. | 0. | 2 $\frac{1}{2}$. | 27. 11 | idem. |
| 30. | E. | 2. | — 0 $\frac{1}{2}$. | $\frac{1}{2}$. | 27. 11 | couvert; le soir bruine. |
| 31. | E. | 2. | 0. | $\frac{1}{2}$. | 27. 10 | couvert & bruine. |

552 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Il est tombé beaucoup de neige au commencement de ce mois, cela a empêché le peu de gelée qui est venue, de pénétrer si avant dans la terre; le 15, à quatre heures & demie du soir, est venu un grand coup de vent, & il a tonné un très-fort coup.

On a continué, vers la fin de ce mois, à parer les vignes; l'eau commençoit à pénétrer dans les terres.

La rivière d'Essonne a été d'une moyenne hauteur.

Le blé s'est vendu au marché, vingt - une livres le sac; l'orge, huit livres dix sous; l'avoine, sept livres dix sous; le vin de la récolte de 1777, s'est vendu jusqu'à soixante-cinq livres le poinçon.

FÉVRIER.

FÉVRIER.

| Jours du MOIS. | VENTS. | THERMOMÈTRE. | | | BAROM. | ÉTAT DU CIEL. |
|----------------------|--------|-------------------|-------------------|---------------------|----------------------|---------------------------------------|
| | | Matin. | Midi. | Soir. | | |
| | | Degrés. | Degrés. | Degrés. | pouces lignes | |
| 1. | E. | — 1. | 0. | — $\frac{1}{2}$. | 27. 11 $\frac{1}{2}$ | brouillard. |
| 2. | S. E. | 1 $\frac{1}{2}$. | — $\frac{1}{2}$. | 1 $\frac{1}{2}$. | 28. 1 | brouillard & givre. |
| 3. | E. | 2 $\frac{1}{2}$. | $\frac{1}{2}$. | 1 $\frac{1}{2}$. | 28. 2 | <i>idem</i> . |
| 4. | N. E. | 2 $\frac{1}{2}$. | $\frac{1}{2}$. | $\frac{1}{2}$. | 27. 10 | brouillard & givre avec verglas. |
| 5. | E. | 1 $\frac{1}{2}$. | 5. | 1. | 27. 8 | beau avec nuages. |
| 6. | E. | 2 $\frac{1}{2}$. | 5. | 5 $\frac{1}{2}$. | 27. 6 | couvert & bruine. |
| 7. | S. | 3 $\frac{1}{2}$. | 7. | 3. | 27. 9 | couvert. |
| 8. | S. | 0. | 7. | 1 $\frac{1}{2}$. | 27. 8 | beau. |
| 9. | N. E. | 0. | 5 $\frac{1}{2}$. | 3 $\frac{1}{2}$. | 27. 10 | beau avec nuages. |
| 10. | N. | 2 $\frac{1}{2}$. | 7. | 2. | 27. 10 | couvert; le soir brouillard. |
| 11. | N. | $\frac{1}{2}$. | 2 $\frac{1}{2}$. | 1. | 28. | couvert. |
| 12. | N. | 0. | 1. | $\frac{1}{2}$. | 28. $\frac{1}{2}$ | <i>idem</i> . |
| 13. | N. | — $\frac{1}{2}$. | 2 $\frac{1}{2}$. | — $\frac{1}{2}$. | 28. $\frac{1}{2}$ | beau avec nuages. |
| 14. | O. | — 1. | $\frac{1}{2}$. | 1. | 27. 4 | neige & vent. |
| 15. | N. | 1. | 2. | $\frac{1}{2}$. | 27. 3 | <i>idem</i> . |
| 16. | N. O. | $\frac{1}{2}$. | 1 $\frac{1}{2}$. | — 1 $\frac{1}{2}$. | 27. 0 | beau avec nuag. neigeux dans la nuit. |
| 17. | O. | 2 $\frac{1}{2}$. | 1. | — $\frac{1}{2}$. | 27. 1 | neigeux. |
| 18. | O. | 2. | 2. | 0. | 27. 4 | couvert & neige. |
| 19. | O. | 1. | 3. | — $\frac{1}{2}$. | 27. 6 | neige; l'après midi beau avec nuages. |
| 20. | S. O. | 2. | 3 $\frac{1}{2}$. | 0. | 27. 8 | beau avec nuages; le soir neige. |
| 21. | S. O. | 0. | 4. | 2. | 28. 0 | couvert. |
| 22. | S. | 2. | 5 $\frac{1}{2}$. | 5. | 28. | couvert & bruine. |
| 23. | S. | 5. | 7. | 4. | 27. 7 | grand vent. |
| 24. | S. O. | 2 $\frac{1}{2}$. | 6. | 0. | 27. 4 | grand vent & nuageux; le soir neige. |
| 25. | N. O. | — 1. | 2 $\frac{1}{2}$. | 1. | 27. 3 | grand vent & neige. |
| 26. | N. O. | 2. | 0. | — 1. | 27. 6 | couvert & neigeux. |
| 27. | S. | 3 $\frac{1}{2}$. | 2. | 1 $\frac{1}{2}$. | 27. 5 | beau avec nuag. neigé dans la mat. |
| 28. | S. | 2. | 5. | 3 $\frac{1}{2}$. | 27. 2 | couvert; il a neigé dans la nuit. |

554 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Ce mois a été froid & humide : il est survenu de grands brouillards au commencement, avec de la gelée, ce qui a occasionné une si grande quantité de givre que beaucoup de branches d'abres ont été cassées.

Le milieu & la fin ont été fort inconstans : il est tombé tantôt de la pluie, tantôt de la neige qui fondoit à mesure qu'elle tomboit, ce qui a rendu la terre si molle que l'on n'a pu labourer pour faire les mars ; on n'a fait commencer les labours qu'à la fin du mois, & en général on n'a pas fait grand ouvrage à la campagne durant ce mois.

MARS.

| Jours du MOIS. | VENTS. | THERMOMÈTRE. | | | BAROM. | ÉTAT DU CIEL. |
|----------------------|--------|---------------------|--------------------|-------------------|------------------------|---|
| | | Matin. | Midi. | Soir. | | |
| | | Degrés. | Degrés. | Degrés. | | |
| 1. | S. | 2. | 6. | 4. | 27. 2 | pluvieux. |
| 2. | S. | 2. | 6 $\frac{1}{2}$. | 3. | 27. 1 | beau & nuageux. |
| 3. | N. | 2 $\frac{1}{2}$. | 8. | 4. | 27. 1 | pluvieux. |
| 4. | N. | 3 $\frac{1}{2}$. | 3 $\frac{1}{2}$. | 2. | 27. 2 | couvert & grand vent. |
| 5. | N. O. | 1. | 2 $\frac{1}{2}$. | 1 $\frac{1}{2}$. | 27. 3 | couvert & bruine. |
| 6. | N. | 1 $\frac{1}{2}$. | 4 $\frac{1}{2}$. | 2. | 27. 5 | beau avec nuages. |
| 7. | N. O. | 1 $\frac{1}{2}$. | 2 $\frac{1}{2}$. | 2. | 27. 5 | couvert & bruine. |
| 8. | N. O. | 1 $\frac{1}{2}$. | 3. | 3 $\frac{1}{2}$. | 27. 5 | couvert. |
| 9. | N. O. | 2. | 4. | 2 $\frac{1}{2}$. | 27. 6 | <i>idem.</i> |
| 10. | N. O. | 1 $\frac{1}{2}$. | 3 $\frac{1}{2}$. | 2 $\frac{1}{2}$. | 27. 8 | couvert & bruine. |
| 11. | N. O. | 1 $\frac{1}{2}$. | 4 $\frac{1}{2}$. | 3 $\frac{1}{2}$. | 27. 9 | couvert. |
| 12. | N. | 2. | 6 $\frac{1}{2}$. | 3. | 27. 10 $\frac{1}{2}$. | <i>idem.</i> |
| 13. | N. | — 2 $\frac{1}{2}$. | 6. | 2. | 28. 0 | beau avec vent. |
| 14. | N. | 1 $\frac{1}{2}$. | 8. | 1. | 27. 11 $\frac{1}{2}$. | <i>idem.</i> |
| 15. | N. | 0. | 3. | 0. | 27. 11 | beau & nuageux. |
| 16. | N. | — 1 $\frac{1}{2}$. | 7. | 2. | 27. 11 | beau avec nuages. |
| 17. | N. | 1. | 8 $\frac{1}{2}$. | 2 $\frac{1}{2}$. | 27. 11 $\frac{1}{2}$. | beau, & le soir Aurore boréale. |
| 18. | S. | 1. | 12. | 6 $\frac{1}{2}$. | 27. 10 | beau. |
| 19. | E. | 2. | 14. | 6 $\frac{1}{2}$. | 27. 7 $\frac{1}{2}$. | <i>idem.</i> |
| 20. | S. | 5. | 10 $\frac{1}{2}$. | 8. | 27. 5 $\frac{1}{2}$. | couvert; le soir pluie. |
| 21. | S. | 5. | 8 $\frac{1}{2}$. | 10. | 27. 5 $\frac{1}{2}$. | couvert & pluvieux. |
| 22. | S. | 8. | 12. | 8. | 27. 5 | pluvieux & grand vent. |
| 23. | S. | 7. | 8. | 6. | 27. 4 | pluie & grand vent. |
| 24. | S. O. | 7 $\frac{1}{2}$. | 8 $\frac{1}{2}$. | 4 $\frac{1}{2}$. | 27. 3 | pluv. & grêle; soir il a ton. & gr. vent. |
| 25. | N. | 4. | 8 $\frac{1}{2}$. | 3 $\frac{1}{2}$. | 27. 5 | pluie & grand vent. |
| 26. | N. | 0. | 5. | 1 $\frac{1}{2}$. | 28. 0 | beau, nuag. vent, gel. à gl. aur. bor. |
| 27. | N. | — 1. | 8 $\frac{1}{2}$. | 2. | 28. 1 | beau; il a gelé à glace. |
| 28. | S. E. | 1 $\frac{1}{2}$. | 9 $\frac{1}{2}$. | 6. | 28. 1 | <i>idem.</i> |
| 29. | S. O. | 5 $\frac{1}{2}$. | 11 $\frac{1}{2}$. | 8. | 28. 1 $\frac{1}{2}$. | couv. & nuag. il a bruiné dans la m. |
| 30. | S. | 5 $\frac{1}{2}$. | 13 $\frac{1}{2}$. | 10. | 28. 0 | couvert, vent & pluie. |
| 31. | S. | 8. | 10 $\frac{1}{2}$. | 9 $\frac{1}{2}$. | 27. 11 $\frac{1}{2}$. | couvert & grand vent. |

556 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Ce mois a été au commencement froid & humide : on n'a commencé à labourer pour les mars qu'à la fin de Février, après que l'eau qui avoit été produite par la neige a eu imbibé les terres, & on a continué durant ce mois. Vers le milieu il est venu des beaux jours, & on en a profité pour semer les avoines : les vigneronns ont taillé la vigne au commencement de ce mois; ils n'ont point trouvé la moëlle du sarment noire.

Le blé de la récolte de 1777 s'est vendu au marché vingt-trois livres le sac.

Le vin, tant de la récolte de 1776 que de la récolte de 1777, s'est vendu, l'un dans l'autre, soixante livres le poinçon.

L'avoine, sept livres dix sous le sac.

La rivière d'Essonne a un peu augmenté.

Il y a eu des abricotiers en fleurs, à la fin du mois; cependant rien n'avoit encore poussé. La campagne étoit encore comme à Noël; on ne voyoit point d'hirondelles.

AVRIL.

| Jours du Mois. | VENTS. | THERMOMÈTRE. | | | BAROM. | ÉTAT DU CIEL. |
|----------------------|--------|-------------------|--------------------|--------------------|---------------------|---|
| | | Matin. | Midi. | Soir. | | |
| | | Degrés. | Degrés. | Degrés. | pouces lignes | |
| 1. | S. | 8 $\frac{1}{2}$. | 12. | 7. | 27. 9 | beau avec des nuag. le mat. bruine. |
| 2. | S. | 4. | 19. | 12. | 27. 5 | le matin brouillard, ensuite beau. |
| 3. | S. O. | 8 $\frac{1}{2}$. | 16. | 11. | 27. 8 | vent, nuag. le soir écl. & ton. éloig. |
| 4. | S. | 8 $\frac{1}{2}$. | 16. | 10. | 27. 8 | couvert le soir, pluie. |
| 5. | S. | 7 $\frac{1}{2}$. | 13. | 8. | 27. 10 | couv. & beau avec nuag. l'apr. midi. |
| 6. | S. | 5. | 17 $\frac{1}{2}$. | 11 $\frac{1}{2}$. | 27. 9 | beau. |
| 7. | S. | 7. | 19. | 14. | 27. 10 | beau, il a tonné & écl. l'après-midi. |
| 8. | N. | 9 $\frac{1}{2}$. | 21. | 14. | 27. 9 $\frac{1}{2}$ | beau, apr. m. ton. au loin, écl. le soir. |
| 9. | E. | 9. | 17. | 11 $\frac{1}{2}$. | 27. 10 | nuag. tombé quelques gout. d'eau. |
| 10. | S. E. | 9 $\frac{1}{2}$. | 19 $\frac{1}{2}$. | 12. | 27. 11 | beau, le soir ton. éclairs & pluie. |
| 11. | N. | 9. | 19. | 10. | 27. 11 | beau. |
| 12. | N. | 9. | 18. | 12. | 27. 11 | <i>idem.</i> |
| 13. | N. O. | 8. | 17. | 11. | 27. 8 | nuageux. |
| 14. | N. | 6 $\frac{1}{2}$. | 7 $\frac{1}{2}$. | 5. | 27. 8 $\frac{1}{2}$ | couvert & vent froid. |
| 15. | S. | 5. | 7 $\frac{1}{2}$. | 4. | 27. 6 | pluvieux. |
| 16. | N. | 2 $\frac{1}{2}$. | 7. | 3. | 27. 7 | gelée bl. le mat. couvert, de la grêle. |
| 17. | N. | 0 $\frac{1}{2}$. | 9. | 6. | 27. 8 | gelée bl. le mat. couvert l'apr. midi. |
| 18. | O. | 1 $\frac{1}{2}$. | 10. | 8 $\frac{1}{2}$. | 27. 10 | <i>idem.</i> |
| 19. | O. | 2 $\frac{1}{2}$. | 12 $\frac{1}{2}$. | 8. | 27. 10 | gelée blanc. le matin, ensuite beau. |
| 20. | N. O. | 5. | 11 $\frac{1}{2}$. | 5. | 27. 6 | pluvieux. |
| 21. | O. | 4. | 8 $\frac{1}{2}$. | 5. | 27. 3 | nuageux avec de la grêle & gr. vent. |
| 22. | N. | 3. | 6. | 4. | 27. 4 | pluvieux, il a tonné l'après-midi. |
| 23. | N. | 2 $\frac{1}{2}$. | 7. | 4 $\frac{1}{2}$. | 27. 6 | le matin pluv. & l'apr. midi couv. |
| 24. | N. | 2. | 9 $\frac{1}{2}$. | 6. | 27. 6 | couv. & vent fr. gelée bl. le matin. |
| 25. | N. | 2. | 7 $\frac{1}{2}$. | 5. | 27. 9 | couvert & bruine. |
| 26. | N. | 4 $\frac{1}{2}$. | 7 $\frac{1}{2}$. | 5 $\frac{1}{2}$. | 27. 4 | <i>idem.</i> |
| 27. | S. | 4 $\frac{1}{2}$. | 13 $\frac{1}{2}$. | 7 $\frac{1}{2}$. | 27. 4 | nuageux & pluvieux. |
| 28. | S. | 5. | 14 $\frac{1}{2}$. | 9. | 27. 4 | beau avec des nuages. |
| 29. | S. O. | 9. | 14. | 10 $\frac{1}{2}$. | 27. 3 | <i>idem.</i> |
| 30. | S. | 8. | 13 $\frac{1}{2}$. | 9 $\frac{1}{2}$. | 27. 2 $\frac{1}{2}$ | pluvieux. |

558 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Le 2 de ce mois on a vu des hirondelles qui ne venoient que d'arriver. Le 3, il a éclairé le soir de tous côtés.

Le rossignol a commencé à chanter à Denainvilliers le 24. Durant ce mois il a tonné, éclairé & grêlé, l'air étoit cependant froid. Depuis le 16 jusqu'au 20, il a gelé à glace les matins, ce qui a un peu gâté les vignes qui avoient été *marées** p, rincipalement celles qui étoient les plus avancées.

Vers la fin du mois il est venu des pluies froides qui ont un peu fait jaunir les blés.

Le 23, les cerisiers étoient en fleurs; à la fin du mois les pruniers étoient aussi fleuris.

En général ce mois a été froid & humide, avec de grands vents, cependant les avoines & orges, malgré le froid, ont bien levé.

* Cela signifie vignes fumées avec les marcs.

M A I.

| Jours du MOIS. | VENTS. | THERMOMÈTRE. | | | BAROM. | ÉTAT DU CIEL. |
|----------------------|--------|--------------------|--------------------|--------------------|-----------------------|--|
| | | Matin. | Midi. | Soir. | | |
| | | Degrés. | Degrés. | Degrés. | pouces lignes | |
| 1. | S. | 8. | 14. | 9. | 27. 6 | pluvieux; il est tombé de la grêle. |
| 2. | S. O. | 7 $\frac{1}{2}$. | 13. | 12. | 27. 6 | nuageux. |
| 3. | S. E. | 9. | 21. | 16. | 27. 5 | <i>idem.</i> |
| 4. | S. | 13. | 14. | 11. | 27. 7 | pluvieux. |
| 5. | S. O. | 7. | 15. | 10. | 27. 11 | beau avec des nuages & bruine. |
| 6. | S. | 8. | 15. | 11. | 27. 11 | beau avec des nuages. |
| 7. | S. | 9 $\frac{1}{2}$. | 15. | 12. | 27. 10 | pluvieux. |
| 8. | O. | 9. | 15 $\frac{1}{2}$. | 10. | 27. 10 | beau avec des nuages. |
| 9. | O. | 9. | 15 $\frac{1}{2}$. | 12. | 27. 11 | le matin couv. & l'apr. midi pluie. |
| 10. | N. | 8 $\frac{1}{2}$. | 22. | 12. | 28. 0 | beau; il a gelé blanc le matin. |
| 11. | E. | 10. | 21. | 14. | 27. 10 | beau. |
| 12. | O. | 10. | 20. | 12. | 27. 8 | <i>idem.</i> |
| 13. | S. | 9. | 17. | 12 $\frac{1}{2}$. | 27. 7 $\frac{1}{2}$. | beau avec nuag. a écl. le soir & plu. |
| 14. | S. O. | 9 $\frac{1}{2}$. | 14. | 10. | 27. 10 | pluvieux. |
| 15. | S. O. | 8. | 15. | 11 $\frac{1}{2}$. | 28. 0 | le matin pluie, l'apr. midi nuageux. |
| 16. | S. O. | 10. | 16 $\frac{1}{2}$. | 12 $\frac{1}{2}$. | 28. 0 | couv. avec quelq. ray. de s. l'ap. m. |
| 17. | S. | 11. | 19. | 15. | 27. 9 | beau avec des nuages & du vent. |
| 18. | O. | 10. | 15. | 9. | 27. 10 | beau avec du vent. |
| 19. | S. O. | 6. | 17 $\frac{1}{2}$. | 10. | 28. 1 | beau; v. gel. bl. le m. dans les vall. |
| 20. | N. | 7. | 19. | 12. | 28. 1 | beau. |
| 21. | N. | 9. | 20. | 13. | 27. 11 | <i>idem.</i> |
| 22. | N. | 12. | 22. | 13. | 27. 9 | beau, le soir il a éclairé. |
| 23. | N. | 10. | 13 $\frac{1}{2}$. | 9. | 27. 10 | pluie le mat. nuag. le soir. |
| 24. | N. | 9 $\frac{1}{2}$. | 17. | 11 $\frac{1}{2}$. | 27. 8 $\frac{1}{2}$. | beau avec des nuages & du vent. |
| 25. | S. | 10 $\frac{1}{2}$. | 15. | 11. | 27. 8 | nuageux, il a tonné & plu. |
| 26. | S. O. | 11. | 17. | 11 $\frac{1}{2}$. | 27. 8 | couvert & nuageux. |
| 27. | O. | 10 $\frac{1}{2}$. | 11. | 9. | 27. 9 $\frac{1}{2}$. | pluvieux & venteux. |
| 28. | N. O. | 9 $\frac{1}{2}$. | 14. | 9. | 28. 0 | couvert & vent. |
| 29. | N. O. | 9 $\frac{1}{2}$. | 15. | 12 $\frac{1}{2}$. | 27. 11 | couvert; le soir pluie. |
| 30. | N. | 11. | 17 $\frac{1}{2}$. | 11 $\frac{1}{2}$. | 27. 10 | beau avec des nuages. |
| 31. | N. E. | 11. | 19 $\frac{1}{2}$. | 13. | 27. 10 | beau avec du vent. |

560 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Il est venu au commencement de ce mois des pluies froides & des brouillards qui ont fait couler les fruits, principalement la cerise & les prunes; il y a des endroits où il y en a eu fort peu de noué.

Le temps a été froid & humide, cependant on a sorti les orangers; le 18, voyant que la saison avançoit, on a semé les fèves, pommes de terre de la seconde saison, & autres légumes; au commencement & à la fin du mois les vignes ne montroient pas beaucoup de raisins, à cause de la gelée du mois d'Avril.

Le vin de la récolte de 1776 & 1777, s'est vendu, l'un dans l'autre, soixante-huit livres, & soixante & douze livres le poinçon.

Le blé a valu dix-huit & dix-neuf livres le sac ou le setier, mesure de Paris, pesant 240 livres.

L'avoine, six livres dix sous le sac.

JUIN.

J U I N.

| Jours du MOIS. | VENTS. | THERMOMÈTRE. | | | BAROM. | ÉTAT DU CIEL. |
|----------------------|--------|--------------------|--------------------|--------------------|----------------------|---|
| | | Matin. | Midi. | Soir. | | |
| | | Degrés. | Degrés. | Degrés. | pouces lignes | |
| 1. | O. | 10. | 23. | 14. | 28. 0 | beau. |
| 2. | O. | 12. | 17. | 12. | 27. 11 | nuageux & vent. |
| 3. | S. | 11. | 14. | 11. | 27. 9 | pluie & vent. |
| 4. | S. O. | 10. | 12. | 7. | 27. 9 | beau avec des nuages & pluie. |
| 5. | S. | 7. | 16 $\frac{1}{2}$. | 10. | 27. 9 | beau avec nuages. |
| 6. | N. | 10. | 17. | 10. | 27. 6 | couvert; le soir, pluie & tonnerre. |
| 7. | S. | 10. | 14. | 10. | 27. 8 $\frac{1}{2}$ | mat. pluie, ensuite beau avec nuag. |
| 8. | S. O. | 10 $\frac{1}{2}$. | 17 $\frac{1}{2}$. | 11. | 27. 11 | beau avec nuages. |
| 9. | S. | 10 $\frac{1}{2}$. | 17. | 13. | 28. 0 | <i>idem.</i> |
| 10. | O. | 11. | 19. | 14. | 28. 0 | <i>idem.</i> |
| 11. | E. | 12 $\frac{1}{2}$. | 21. | 14. | 28. 0 | beau. |
| 12. | E. | 12 $\frac{1}{2}$. | 21. | 15. | 28. 0 | beau avec du vent. |
| 13. | N. | 23. | 13. | 16. | 28. 1 | <i>idem.</i> |
| 14. | N. | 12. | 23. | 15. | 28. $\frac{1}{2}$ | beau avec nuages. |
| 15. | N. O. | 11. | 16. | 11. | 27. 11 $\frac{1}{2}$ | beau avec nuages & du vent. |
| 16. | N. O. | 7 $\frac{1}{2}$. | 15 $\frac{1}{2}$. | 11. | 27. 10 $\frac{1}{2}$ | couv. gel. bl. pluie, tonn. grêl. le f. |
| 17. | N. O. | 8. | 16. | 12. | 27. 11 | gel. bl. le matin, nuageux, vent. |
| 18. | N. O. | 10 $\frac{1}{2}$. | 12. | 13. | 27. 11 | pluvieux. |
| 19. | N. | 12. | 20 $\frac{1}{2}$. | 13 $\frac{1}{2}$. | 27. 11 | couv. le soir bruine, tonné au loin. |
| 20. | N. | 11. | 19 $\frac{1}{2}$. | 16. | 28. | beau avec nuages. |
| 21. | N. | 12. | 19 $\frac{1}{2}$. | 12. | 28. $\frac{1}{2}$ | beau avec du vent. |
| 22. | N. | 12. | 20. | 16. | 28. 0 | beau. |
| 23. | N. | 16. | 24. | 16. | 27. 11 | beau avec du vent. |
| 24. | E. | 16 $\frac{1}{2}$. | 26. | 16 $\frac{1}{2}$. | 27. 9 | beau, l'apr. m. écl. & ton. au loin. |
| 25. | N. O. | 15. | 21. | 16. | 27. | beau avec des nuages & du vent. |
| 26. | S. | 15 $\frac{1}{2}$. | 23. | 17 $\frac{1}{2}$. | 27. 11 $\frac{1}{2}$ | beau. |
| 27. | S. O. | 16. | 25. | 16. | 27. 9 | beau, vent; soir tonn. écl. pluie. |
| 28. | S. | 14 $\frac{1}{2}$. | 19. | 14. | 27. 9 | beau avec nuag. & vent; soir pluie. |
| 29. | S. | 14. | 19 $\frac{1}{2}$. | 13. | 27. 9 | couv. & bruine, il a tonné au loin. |
| 30. | S. | 14. | 20 $\frac{1}{2}$. | 15. | 27. 11 | nuag. tombé quelq. gouttes d'eau. |

562 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE .

Le commencement de ce mois a été venteux & l'air froid, les pluies qui sont tombées les mois passés ont fait lever des chardons dans les avoines ; les blés se sont raccommodés, ils n'étoient plus si jaunes ; les sainfoins nouveaux n'étoient point forts, mais les vieux étoient bons & assez hauts ; on les a fauchés le 10 & le temps a été assez propre pour les sécher & les enlever : il y a eu quelques jours de pluie, mais cela ne les a point gâtés, on les a serrés bons.

Vers la fin du mois on demandoit de l'eau pour les orges & les avoines qui ont épié fort bas vers le milieu du mois ; dans la plupart des avoines il s'en est trouvé de brûlées.

Le 23, les vignes étoient en pleine fleur, & le temps chaud & sec leur étoit favorable.

La rivière d'Essonne a été fort basse durant ce mois.

JUILLET.

| Jours du MOIS. | VENTS. | THERMOMÈTRE. | | | BAROM. | ÉTAT DU CIEL. |
|----------------------|--------|--------------------|--------------------|--------------------|----------------------|--|
| | | Matin. | Midi. | Soir. | | |
| | | Degrés. | Degrés. | Degrés. | pouces lignes | |
| 1. | S. O. | 14 $\frac{1}{2}$. | 17 $\frac{1}{2}$. | 14 $\frac{1}{2}$. | 27. 11 | beau avec vent. |
| 2. | N. | 14 $\frac{1}{2}$. | 21. | 17. | 28. | beau. |
| 3. | S. O. | 15. | 25. | 18. | 27. 11 | beau avec vent. |
| 4. | S. O. | 15 $\frac{1}{2}$. | 25. | 21 $\frac{1}{2}$. | 27. 11 | beau. |
| 5. | S. | 18. | 29 $\frac{1}{2}$. | 22. | 27. 9 $\frac{1}{2}$ | beau ; le soir il a éclairé & tonné. |
| 6. | S. | 18 $\frac{1}{2}$. | 23 $\frac{1}{2}$. | 20. | 27. 10 | beau avec nuages. |
| 7. | S. | 13 $\frac{1}{2}$. | 15 $\frac{1}{2}$. | 15 $\frac{1}{2}$. | 27. 10 $\frac{1}{2}$ | pluvieux ; la nuit a été orageuse. |
| 8. | S. O. | 14. | 20 $\frac{1}{2}$. | 14 $\frac{1}{2}$. | 28. 0 | beau avec nuages ; l'ap. m. il a plu. |
| 9. | N. | 13 $\frac{1}{2}$. | 17 $\frac{1}{2}$. | 16. | 28. 0 | beau avec nuages. |
| 10. | N. | 15. | 22 $\frac{1}{2}$. | 17. | 28. 0 | beau. |
| 11. | N. O. | 15. | 22. | 16. | 28. 0 | <i>idem.</i> |
| 12. | N. | 16. | 23 $\frac{1}{2}$. | 18. | 28. $\frac{1}{2}$ | <i>idem.</i> |
| 13. | N. | 16 $\frac{1}{2}$. | 23 $\frac{1}{2}$. | 18. | 28. 0 | <i>idem.</i> |
| 14. | N. | 17. | 27 $\frac{1}{2}$. | 20 $\frac{1}{2}$. | 27. 10 $\frac{1}{2}$ | <i>idem.</i> |
| 15. | N. | 17. | 27 $\frac{1}{2}$. | 20 $\frac{1}{2}$. | 27. 11 | beau avec vent. |
| 16. | N. | 17 $\frac{1}{2}$. | 27 $\frac{1}{2}$. | 21. | 27. 10 $\frac{1}{2}$ | beau ; brouillard le matin. |
| 17. | N. O. | 17. | 21. | 15 $\frac{1}{2}$. | 27. 11 $\frac{1}{2}$ | beau avec vent. |
| 18. | N. | 15. | 20. | 16. | 27. 10 | beau avec nuages & vent. |
| 19. | N. | 17 $\frac{1}{2}$. | 24 $\frac{1}{2}$. | 21. | 27. 7 | beau. |
| 20. | S. | 17. | 20. | 11 $\frac{1}{2}$. | 27. 6 | le mat. il a tonné, ensuite vent & pl. |
| 21. | S. | 11 $\frac{1}{2}$. | 11 $\frac{1}{2}$. | 12 $\frac{1}{2}$. | 27. 9 | pluvieux & venteux. |
| 22. | S. O. | 13 $\frac{1}{2}$. | 17 $\frac{1}{2}$. | 14. | 27. 10 | beau avec nuages. |
| 23. | S. | 14. | 19. | 15 $\frac{1}{2}$. | 27. 10 | beau avec nuages & du vent. |
| 24. | S. | 17. | 23. | 17. | 27. 9 | couvert & vent. |
| 25. | S. E. | 13 $\frac{1}{2}$. | 20 $\frac{1}{2}$. | 15. | 27. 10 | beau avec nuages. |
| 26. | N. | 14. | 22. | 15 $\frac{1}{2}$. | 27. 9 | beau avec nuages ; le soir éclairs. |
| 27. | S. | 15. | 21. | 15. | 27. 10 | beau avec vent ; tonné & plu la nuit. |
| 28. | S. O. | 13. | 20. | 14. | 27. 11 $\frac{1}{2}$ | beau avec vent. |
| 29. | S. | 13. | 17. | 13. | 27. 9 | couvert, vent & pluie. |
| 30. | S. | 13. | 19 $\frac{1}{2}$. | 13. | 27. 10 | couvert, pluie, & il a tonné au loin. |
| 31. | S. | 12 $\frac{1}{2}$. | 19 $\frac{1}{2}$. | 13. | 27. 10 | couvert & pluie. |

B b b b ij

564 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Au commencement de ce mois il a paru un grand nombre de papillons blancs , principalement dans les avenues , la terre en étoit couverte ; on a commencé à ferrer les seigles le 17 ; ils étoient assez hauts & bien grénés.

Le 27 , on a commencé la moisson des fromens ; il est venu des foudres de vent vers la fin du mois qui ont bouleversé les blés & les avoines dans les endroits où ils étoient forts , & fait tomber beaucoup de fruits : on a commencé à faucher les avoines le 19.

Les faucheurs ont presque tous *fanglé* les avoines & les orges ; ils n'ont pas pu faire des ondins * , à cause du bouleversement causé par les vents ; les avoines n'étoient point hautes ni drues ; les orges étoient bons ; le temps a été favorable pour ferrer les pois & vesces qui étoient assez bons ; les raifins étoient presque à leur grosseur à la fin du mois.

La rivière d'Essonne a toujours été basse ; les noix , à la fin du mois , étoient en cerneaux bons à manger.

* On appelle *fangler* les avoines , lorsqu'en les fauchant , on met tous les épis d'un même côté ; & on appelle *faire des ondins* lorsqu'on les bechevette.

AOUST.

| Jours du MOIS. | VENTS. | THERMOMÈTRE. | | | BAROM. | ÉTAT DU CIEL. |
|----------------------|--------|--------------------|--------------------|--------------------|----------------------|---------------------------------------|
| | | Matin. | Midi. | Soir. | | |
| | | Degrés. | Degrés. | Degrés. | pouces lignes | |
| 1. | S. | 11 $\frac{1}{2}$. | 17 $\frac{1}{2}$. | 12. | 28. 0 | beau avec nuages. |
| 2. | E. | 12. | 19. | 15. | 28. 1 | beau. |
| 3. | N. | 12. | 22 $\frac{1}{2}$. | 16. | 28. 0 | <i>idem.</i> |
| 4. | N. | 13 $\frac{1}{2}$. | 24 $\frac{1}{2}$. | 17 $\frac{1}{2}$. | 27. 11 | beau avec du vent. |
| 5. | S. | 17 $\frac{1}{2}$. | 27 $\frac{1}{2}$. | 21. | 27. 9 $\frac{1}{2}$ | beau. |
| 6. | N. | 16 $\frac{1}{2}$. | 28 $\frac{1}{2}$. | 20 $\frac{1}{2}$. | 27. 9 $\frac{1}{2}$ | <i>idem.</i> |
| 7. | N. O. | 16. | 28. | 20 $\frac{1}{2}$. | 27. 9 | beau l'ap. m. couv. le soir, ton. pl. |
| 8. | N. | 16. | 23 $\frac{1}{2}$. | 15. | 27. 11 | nuageux ; le soir éclairs. |
| 9. | N. | 11 $\frac{1}{2}$. | 21. | 15 $\frac{1}{2}$. | 28. 0 | beau. |
| 10. | N. | 14 $\frac{1}{2}$. | 23. | 18. | 28. 0 | <i>idem.</i> |
| 11. | N. | 17. | 26. | 19. | 27. 11 | <i>idem.</i> |
| 12. | N. | 14 $\frac{1}{2}$. | 23. | 28. | 28. 0 | <i>idem.</i> |
| 13. | E. | 15 $\frac{1}{2}$. | 29. | 21. | 27. 8 $\frac{1}{2}$ | <i>idem.</i> |
| 14. | O. | 18. | 25. | 18 $\frac{1}{2}$. | 27. 10 | couvert & vent. |
| 15. | N. | 12 $\frac{1}{2}$. | 16 $\frac{1}{2}$. | 15. | 28. 1 | le mat. pluv. l'ap. m. beau avec n. |
| 16. | N. | 14 $\frac{1}{2}$. | 20. | 14. | 28. 2 | beau avec nuages & du vent. |
| 17. | N. | 15 $\frac{1}{2}$. | 22. | 14. | 28. 1 | beau avec du vent. |
| 18. | N. | 12. | 24. | 17. | 28. 0 | beau. |
| 19. | N. | 14. | 26 $\frac{1}{2}$. | 19. | 28. 0 | <i>idem.</i> |
| 20. | N. | 14. | 26 $\frac{1}{2}$. | 18. | 27. 11 $\frac{1}{2}$ | <i>idem.</i> |
| 21. | N. | 14. | 25 $\frac{1}{2}$. | 18 $\frac{1}{2}$. | 27. 11 | <i>idem.</i> |
| 22. | N. | 14 $\frac{1}{2}$. | 27. | 20. | 27. 11 | <i>idem.</i> |
| 23. | N. | 13. | 22 $\frac{1}{2}$. | 17. | 28. 1 $\frac{1}{2}$ | <i>idem.</i> |
| 24. | N. | 13 $\frac{1}{2}$. | 23. | 17 $\frac{1}{2}$. | 28. 3 | <i>idem.</i> |
| 25. | N. | 14. | 25. | 18. | 28. 2 | <i>idem.</i> |
| 26. | N. | 14. | 24. | 17. | 28. 0 | beau avec du vent. |
| 27. | N. | 11. | 17 $\frac{1}{2}$. | 12 $\frac{1}{2}$. | 28. 0 | beau avec grand vent. |
| 28. | N. | 10 $\frac{1}{2}$. | 17. | 13 $\frac{1}{2}$. | 28. 1 | beau avec du vent. |
| 29. | N. | 12. | 19. | 14 $\frac{1}{2}$. | 28. 1 | beau & vent. |
| 30. | N. | 8. | 19. | 13 $\frac{1}{2}$. | 27. 10 | beau ; le soir vent. |
| 31. | N. O. | 9 $\frac{1}{2}$. | 15. | 8 $\frac{1}{2}$. | 28. 0 | beau & vent. |

566 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Le 6 , on a vu des raisins tournés ; le 4 , on a fini la moisson des froments sans une goutte d'eau , & tout aussi-tôt on a levé les avoines sans qu'elles aient eu d'eau : comme elles étoient toutes *sanglées* , les rosées du matin les ont assez mouillées ; il n'en a pas été de même en terre noire , on les a mises en *ondins* en les fauchant , & comme en ondins elles ont plus d'épaisseur , la rosée n'a pu les enfondre ; on attendoit de la pluie pour les enlever , & comme il n'est point tombé d'eau il en restoit encore à enlever à la fin de ce mois.

Les fromens étoient d'une bonne hauteur , & le grain rendoit beaucoup ; il en falloit dix-huit gerbes pour en faire une mine , au lieu que l'année dernière il en falloit jusqu'à trente gerbes : les avoines ont été aussi bien grenées , mais peu épaisses.

Il a paru sur les haies & sur les arbres des fourreaux de chenilles en grande quantité , causés par ces papillons blancs qu'on avoit eus au commencement de Juillet.

Il a fait une grande sécheresse & de grandes chaleurs durant ce mois , de sorte que tous les légumes ont péri dans les jardins , & beaucoup de raisins ont été grillés aux vignes.

SEPTEMBRE.

| Jours du MOIS. | VENTS. | THERMOMÈTRE. | | | BAROM. | ÉTAT DU CIEL. |
|----------------------|--------|--------------------|--------------------|--------------------|------------------------|---------------------------------------|
| | | Matin. | Midi. | Soir. | | |
| | | Degrés. | Degrés. | Degrés. | pouces lignes | |
| 1. | N. O. | 5. | 15. | 9 $\frac{1}{2}$. | 27. 11 | beau. |
| 2. | N. O. | 7. | 16 $\frac{1}{2}$. | 11. | 27. 9 | couvert, & le soir pluie. |
| 3. | N. O. | 10. | 19. | 13 $\frac{1}{2}$. | 27. 9 | beau. |
| 4. | N. | 11. | 20. | 13. | 27. 10 | <i>idem.</i> |
| 5. | N. | 7. | 18 $\frac{1}{2}$. | 11 $\frac{1}{2}$. | 27. 10 | <i>idem.</i> |
| 6. | N. | 8. | 18. | 11 $\frac{1}{2}$. | 27. 8 $\frac{1}{2}$. | beau & vent; gel. bl. dans la nuit. |
| 7. | N. | 8. | 19. | 13 $\frac{1}{2}$. | 27. 7 $\frac{1}{2}$. | <i>idem.</i> |
| 8. | N. | 7 $\frac{1}{2}$. | 17 $\frac{1}{2}$. | 9 $\frac{1}{2}$. | 27. 10 | beau avec vent; le soir bruine. |
| 9. | S. E. | 7 $\frac{1}{2}$. | 19. | 11. | 27. 10 $\frac{1}{2}$. | beau. |
| 10. | N. | 7 $\frac{1}{2}$. | 18 $\frac{1}{2}$. | 12. | 27. 8. | beau avec nuages. |
| 11. | S. | 11. | 13. | 9. | 27. 8 $\frac{1}{2}$. | couv. & vent avec argues de pluie. |
| 12. | S. | 10. | 15. | 13. | 27. 8 | grand vent & couvert. |
| 13. | N. | 11. | 19. | 11. | 27. 8 | mat. pl. l'ap. midi beau avec nuages. |
| 14. | N. | 10. | 15. | 11 $\frac{1}{2}$. | 27. 11 | couv. vent & bruine; le soir éclairs. |
| 15. | N. | 10. | 18 $\frac{1}{2}$. | 14. | 27. 11 | beau avec nuages. |
| 16. | N. | 10. | 22. | 15. | 27. 9 $\frac{1}{2}$. | beau; le soir éclairs. |
| 17. | S. | 10 $\frac{1}{2}$. | 12. | 9. | 27. 10 $\frac{1}{2}$. | pluvieux. |
| 18. | N. | 5. | 15. | 9. | 28. 1 | le matin gelée blanche, ensuite beau. |
| 19. | N. | 5 $\frac{1}{2}$. | 15. | 8 $\frac{1}{2}$. | 27. 10 | beau; gelée blanche le matin. |
| 20. | N. | 5. | 17 $\frac{1}{2}$. | 10. | 28. 2 | <i>idem.</i> |
| 21. | N. | 7. | 15 $\frac{1}{2}$. | 10. | 28. 1 | beau; le soir aurore boréale. |
| 22. | N. | 7 $\frac{1}{2}$. | 18. | 12. | 28. 1 | beau. |
| 23. | N. | 8 $\frac{1}{2}$. | 18 $\frac{1}{2}$. | 13. | 27. | <i>idem.</i> |
| 24. | N. | 8 $\frac{1}{2}$. | 21 $\frac{1}{2}$. | 14. | 27. 10 | <i>idem.</i> |
| 25. | O. | 10. | 21. | 12 $\frac{1}{2}$. | 27. 8 $\frac{1}{2}$. | beau avec nuages. |
| 26. | S. | 9. | 13 $\frac{1}{2}$. | 13. | 27. 5 | pluvieux. |
| 27. | S. O. | 9 $\frac{1}{2}$. | 11 $\frac{3}{4}$. | 8. | 27. 7 | pluie & vent. |
| 28. | N. | 8 $\frac{1}{2}$. | 11 $\frac{1}{2}$. | 4. | 28. 0 | beau avec vent. |
| 29. | N. | 2. | 11. | 4 $\frac{1}{2}$. | 28. 1 | beau; gelée blanche le matin. |
| 30. | N. | 2 $\frac{1}{2}$. | 13. | 5. | 27. 9 | <i>idem.</i> |

Comme il est venu un peu d'eau à la fin du mois, on en a profité pour lever les avoines des terres noires, qui étoient encore dans les champs.

On a commencé aussi à labourer à demeure (qui est la dernière façon que l'on donne à la terre, pour ensuite semer les blés), vers le milieu du mois.

On a commencé les vendanges le 22 ; les raisins étoient gros, mais les sécheresses du mois dernier ont fait un peu de tort, & les raisins grilloient en mûrissant ; cependant les vignes ont rendu plus du double que l'année dernière ; on a récolté quatre poinçonées de vendanges par arpent ; le vin étoit de bonne qualité.

Les hirondelles sont parties avant la Saint-Michel, il n'en paroissoit plus aucune à la fin du mois.

On a commencé à semer les seigles dans ce même temps.

OCTOBRE.

OCTOBRE.

| Jours du MOIS. | VENTS. | THERMOMÈTRE. | | | BAROM. | ÉTAT DU CIEL. |
|----------------------|--------|---------------------|--------------------|--------------------|---------------------|--|
| | | Matin. | Midi. | Soir. | | |
| | | Degrés. | Degrés. | Degrés. | pouces lignes | |
| 1. | O. | 6. | 11 $\frac{1}{2}$. | 13. | 27. 9 | pluvieux ; il a tonné l'après-midi. |
| 2. | S. O. | 6 $\frac{1}{2}$. | 11 $\frac{1}{2}$. | 7. | 27. 7 | pluie & vent. |
| 3. | S. | 9. | 11 $\frac{1}{2}$. | 7 $\frac{1}{2}$. | 27. 5 | pluie le matin ; l'après-midi couvert. |
| 4. | N. O. | 8. | 12. | 7 $\frac{1}{2}$. | 27. 7 | beau avec nuages ; le soir pluie. |
| 5. | N. O. | 5. | 12. | 8. | 27. 7 | beau avec nuages. |
| 6. | N. | 8 $\frac{1}{2}$. | 14. | 13. | 27. 3 | le matin pluv. le soir écl. sans tonn. |
| 7. | S. | 10. | 20. | 13. | 27. 3 $\frac{1}{2}$ | beau, nuag. soir écl. foudre de vent. |
| 8. | S. | 9. | 14 $\frac{1}{2}$. | 8 $\frac{1}{2}$. | 27. 5 | couvert & bruine. |
| 9. | S. | 9. | 10 $\frac{1}{2}$. | 10. | 27. 3 | pluvieux. |
| 10. | S. | 9. | 11. | 10. | 27. 6 | <i>idem.</i> |
| 11. | S. | 8. | 10. | 6 $\frac{1}{2}$. | 27. 8 | nuageux ; le soir pluie. |
| 12. | E. | 5 $\frac{1}{2}$. | 6 $\frac{1}{2}$. | 27. 9 | 27. 9 | beau avec nuages. |
| 13. | N. E. | 5 $\frac{1}{2}$. | 10 $\frac{1}{2}$. | 4 $\frac{1}{2}$. | 27. 7 | <i>idem.</i> |
| 14. | N. | 4. | 8 $\frac{1}{2}$. | 6 $\frac{1}{2}$. | 27. 4 | couvert & venteux. |
| 15. | N. | 4 $\frac{1}{2}$. | 9. | 4 $\frac{1}{2}$. | 27. 6 | beau. |
| 16. | N. | 4 $\frac{1}{2}$. | 8 $\frac{1}{2}$. | 2. | 27. 9 | <i>idem.</i> |
| 17. | N. | — $\frac{1}{2}$. | 6. | $\frac{1}{2}$. | 27. 9 | <i>idem.</i> |
| 18. | N. | — 1 $\frac{1}{2}$. | 7 $\frac{1}{2}$. | 1 $\frac{1}{2}$. | 27. 9 | <i>idem.</i> |
| 19. | N. | — 1. | 8. | 5. | 27. 5 | nuageux ; le soir pluie. |
| 20. | S. | 5 $\frac{1}{2}$. | 10 $\frac{1}{2}$. | 9. | 27. 6 | pluvieux. |
| 21. | S. | 7. | 10 $\frac{1}{2}$. | 8 $\frac{1}{2}$. | 27. 7 | <i>idem.</i> |
| 22. | S. O. | 5 $\frac{1}{2}$. | 10. | 6 $\frac{1}{2}$. | 27. 8 $\frac{1}{2}$ | couvert & bruine. |
| 23. | S. O. | 9. | 11. | 11. | 27. 6 | pluie & vent. |
| 24. | S. O. | 11. | 15. | 13 $\frac{1}{2}$. | 27. 5 | <i>idem.</i> |
| 25. | N. O. | 9. | 11 $\frac{1}{2}$. | 8 $\frac{1}{2}$. | 27. 5 | pluvieux. |
| 26. | N. | 5 $\frac{1}{2}$. | 7 $\frac{1}{2}$. | 4. | 27. 10 | couvert. |
| 27. | N. E. | 2. | 8 $\frac{1}{2}$. | 7. | 27. 9 | beau. |
| 28. | S. E. | 8. | 11. | 10 $\frac{1}{2}$. | 27. 8 | couvert & bruine. |
| 29. | S. | 9 $\frac{1}{2}$. | 13. | 9. | 27. 11 | pluie le matin ; l'après-midi couvert. |
| 30. | S. | 9. | 11 $\frac{1}{2}$. | 8 $\frac{1}{2}$. | 28. 1 | couvert. |
| 31. | S. E. | 4 $\frac{1}{2}$. | 12. | 10. | 27. 9 | couvert, & le soir pluie. |

Le commencement de ce mois a été humide ; le vin n'a pas beaucoup bouilli dans les cuves à cause des pluies qui sont venues à la fin de l'autre mois, qui ont un peu mouillé le raisin aux vignes ; cependant le vin avoit belle couleur, & étoit de bonne qualité, ce qui ne pouvoit guère être autrement, parce que les raisins étoient très-mûrs.

Le safran n'a pas mal donné, mais il a sorti de terre fort tard, & la récolte n'a été abondante que vers le 22 ou le 23 de ce mois : il étoit nécessaire qu'il vînt de la pluie, car comme il ne pouvoit pas en sortir, à cause de la sécheresse, il auroit péri en terre ; moyennant ces pluies, il a fait très-bon labourer & semer les blés, même dans les terres noires où il n'en restoit pas beaucoup à faire à la fin de ce mois, & les premiers faits étoient dans le même temps fort bien levés ; a rentré les orangers le 20.

La rivière d'Essonne a un peu augmentée dans ce mois.

NOVEMBRE.

| Jours du MOIS. | VENTS. | THERMOMÈTRE. | | | BAROM. | ÉTAT DU CIEL. |
|----------------------|--------|-------------------|--------------------|--------------------|----------------------|-------------------------------------|
| | | Matin. | Midi. | Soir. | | |
| | | Degrés. | Degrés. | Degrés. | pouces lignes | |
| 1. | S. O. | 4 $\frac{1}{2}$. | 12 $\frac{1}{2}$. | 5. | 28. 2 | beau. |
| 2. | S. E. | 2 $\frac{1}{2}$. | 10. | 4 $\frac{1}{2}$. | 28. 1 | idem. |
| 3. | E. | 1 $\frac{1}{2}$. | 10. | 6 $\frac{1}{2}$. | 27. 8 | idem. |
| 4. | S. | 6. | 11. | 8. | 27. 6 | couvert; le soir pluie. |
| 5. | S. | 6. | 8 $\frac{1}{2}$. | 7 $\frac{1}{2}$. | 27. 4 | pluie & vent. |
| 6. | S. O. | 5 $\frac{1}{2}$. | 10. | 7 $\frac{1}{2}$. | 27. 4 | idem. |
| 7. | S. O. | 2 $\frac{1}{2}$. | 8 $\frac{1}{2}$. | 6. | 27. 6 | beau avec nuages. |
| 8. | S. O. | 4 $\frac{1}{2}$. | 8. | 5 $\frac{1}{2}$. | 27. 8 | beau avec nuag. pluie dans la nuit. |
| 9. | O. | 5 $\frac{1}{2}$. | 7 $\frac{1}{2}$. | 6 $\frac{1}{2}$. | 27. 5 | pluvieux. |
| 10. | O. | 5 $\frac{1}{2}$. | 7. | 5. | 27. 6 | idem. |
| 11. | S. O. | 9 $\frac{1}{2}$. | 11 $\frac{1}{2}$. | 7 $\frac{1}{2}$. | 27. 3 | idem. |
| 12. | N. O. | 4 $\frac{1}{2}$. | 7. | 3 $\frac{1}{2}$. | 27. 7 | couvert. |
| 13. | S. O. | 0. | 7. | 4. | 27. 9 | beau. |
| 14. | E. | 3. | 7 $\frac{1}{2}$. | 6. | 27. 7 | couvert, & pluie dans la nuit. |
| 15. | S. O. | 6. | 9. | 8. | 27. 7 | pluvieux. |
| 16. | S. | 8. | 10. | 9. | 27. 8 | couvert; le soir pluie. |
| 17. | S. | 6 $\frac{1}{2}$. | 10. | 8. | 27. 7 | couvert; pluie sur le soir. |
| 18. | S. | 7 $\frac{1}{2}$. | 8. | 4. | 27. 8 | pluvieux. |
| 19. | O. | 3 $\frac{1}{2}$. | 6 $\frac{1}{2}$. | 5 $\frac{1}{2}$. | 27. 10 | couvert. |
| 20. | S. | 4. | 7 $\frac{1}{2}$. | 5. | 27. 11 | couvert; le soir pluie. |
| 21. | S. | 4. | 7. | 5. | 27. 11 | couvert. |
| 22. | S. | 3. | 5. | 4. | 27. 11 | idem. |
| 23. | S. | 5 $\frac{1}{2}$. | 9 $\frac{1}{2}$. | 10 $\frac{1}{2}$. | 27. 10 $\frac{1}{2}$ | pluie & grand vent. |
| 24. | S. | 10. | 11. | 10. | 27. 9 $\frac{1}{2}$ | pluie & vent. |
| 25. | S. O. | 10. | 10. | 7. | 28. 1 | couvert. |
| 26. | S. O. | 6 $\frac{1}{2}$. | 8. | 5. | 28. 0 | couvert & brouillard. |
| 27. | S. | 6. | 9 $\frac{1}{2}$. | 6 $\frac{1}{2}$. | 27. 9 $\frac{1}{2}$ | pluie & grand vent. |
| 28. | S. | 4. | 8 $\frac{1}{2}$. | 5 $\frac{1}{2}$. | 28. 0 | beau. |
| 29. | S. | 4. | 5 $\frac{1}{2}$. | 4 $\frac{1}{2}$. | 27. 9 | couvert. |
| 30. | O. | 5. | 6. | 1 $\frac{1}{2}$. | 27. 11 $\frac{1}{2}$ | beau; il a plu dans la nuit. |

Ce mois a été très-humide, on a bien fait d'avoir semé les blés le mois dernier dans les bonnes terres, car ceux qui ne l'avoient point encore fait dans les terres noires, n'ont pu finir dans ce mois.

Le safran sec s'est vendu le 17 de ce mois, trente francs la livre.

On a commencé à donner à la terre des labours d'entre-hiver; on a aussi tiré les échelas dans les vignes, & on leur a donné la première façon que l'on nomme *parage*.

La rivière d'Essonne a été fort haute, elle a débordé, ce qui vient des grandes pluies qui sont tombées.

Il n'y a pas eu beaucoup de fruits cette année; mais plus de pommes que de poires: point de prunes, parce que, comme on l'a fait remarquer, au mois de Mai, il avoit noué fort peu de fleurs.

DES SCIENCES. 573
D É C E M B R E.

| Jours du MOIS. | VENTS. | THERMOMÈTRE. | | | BAROM. | ÉTAT DU CIEL. |
|----------------------|--------|---------------------|-------------------|-------------------|-----------------------|---------------------------------|
| | | Matin. | Midi. | Soir. | | |
| | | Degrés. | Degrés. | Degrés. | pouces lignes | |
| 1. | N. O. | — 1 $\frac{1}{2}$. | 3. | 2. | 27. 9 | beau. |
| 2. | E. | 1 $\frac{1}{2}$. | 2. | 3 $\frac{1}{2}$. | 27. 4 | couvert ; le soir pluie. |
| 3. | S. E. | 3. | 7. | 5 $\frac{1}{2}$. | 27. 0 | couvert ; le soir pluie & vent. |
| 4. | S. | 4 $\frac{1}{2}$. | 7 $\frac{1}{2}$. | 5. | 27. 2 | pluvieux & grand vent. |
| 5. | S. | 4. | 6 $\frac{1}{2}$. | 6 $\frac{1}{2}$. | 27. 0 | pluvieux. |
| 6. | S. | 4 $\frac{1}{2}$. | 7. | 6 $\frac{1}{2}$. | 27. 5 | couvert ; le soir pluie. |
| 7. | S. | 9. | 10. | 7 $\frac{1}{2}$. | 27. 7 | pluvieux & grand vent. |
| 8. | S. | 4 $\frac{1}{2}$. | 9. | 8 $\frac{1}{2}$. | 27. 10 | couvert & grand vent. |
| 9. | S. | 7 $\frac{1}{2}$. | 10. | 7. | 27. 11 | couvert & bruine. |
| 10. | S. | 3 $\frac{1}{2}$. | 8 $\frac{1}{2}$. | 7 $\frac{1}{2}$. | 27. 8 $\frac{1}{2}$. | couvert ; le soir pluie. |
| 11. | S. | 5 $\frac{1}{2}$. | 10. | 8 $\frac{1}{2}$. | 28. 9 $\frac{1}{2}$. | couvert. |
| 12. | S. E. | 5. | 9 $\frac{1}{2}$. | 8. | 27. 4 $\frac{1}{2}$. | beau. |
| 13. | S. | 8 $\frac{1}{2}$. | 9 $\frac{1}{2}$. | 6 $\frac{1}{2}$. | 27. 5 $\frac{1}{2}$. | pluvieux & venteux. |
| 14. | S. | 6 $\frac{1}{2}$. | 8. | 10. | 28. 5 $\frac{1}{4}$. | pluvieux & grand vent. |
| 15. | S. O. | 6. | 7. | 3. | 27. 10 | couvert. |
| 16. | O. | 1. | 4 $\frac{1}{2}$. | 4. | 28. 2 | <i>idem.</i> |
| 17. | O. | 3. | 6. | 5. | 28. 3 | <i>idem.</i> |
| 18. | O. | 4. | 6. | 3 $\frac{1}{2}$. | 28. 3 | <i>idem.</i> |
| 19. | S. E. | $\frac{1}{2}$. | 5. | 3. | 28. 2 | <i>idem.</i> |
| 20. | S. | 3. | 5 $\frac{1}{2}$. | 5. | 28. 2 | pluvieux. |
| 21. | N. | 4. | 5 $\frac{1}{2}$. | 4. | 28. 3 | couvert. |
| 22. | N. E. | 3. | 4. | 2 $\frac{1}{2}$. | 28. 2 | <i>idem.</i> |
| 23. | S. E. | 1 $\frac{1}{2}$. | 1 $\frac{1}{2}$. | 1. | 28. 3 | couvert ; le soir bruine. |
| 24. | N. | 1 $\frac{1}{2}$. | 3 $\frac{1}{2}$. | 3 $\frac{1}{2}$. | 28. 4 | <i>idem.</i> |
| 25. | N. | $\frac{1}{2}$. | 4 $\frac{1}{2}$. | 1. | 28. 4 $\frac{1}{2}$. | beau. |
| 26. | N. | 0. | 3. | 0. | 28. 6 | <i>idem.</i> |
| 27. | N. | — 1. | — $\frac{1}{2}$. | — 1. | 28. 3 $\frac{1}{2}$. | beau ; l'après-midi brouillard. |
| 28. | S. | 1 $\frac{1}{2}$. | $\frac{1}{2}$. | 1 $\frac{1}{2}$. | 28. 0 | grand brouillard. |
| 29. | S. O. | 1 $\frac{1}{2}$. | 5. | 7. | 27. 7 | pluvieux & venteux. |
| 30. | O. | 2. | 4. | 3. | 27. 9 | couvert & bruine. |
| 31. | O. | 6. | 7. | 5. | 27. 3 $\frac{1}{2}$. | pluvieux & grand vent. |

574 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Les ouvrages ont été interrompus , tant pour les voitures que pour labourer , parce que la terre étoit trop molle.

Les blés étoient très-beaux , les pluies qui sont tombées ont fait pousser beaucoup d'herbes. Le blé de la récolte de 1778 , s'est vendu au marché dix-huit livres le sac , mesure de Pithiviers. Le vin de la même récolte s'est vendu soixante livres le poinçon.

La rivière d'Essonne étoit d'une moyenne hauteur.

OBSERVATIONS sur la quantité d'Eau de pluie tombée en l'année 1778.

| | | | | |
|----------------------------------|---------|----------|--------------------|--|
| JANVIER..... | 1 pouc. | 0 lignes | 17 ^{48."} | } 2 pouc. 11 lignes 45 ^{48."} |
| FÉVRIER..... | 0. | 9. | 26 | |
| MARS..... | 1. | 2. | 2 | |
| <hr/> | | | | |
| AVRIL..... | 2. | 1. | 1 | } 4. 4. 47. |
| MAI..... | 1. | 8. | 42 | |
| JUIN..... | 0. | 7. | 4 | |
| <hr/> | | | | |
| JUILLET..... | 1. | 7. | 22 | } 3. 6. 46. |
| AOÛT..... | 0. | 7. | 44 | |
| SEPTEMBRE..... | 1. | 3. | 28 | |
| <hr/> | | | | |
| OCTOBRE..... | 1. | 4. | 37 | } 5. 6. 5 |
| NOVEMBRE..... | 2. | 4. | 42 | |
| DÉCEMBRE..... | 1. | 8. | 22 | |
| <hr/> | | | | |
| TOTAL DE LA PLUIE tombée pendant | | | | |
| l'année 1778..... | | | | 16 pouc. 5 lignes 47 ^{48."} |



**MESSIEURS DE LA SOCIÉTÉ**

*Royale des Sciences établie à Montpellier, ont
envoyé à l'Académie le Mémoire suivant, pour
entretenir l'union intime qui doit être entre
elles, comme ne faisant qu'un seul Corps, aux
termes des Statuts accordés par le Roi, au mois
de Février 1706.*

DESCRIPTION

*Du petit Volcan éteint, dont le sommet est couvert
par le village & le château de Montferrier,
à une lieue de Montpellier.*

Par M. DE JOUBERT.

LES Naturalistes de notre siècle sont les premiers qui se
soient aperçus que plusieurs provinces de France avoient
éprouvé dans des temps reculés l'explosion des feux souter-
rains par les volcans.

M.^{rs} de Malesherbes & Guettard parcourant l'Auvergne
en 1751, reconnurent plusieurs produits volcaniques dans
les matériaux préparés pour engraver les chemins, & dans
les pierres employées pour les bâtimens ; les bornes & les
butterones distribuées dans les environs de Clermont, furent
pour eux de nouvelles indications (a). Ils furent conduits

(a) Sur quelques montagnes de la France qui ont été des Volcans ; par
M. Guettard. *Voy. Mémoires de l'Académie*, année 1752, page 27.

par des payfans au lieu de l'extraction de ces pierres; ils s'y confirmèrent dans l'opinion de l'ancienne existence d'un volcan. Cette conviction s'accrut en eux dans les courses qu'ils firent sur les autres montagnes des environs de Clermont, le Puy - Dôme & autres pareilles. M. Guettard de retour à Paris, annonça à l'Académie des Sciences, les volcans éteints de l'Auvergne. M. Desmarest a visité & décrit le même pays; en 1763, & 1764 il a déterminé la nature des différentes productions volcaniques qui s'y trouvent, notamment des laves compactes ou *basaltes*, dont il a le premier fait connoître l'origine dans les séances particulières de l'Académie (b). M. Guettard, en 1770, n'a éprouvé aucune difficulté à s'exprimer nettement sur ce point, en disant que M. Desmarets avoit découvert les basaltes en Auvergne. L'ancien incendie & commotion de plusieurs parties de la France, qui nous sont démontrés par ces monumens indubitables, ne se trouvent cependant indiqués ni par les Historiens, ni dans les ouvrages des Naturalistes antérieurs à ce siècle. Il s'est présenté depuis d'autres prétendans à la découverte. M. de Franjat en a refusé la gloire à M. Guettard, dans son livre sur les volcans du Vivarais; mais elle lui est bien assurée par le témoignage très-probant & très-circonstancié, que M. de Malesherbes lui a donné, & par la justice qui lui a été rendue en Auvergne. J'ai été témoin dans le voyage que j'y fis avec lui, il y a deux ans, qu'on s'est rappelé l'étonnement qu'y avoit causé le premier jugement qu'il avoit porté sur les volcans de cette contrée.

On n'a pas contesté à M. Montet l'avantage d'avoir découvert & annoncé les volcans du Languedoc; ces Naturalistes ont instruit & dirigé les voyageurs; nos montagnes sont visitées par les observateurs de la Nature. On s'efforce de

(b) Note du Mémoire de M. Montet, pour l'année 1760, sur un grand nombre de Volcans éteints en Languedoc : Mémoire sur l'origine du Basalte; par M. Desmarest, *Mém.* de l'Acad. année 1771, page 476. Second Mémoire sur les Sciences & les Arts, *tome second* ; neuvième Mémoire sur le Basalte des Anciens & des Modernes, page 276.

trouver les traces & les produits des feux souterrains, on cherche à déterminer les époques des éruptions, on en calcule le nombre, on en mesure la direction & l'étendue, & on analyse les matières vomies. On conjecture sur les rapports & la liaison de ces bouches qui se laissent approcher aujourd'hui sans danger ni crainte; & on n'est plus étonné de rencontrer fréquemment en Languedoc les pétroles & les sources d'eaux chaudes. Chaque voyageur ajoute quelque chose à ce que les descriptions précédentes lui avoient appris, & sans rien enlever au mérite de la découverte, on perfectionne tous les jours les détails de l'observation.

Le petit volcan de Montferrier est du nombre de ceux que M. Montet a indiqués. Personne depuis lui ne s'en est occupé; j'ai cru que je mériterois des reproches si, après avoir visité deux fois les volcans du Velay & du Vivarais, j'omettois d'observer celui qui est le plus près de nous; je me suis applaudi d'avoir fait précéder l'examen des grands volcans; ce que j'y ai vu m'a rendu sensibles des objets qui auroient pu m'échapper à Montferrier; l'éruption paroît avoir été de peu de durée, tout y est resserré & en petit volume.

Soit que les éruptions volcaniques soient sorties des montagnes déjà remarquables par leur élévation, soit que les monticules ne se soient formés que par une boursofflure que le feu souterrain a élevée dans des vallons, l'aspect de tout volcan non altéré par des révolutions postérieures, présente même de très-loin la forme d'un cône tronqué; lorsque la montagne s'est ouverte pour vomir les matières rejetées à la suite des ébranlemens intérieurs, son sommet s'est recouvert de cendres ou de petits fragmens de terres cuites & de ponces; l'orifice du volcan s'en est garni successivement, & ces corps légers sont retombés en talus, à mesure qu'ils n'ont pas eu de base; de-là la forme conique que ces montagnes acquièrent. Lorsque la vallée a vu élever au milieu d'elle la boursofflure dont le sommet s'est rompu pour vomir les flammes, la forme conique est due à la boursofflure elle-même, qui ne fait que se revêtir des matières légères que

le volcan rejette. C'est par la constitution des terrains environnans, autant que par celle de la montagne elle-même, que l'on peut déterminer quel étoit l'état du pays antérieurement à l'explosion.

Il suffit du premier coup-d'œil jeté sur le canton de Montferrier, pour juger que l'élévation sur laquelle le village & le château sont bâtis, est discordante avec les côteaux voisins, & qu'on ne peut rapporter son existence à la même origine.

La vallée de Montferrier s'étend du nord au midi, elle a été creusée par la rivière qui y coule dans cette direction & qu'on appelle le Lez, en latin *Ledum*. Cette rivière a rompu par son cours successif un banc de cailloux roulés, la plupart calcaires, offrant par intervalles une espèce de poudingue, coloré par de l'ocre martiale brune : cette rupture a laissé en forme d'élévation à l'est & à l'ouest, les extrémités de ce banc, par le creusement successif qui a même attaqué les couches de pierre calcaire, sur lesquelles ce banc est posé. L'action de la rivière a donné à la vallée la forme d'un arc de cercle renversé; c'est au tiers de cet arc que s'élève le monticule volcanique; il a pour base la pierre calcaire qui constitue l'état commun du pays, à six lieues au-dessus vers le nord, & à moins de demi-lieue vers le midi.

Cette pierre présente des couches parallèles entr'elles; d'environ un pied d'épaisseur; elle est d'un gris-foncé dans l'intérieur, & elle se casse presque toujours en parallélogrammes; la couche de poudingue se trouve au-dessus, & dans la direction de l'arc de cercle; la sommité du monticule qui excède cette direction, est toute volcanique, c'est d'après la face du monticule au midi, que je fais cette description.

L'inclinaison des couches de pierre calcaire & du poudingue, est généralement d'un très-petit angle, & dirigée du nord au midi en allant de Montpellier à Montferrier; on la voit constante jusque vers le pont où est le poteau de la Seigneurie, & qui traverse une vallée allant de l'est à l'ouest. On est surpris que les couches de pierre calcaire soient inclinées sur le bord de cette vallée rapidement &

en sens contraire du midi au nord, & que vis-à-vis & au monticule de Montferrier, les mêmes couches s'inclinent au contraire du nord au midi & aussi rapidement. La même vallée absorbe l'extrémité des unes & des autres; d'après cet aspect qui doutera que cette vallée de l'est à l'ouest, n'ait été formée par un affaissement? elle est au bas du volcan, elle a pu en être le foyer dont l'explosion s'est dirigée obliquement du midi vers le nord; le vide produit par l'éruption & les tremblemens qui l'ont préparée, ont dû occasionner la rupture des couches de pierre calcaire, dont la masse s'est inclinée en sens contraire vers ce foyer, en entraînant dans la même chute les parties les plus voisines.

L'état de la montagne de Montferrier confirme cette conjecture: la face au midi est, comme il vient d'être dit, composée de couches de pierre calcaire & de la couche de poudingue qui forment ensemble les deux tiers de l'élévation: le tiers supérieur est volcanique; au contraire, tout est volcanique dans la face qui regarde le nord, depuis la sommité jusqu'au bas. L'explosion du volcan a donc été dirigée très-obliquement du midi vers le nord; elle a soulevé la masse des pierres constitutives du terrain pour les incliner vers le midi. Il en a résulté une grande ouverture, dans laquelle s'est faite la boursouffure qui a élevé le monticule au-dessus du terrain original. Dans la partie de l'ouest, les matières vomies ont recouvert l'ancien sol & se sont étendues vers le monticule de poudingue. Le côté de l'est présente une face plus étendue en profondeur, parce qu'il regarde le milieu de la vallée, les deux tiers supérieurs sont volcaniques; il est possible que la formation des terrasses pour descendre du château à la rivière, ait occasionné dans une portion l'enlèvement de quelque couche primitive, & que dans quelques endroits nous ne voyons qu'un intérieur dégagé des pierres calcaires qui le recouvraient; cette conjecture est indiquée par la forme des laves qui paroissent, sur-tout vers le bas, avoir été moulées sur des corps qui ont présenté des cavités.

On remarque dans tous les volcans , tant existans qu'éteints, que le ruisseau de laves ne renverse rien , & que le moindre obstacle l'arrête : il enveloppe les corps qui offrent le moins de résistance , de-là vient la variété des matières hétérogènes & les plus altérables au feu , que nous trouvons intacts dans les produits des volcans. La lave s'adapte sur la surface des corps qu'elle rencontre , elle s'introduit dans leurs fentes jusques à ce qu'elle parvienne à les surmonter & à les envelopper.

L'éruption du volcan de Montferrier s'est contenue dans le terrain même du monticule ; tout indique qu'elle n'a pas été de longue durée , & qu'elle ne s'est pas réitérée : c'est du côté de l'ouest que se trouvent les ruisseaux les plus considérables de lave compacte ; j'en ai aperçu deux d'environ cinq à six toises de large. La lave compacte qui a coulé du côté du nord y occupe moins d'étendue ; cette lave à laquelle on donne proprement le nom de *basalte* , est le produit de l'éruption dans la plus grande force ; elle a sillonné les premières matières vomies , dont le volume est enveloppé : ces premières matières sont graveleuses & le plus souvent incohérentes.

Elles ont cependant pris une consistance très-solide dans la partie de l'ouest qui n'a pas été le lieu du premier dépôt de l'éruption , il paroît que cette partie ne s'est garnie que la dernière , aussi a-t-elle reçu les matières les plus compactes. C'est le canton le plus élevé , c'est l'extrémité supérieure de l'arc de la vallée , & le monticule volcanique n'a pu y verser que quand il a eu acquis la plus grande élévation. Cette espèce de lave y offre le coup-d'œil d'une brèche ou d'un poudingue à petites masses , elle se rapproche de celle qui forme les montagnes aux environs du Puy en Velay. Un sédiment volcanique d'un brun clair y réunit des grains gros au plus comme des noisettes , d'une lave noire rarement poreuse , d'une lave très-compacte brune , d'une espèce de brique rougeâtre & peu dure , de chrysolite & de schorl ; tous ces corps sont mélangés & liés par ce sédiment.

Dans la partie du midi & de l'est, ce produit de l'éruption est uni par une autre matière. Le spath s'est introduit dans les intervalles des globules & dans les fentes des masses de cette espèce de gravier. Lorsque les fentes se sont trouvées trop grandes, le spath n'a fait qu'encroûter les parois, & il a formé dans le vide sa cristallisation en pyramides trièdres : cette formation spathique n'est dûe nullement au volcan, elle est très-postérieure.

Le gravier volcanique qui constitue la partie septentrionale du monticule, n'a éprouvé aucune réunion, il se détache & s'ameublît aisément.

Depuis la porte du village qui regarde entre le nord & l'est, jusqu'au portail de la Paroisse, s'élève une masse de lave compacte noirâtre, refendue verticalement en vrais prismes basaltiques; les maisons & l'église sont fondées sur cette lave; près la porte & dans l'intérieur du village, les basaltes s'élèvent au-dessus du sol de cinq à six pieds; les bornes qui ont été posées au dehors de la porte, ont été détachées de cette masse; ces prismes varient dans le nombre de leurs faces, comme dans toutes les chaussées des Géans. De pareils prismes d'un volume médiocre & même très-petit, se trouvent épars dans les terres labourées des environs de ce sommet du volcan. Aucune recherche n'a pu me faire découvrir à jour la place du cratère, & tout indique qu'on a profité du sommet tronqué du monticule, pour y bâtir les maisons; l'inclinaison des couches primitives soulevées du nord au midi, l'abondance & la qualité de la lave graveleuse sur la face du nord, les courans de lave compacte de l'ouest & du nord, la direction & la réunion de ces courans vers le lieu où est le village, concourent à prouver que les maisons nous cachent la bouche de ce volcan. Elle n'a pas dû laisser une cavité après l'éruption, dès que l'éboulement observé aux limites de la terre de Montferrier, en a rempli l'espace où l'inflammation avoit formé le vide; les matières fondues & soulevées dans le cratère, n'ont pu redescendre dans le foyer qui avoit été comblé par l'ébou-

lement ; l'explosion a donc dû être interceptée , & les laves se sont trouvées arrêtées dans la bouche ; c'est ainsi que l'éruption paroît avoir pris fin.

Il n'est pas aussi facile de donner l'époque dans laquelle ce volcan s'est formé. L'histoire & les pierres du pays, prouvent que la mer a séjourné non-seulement à Montferrier, mais six lieues plus haut vers le nord. Le schiste & le granit ne se trouvent qu'entre Saint-Hypolite & la Salle, & ne s'étendent vers l'ouest qu'au-dessus de Ganges, ce qui donne au moins la même distance au nord. L'abandon que la mer nous a fait de tout ce pays, ne remonte donc pas à l'époque la plus ancienne, & Montferrier est beaucoup plus près des côtes actuelles de la mer, que des montagnes que la Méditerranée a autrefois respectées. Le banc de poudingues que nous avons déjà décrit, & qui traversoit anciennement le terrain de la vallée de Montferrier, est encore une formation marine. Les cailloux roulés qui le constituent y ont été portés & rangés par le courant qui règne & régna toujours sur nos côtes de l'est à l'ouest. Il seroit donc possible que le volcan de Montferrier se fût formé dans le séjour que la mer a fait dans cette contrée ; il est cependant plus vraisemblable qu'il n'a brûlé qu'après la retraite de la mer. Le banc de poudingues paroît avoir été rompu, & la vallée étoit déjà formée avant l'explosion ; l'aspect des lieux semble l'indiquer. Il auroit absolument pu se faire qu'un courant de la mer eût creusé la vallée, comme il a séparé les deux masses de la montagne voisine, dite de *Saint-Loup* ; mais la direction de ce courant ne porte pas vers Montferrier, & la rivière qui coule dans la vallée, est un agent naturel plus vraisemblable. Je crois donc que cette rivière, dite *le Lez*, a successivement rompu le banc de poudingues élevé par la mer, & a creusé ensuite les pierres qui avoient été le produit des premiers dépôts, & que dans les progrès de ce creusement, les eaux ont trouvé accès dans l'intérieur, & se sont portées sur les matières inflammables ; je supposai, à ma première visite de ce volcan, qu'il y avoit eu un

amas de pyrites ; mais mes dernières observations m'induisent à penser que les pyrites ont pu n'y pas exister ; j'ai observé dans un puits de cinq à six toises , que j'ai vu creuser vers l'ouest, hors du village , que la masse de lave étoit traversée à environ vingt pieds en profondeur , par un banc d'un à deux pieds d'épaisseur , qui avoit l'apparence d'argile ; la lave le porte & le couvre ; il s'en est trouvé des masses rejetées avec le gravier qui couvre la face du nord , & les fragmens de cette même couche sont répandus dans tout le monticule. C'est une terre grasse au toucher , & qui a le coup-d'œil d'argile ocreuse ; l'examen chimique a prouvé qu'elle contient un tiers en argile , & le surplus en terre calcaire , avec la présence d'un peu de fer. Ce mélange forme une vraie marne , laquelle poussée au feu , a donné un verre noir.

L'état présent de cette couche indique qu'elle a pu , avant la formation du volcan , être une véritable argile tenant du fer & que sa décomposition a été la cause de l'inflammation. Cette décomposition a produit la séparation de l'acide vitriolique. Cet acide en abandonnant l'argile , & en se portant sur la terre ocreuse , répandue généralement dans le canton , a pu former une combinaison pyriteuse dont l'inflammation a causé l'éruption du volcan ; c'est peut-être aussi de cette même couche , primitivement argileuse , que sont sortis ces corps vitreux que nous apercevons au milieu des laves , & par petits rognons ; ils sont quelquefois mélangés de parties marneuses.

F I N.

